BULLETIN DE LA S. M. F.

RÉMI LANGEVIN
HAROLD ROSENBERG

Quand deux sous-variétés sont forcées par leur géométrie à se rencontrer

Bulletin de la S. M. F., tome 120, n° 2 (1992), p. 227-235
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_2_227_0>

Bull. Soc. math. France,
120, 1992, p. 227–235.

QUAND DEUX SOUS-VARIÉTÉS SONT FORCÉES PAR LEUR GÉOMÉTRIE A SE RENCONTRER

PAR

RÉMI LANGEVIN ET HAROLD ROSENBERG (*)

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est de montrer que deux sous-variétés complètes d'une variété M de courbure sectionnelle supérieure ou égale à une constante $c > 0$ peuvent être forcées par leur géométrie à se rencontrer. En particulier nous montrons que dans ce cas une géodésique et une hypersurface totalement géodésique se rencontrent.

ABSTRACT. — The goal of this article is to show that two complete submanifolds of a manifold M of sectional curvature greater or equal than a constant $c > 0$ may be forced to meet by their geometry. In particular we show that in this case a geodesic and a totally geodesic hypersurface meet.

Le but de cet article est de montrer que deux sous-variétés complètes d'une variété M de courbure sectionnelle strictement positive peuvent être forcées par leur géométrie à se rencontrer.

Dans la suite N_1 et N_2 seront deux sous-variétés complètes de géométrie bornée de dimensions respectives n_1 et n_2 satisfaisant

$$n_1 + n_2 \geq \dim M.$$

Notre but initial était de répondre à la question suivantes : soient L_1 et L_2 deux courbes holomorphes complètes de $\mathbb{CP}_2$, de géométrie bornée (c'est-à-dire de courbure bornée). Leur intersection est-elle non vide? Nous n'avons pu, malheureusement répondre à cette question. Signalons cependant une question analogue qui admet une réponse positive due à R. SCHOEN.

(*) Texte reçu le 17 octobre 1990, révisé en avril 1991.

R. LANGEVIN, Université de Bourgogne, Dépt. de Mathématiques, B.P. 138, 21004 Dijon Cedex, France.
H. ROSENBERG, Université de Paris VII, Dépt. de Mathématiques, 2, Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.

Classification AMS : 58E10, 53C99

Soient L_1 et L_2 deux sous-variétés minimales complètes plongées, de géométrie bornée d'une variété M^3 de courbure sectionnelle strictement positive. Leur intersection est alors non vide. En effet la réunion $\overline{L_1 \cup L_2}$ est une lamination par des sous-variétés minimales et si l'intersection de L_1 et L_2 était vide, une feuille L de $\overline{L_1 \cup L_2}$ serait, d'un côté au moins, limite des sous-variétés minimales de $\overline{L_1 \cup L_2}$, et donc serait stable. Le théorème de R. Schoen [Sc] montre que L est dans ce cas totalement géodésique. La courbure intrinsèque de L est donc strictement positive. Le théorème de Myers implique donc que L est compacte. Les feuilles de $\overline{L_1 \cup L_2}$ qui spiralent vers L sont aussi compactes, puisqu'elles sont de courbures intrinsèque strictement plus grande qu'une constante strictement positive sur des domaines de diamètre suffisament grands (là ou elles spiralent vers L). Mais nous obtiendrons ainsi deux feuilles minimales compactes disjointes, ce qui est impossible (voir en PROPOSITION 1.3 ce résultat de FRANKEL [Fr]).

Le deuxième auteur conjecture que deux courbes holomorphes complètes de géométrie bornée de $\mathbb{CP}_2$ se rencontrent, et donc qu'une courbe holomorphe complète de géométrie bornée plongée dans $\mathbb{CP}_2$ est compacte.

Par ailleurs C. CAMACHO pense avoir observé les moustaches, les yeux de chat et la queue d'un minimal exceptionnel de $\mathbb{CP}_2$ qui, s'il existait, contredirait la conjecture précédente.

Ici nous étudierons en particulier les géodésiques non compactes, généralisant le théorème suivant du à HADAMARD [Ha] :

THÉORÈME 0.1. — *Soit M^2 une sphère de courbure strictement positive et C une géodésique fermée de M^2. Toute autre géodésique C' doit couper C.*

Notre énoncé est :

THÉORÈME 0.2. — *Deux géodésiques complètes d'une sphère M^2 de courbure strictement positive se coupent toujours.*

Nous écartons l'existence de deux géodésiques non compactes asymptotes qui n'avait pas été étudié par Hadamard. En particulier les géodésiques plongées doivent être compactes, puisque l'adhérence d'une géodésique plongée est une lamination géodésique.

1. Minima locaux de la distance

Deux sous-variétés N_1 et N_2 sont à une distance positive si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

a) il existe $p \in N_1$ et $q \in N_2$ tels que $d(p,q) = d(N_1, N_2) > 0$;

b) la borne inférieure $d(N_1, N_2) > 0$ n'est pas atteinte.

Nous allons dans ce premier paragraphe donner, en adaptant une démonstration de Frankel [Fr] des conditions géométriques interdisant le cas a).

Dans la suite M sera une variété riemannienne de dimension m et de courbure (sectionnelle) supérieure ou égale à une constante $C > 0$.

Lemme 1.1. — *Si N_1 et N_2 sont des sous-variétés totalement géodésiques dont les dimensions n_1 et n_2 satisfont $n_1 + n_2 \geq m$, les points critiques de la fonction distance de valeur critique non nulle sont d'indice supérieur ou égal à $n_1 + n_2 - m + 1$.*

Corollaire (Frankel [Fr]) 1.2. — *La fonction distance définie plus haut ne peut avoir de minimum local différent de zéro.*

Dans le même esprit, Frankel démontre aussi :

Proposition [Fr] 1.3. — *Lorsque N_1 et N_2 sont deux hypersurfaces minimales complètes de M, la fonction distance ne peut avoir de minimum local non nul.*

Démonstration du Lemme. — Soient $p \in N_1$ et $q \in N_2$ deux points distincts réalisant un point critique de la distance. Soit γ un arc géodésique de M dont la longueur est la distance $d(p,q)$.

Transportons parallèlement le long de γ l'espace T_pN_1 tangent en N_1 à p. L'image $\tau_\gamma(T_pN_1)$ coupe T_qN_2 en un sous-espace de dimension $p + q - m + 1 \geq 1$ que nous noterons V_q. Il existe donc un vecteur unitaire $V \in T_pN_1$ tel que $\tau_\gamma V$ soit contenu dans T_qN_2.

Notons V_s le vecteur tangent en $\gamma(s)$ obtenu à partir de V par transport parallèle le long de l'arc de géodésique $[\gamma(0), \gamma(s)]$.

Soit $\gamma(t,s)$ une variation de la courbe γ telle que :

- $\gamma(0,s) = \gamma(s)$;
- $\partial/\partial t(\gamma(s,0)) = V_s$;
- $\gamma(s,t)$ est, pour chaque s, une géodésique paramétrée par sa longueur d'arc t.

Par hypothèse, l'énergie est :

$$E(t) = \int_0^d \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \gamma(t,s) \right\|^2 \mathrm{d}s.$$

La variation seconde en 0 de l'énergie satisfait :

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}t^2}(0) = -2 \int_0^d K\Big(\frac{\partial \gamma}{\partial s}, V(s)\Big)\, \mathrm{d}s \le -2cd,$$

où K désigne la courbure sectionnelle.

Comme le résultat est vrai pout tout secteur $V(0,0)$ non nul appartenant à un sous-espace de dimension $n_1 + n_2 - m + 1$, ceci démontre le résultat du lemme.

Nous pouvons de même étudier des hypersurfaces complexes de $\mathbb{CP}_n$.

PROPOSITION 1.4. — *Soient N_1 et N_2 deux hypersurfaces, holomorphes complètes de $\mathbb{CP}_n$. La fonction distance $N_1 \times N_2 \to \mathbb{R}^+$ ne peut avoir de minimum local non nul. Le même résultat reste vrai si la variété ambiente est Kalherienne compacte de courbure positive.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe un tel minimum $p \in N_1$, $q \in N_2$. Nous pouvons répéter le calcul fait par FRANKEL dans le cas de deux hypersurfaces minimales (PROPOSITION 1.3) car le transport parallèle le long de la géodésique γ joignant p à q amène l'espace tangent $T_q N_2$ à coïncider avec l'espace tangent $T_p N_1$ en effet le transport parallèle préserve les sous-espaces complexes. Il suffit maintenant de répéter le calcul en utilisant le fait qu'une sous-variété complexe de $\mathbb{CP}_n$ est minimale et la positivité de la courbure sectionnelle de $\mathbb{CP}_n$. Ceci permet de déduire un résultat de CAMACHO, LINS et SAD [CLS].

COROLLAIRE 1.5. — *Un feuilletage $\mathcal{F}$ holomorphe de $\mathbb{CP}_n$ admet au plus un ensemble saturé minimal ne contenant pas de point singulier.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe deux tels minimaux $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Comme $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont compacts, il existe $p \in \mathcal{M}_1$, $q \in \mathcal{M}_2$ tels que $d(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = d(p,q) > 0$. Il suffit d'appliquer la PROPOSITION 1.5 aux feuilles de $\mathcal{F}$ passant par p et q.

En supposant que les singularités du feuilletage $\mathcal{F}$ soient isolées et admettent chacune au moins une séparatrice c'est-à-dire une feuille qui est une hypersurface d'équation $F = 0$ au voisinage de la singularité, F holomorphe admettant le point singulier comme singularité isolée, on pourrait démontrer que si chaque fois qu'elle admet une singularité dans son adhérence, la feuille L admet aussi une de ses séparatrices dans son adhérence, cette feuille admet le minimal $\mathcal{M}$ dans son adhérence.

2. Elles se coupent

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Soient* N_1 *et* N_2 *deux sous-variétés totalement géodésiques complètes d'une variété* M *compacte à courbure strictement positive. Si on a* $\dim N_1 + \dim N_2 \geq \dim M$, *alors* N_1 *et* N_2 *se coupent.*

Dans ce chapitre N_1 et N_2 seront supposées *totalement géodésiques.*

Remarquons d'abord que le théorème de Myers implique que N_1 et N_2 sont compactes, comme l'est M, si leurs dimensions sont supérieures ou égale à 2.

Donc, si $n_1 + n_2 \geq m$ et $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$, N_1 et N_2 se coupent car la distance ne peut par le LEMME 1.1 atteindre un minimum local strictement positif.

Il nous reste à montrer qu'une géodésique et une hypersurface totalement géodésique se rencontrent.

Soient p un point de la géodésique N_1 et q un point de l'hypersurface N_2. Soit $B(q)$ la boule géodésique dans N_2 de rayon 1. Supposons que $N_1 \cap N_2 = \phi$.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $d_M(p,q) \leq \varepsilon$ il existe un unique point $\bar{q} \in B(q)$ minimisant la distance de p aux points de B.

Au voisinage d'un tel point p la projection locale de N_1 sur N_2 est bien définie.

Montrons d'abord que la géodésique N_1 ne peut être asymptote à l'hypersurface N_2.

Il existe donc une paire de points $p_0 \in N_1, q_0 \in N_2$ tels que :

- $d(p_0, q_0) \leq \varepsilon$;
- (p_0, q_0) n'est pas une paire critique.

Paramétrons N_1 par la longueur de l'arc t. Soit $p(t)$ cette paramétrisation de N_1. Nous pouvons la choisir de sorte que la distance $\ell(t)$ de $p(t)$ à sa projection locale $q(t)$ sur N_2 soit une fonction décroissante. Cela est en effet possible au voisinage de p_0. La seule obstruction serait la rencontre d'un point $p(t)$ tel que le couple $p(t), q(t)$ soit critique pour la fonction distance. Par construction ce couple ne peut être un maximum local ce qui nous permettrait d'appliquer le LEMME 1.1.

Montrons que la distance $\ell(t)$ doit satisfaire une inégalité différentielle qui impliquera que $\ell(t)$ doit s'annuler en un temps fini.

Notons γ_t et paramétrons proportionnellement à la longueur de l'arc la géodésique minimisante joignant $q(t)$ à $p(t)$.

Nous pouvons imposer :

1) domaine $\gamma_t = \{s \in \{0, l_0\}\}$ pour tout t ;

2) $\|\mathrm{d}\gamma_t/\mathrm{d}s(s)\|$ indépendant de s ;

3) $\gamma_t(0) = q(t)$ et $\gamma_t(l_0) = p(t)$.

Notons $\gamma(t,s) = \gamma_t(s)$, imposons encore

$$\|\partial\gamma/\partial t\ (0,0)\| = 1 = \|\partial\gamma/\partial s(0,0)\|.$$

Nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = \int_0^{\ell_0} \Big\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\gamma}{\partial s} \Bigm| \frac{\partial\gamma}{\partial s}\Big\rangle \Big\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s} \Bigm| \frac{\partial\gamma}{\partial s}\Big\rangle^{-1/2} \mathrm{d}s,$$

où D désigne la dérivée covariante dans la variété riemannienne M.

Comme $D/\partial t\ \partial\gamma/\partial s = D/\partial\ \partial\gamma/\partial t$, nous obtenons après une intégration par parties :

$$\frac{d\ell}{dt} = \int_0^{\ell_0} \Big\|\frac{\partial\gamma}{\partial s}\Big\|^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t} \Bigm| \frac{\partial\gamma}{\mathrm{d}s}\Big\rangle \,\mathrm{d}s - \int_0^{\ell_0} \Big\|\frac{\partial\gamma}{\partial s}\Big\|^{-1} \Big\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t} \Bigm| \frac{D}{\partial s}\frac{\partial\gamma}{\partial s}\Big\rangle \,\mathrm{d}s.$$

Ceci montre que, puisque $\partial\gamma/\partial t(0,0)$ est tangent à N_2 et donc orthogonal à $\partial\gamma/\partial s$, on a lorsque $t = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}(0) = \Big\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}(\ell_0, 0) \Bigm| \frac{\partial\gamma}{\partial s}(\ell_0, 0)\Big\rangle.$$

Afin d'estimer la dérivée seconde $\mathrm{d}^2\ell/\mathrm{d}t^2$ nous allons utiliser une autre variation $\bar\gamma(s,t)$ satisfaisant :

$$(*)\qquad \begin{cases} \bar\gamma(0,s) = \gamma(s), \\ \bar\gamma(\ell_0, t) = \gamma(\ell_0, t) = p(t), \\ \bar\gamma(t, 0) \in N_2. \end{cases}$$

Notons $\bar\ell(t)$ la longueur de l'arc $\bar\gamma_t$:

$$\bar\ell(t) = \int_0^{l_0} \Big\|\frac{\partial\gamma}{\partial s}(t,s)\Big\| \,\mathrm{d}s.$$

La variation $\bar\gamma_t$ satisfait :

$$\frac{\mathrm{d}\bar\ell}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}(0).$$

Comme $q(t)$ est la projection locale de $p(t)$, pour toute variation $\bar\gamma$ satisfaisant (*) nous aurons $\ell(t) \le \bar\ell(t)$ et donc en particulier :

$$\frac{\mathrm{d}^2\ell}{(\mathrm{d}t)^2}(0) \le \frac{\mathrm{d}^2\bar\ell}{(\mathrm{d}t)^2}(0).$$

Soit $V(\ell_0)$ le vecteur $\mathrm{d}/\mathrm{d}t\, p(0)$. Notons $\widetilde{V}(d)$ la projection orthogonale de $V(d)$ sur l'hyperplan $\tau_\gamma(T_q N_2)$. Posons

$$X(\ell_0) = \widetilde{V}(\ell_0) + \sin\theta\, \frac{\partial \gamma_0(\ell_0)}{\partial s} \qquad \Bigl(\text{on a } \sin\theta = \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}(0)\Bigr).$$

Notons $\widetilde{V}(s)$ le champ obtenu par transport parallèle de $\widetilde{V}(d)$ le long de γ_0. Nous en déduisons un champ (non parallèle) le long de γ défini par :

$$V(s) = \widetilde{V}(s) + \frac{\alpha s}{\ell_0}\, \frac{\partial \gamma_0}{\partial s}(s).$$

La définition de $V(s)$ est cohérente avec la définition antérieure de $V(\ell_0)$; en outre $V(0)$ est tangent en q à N_2.

Considérons une variation $\bar{\gamma}(t,s)$ satisfaisant

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\gamma}(0,s) = V(s).$$

Puisque la variation $\bar{\gamma}$ satisfait (*), nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\bar{\ell}}{(\mathrm{d}t)^2} = -\int_0^{\ell_0} \Bigl\langle \frac{\partial V}{\partial s} \Bigm| \frac{\partial \gamma}{\partial s}\Bigr\rangle^2 \Bigl\| \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}\Bigr\|^{-3} \mathrm{d}s &\\ + \int_0^{\ell_0} \Bigl\langle \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \Bigm| \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}\Bigr\rangle \Bigl\| \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}\Bigr\|^{-1} \mathrm{d}s &\\ + \int_0^{\ell_0} \Bigl\| \frac{\partial V}{\partial s}\Bigr\|^2 \Bigl\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}\Bigr\|^{-1} \mathrm{d}s.&\end{aligned}$$

En utilisant la formule

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} = \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} + R\Bigl(\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}\Bigr)\Bigl(\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}\Bigr)$$

et une intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\bar{\ell}}{(\mathrm{d}t)^2}(0) = \int_0^{\ell_0} \Bigl\| \frac{\partial V}{\partial s}\Bigr\|^2 - \Bigl\langle \frac{\partial V}{\partial s} \Bigm| \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}\Bigr\rangle^2 \mathrm{d}s &\\ - \int_0^{\ell_0} K\Bigl(V, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}\Bigr)\mathrm{d}s + \Bigl\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \Bigm| \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}\Bigr\rangle \Bigr|_0^{\ell_0}.&\end{aligned}$$

Comme N_2 est totalement géodésique, le vecteur $D/\partial t\ \partial\bar{\gamma}/\partial t\,(0)$ est contenu dans $T_{q(t)}N_2$ et donc $\langle D/\partial t\ \partial\bar{\gamma}/\partial t\,(0) \mid \partial\gamma/\partial s\rangle = 0$.

Par ailleurs N_1 étant une géodésique paramétrée par la longueur de l'arc nous avons $\langle D/\partial t\, \partial\bar{\gamma}/\partial t(\ell_0) \mid \partial\gamma/\partial s(\ell_0)\rangle = 0$.

Nous en déduisons :

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{\ell}(0)}{(\mathrm{d}t)^2} = -\int_0^{\ell_0} K\Big(V, \frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial s}\Big)\,\mathrm{d}s$$

puisque la composante suivant $\tau_\gamma(T_q N_2)$ de $\widetilde{V}(s)$ est par construction parallèle.

Nous en déduisons que la fonction $\ell(t)$ est concave puisque

$$\frac{\mathrm{d}^2\ell}{(\mathrm{d}t)^2}(0) = \frac{\mathrm{d}^2\bar{\ell}}{(\mathrm{d}t)^2} \leq 0$$

et donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $d_M(p,q) \leq \varepsilon$, avec q projection locale de p sur N_2, le transporté parallèle le long de l'arc géodésique de longueur inférieure à ε joignant p à q de la droite T_pN_1 fait un angle inférieur à $\frac{1}{100}$ avec T_qN_2.

On en déduit maintenant, en partant de points (p_0, q_0) tels que $d(p_0,q_0) < \varepsilon$ et $|\mathrm{d}\ell/(\mathrm{d}t)(0)| = |\mathrm{d}\bar{\ell}/(\mathrm{d}t)(0)| \leq \mathrm{tg}\big(\frac{1}{100}\big)\cdot \ell$, que

$$\frac{\mathrm{d}^2\ell}{(\mathrm{d}t)^2}(0) = \frac{\mathrm{d}^2\bar{\ell}}{(\mathrm{d}t)^2}(0) \leq -\tfrac{1}{2}C\ell,$$

et où C est la borne inférieure sur M de la courbure sectionnelle, puisque la norme de V est supérieure ou égale à $\cos(\frac{1}{100})$.

Cette inégalité permet par comparaison avec les solutions de l'équation $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -\frac{1}{2}Cx$ de conclure que ℓ doit s'annuler en un temps fini.

Pour terminer la démonstration du THÉORÈME 1.3 il faut montrer que la fonction distance $N_1 \times N_2 \to \mathbb{R}_+$ ne peut avoir une borne inférieure non nulle sans contredire les résultats du paragraphe 1.

Nous savons déjà (§ 1) que cette borne ne peut être atteinte.

Remarque 3.2. — Une suite de sous-variétés totalement géodésiques V_n contenant chacune un disque de rayon R centré en un point x_n telles que les 1-jets $J^1(V_n, x_n)$ convergent, converge vers une sous-variété totalement géodésique V passant par $x = \lim x_n$.

Démonstration. — Les applications $\exp_{x_n}$ convergent uniformément sur les boules $B(0,R)$. L'existence de deux suites $x_n \in N_1, y_n \in N_2$ telles que $d(x_n,y_n) \to d = d(N_1,N_2)$ permettrait donc d'extraire deux sous-suites $\bar{x}_p, \bar{y}_p$ convergentes telles que les 1-jets $J^1_{\bar{x}_p}N_1$ et $J^1_{\bar{y}p}N_2$ convergent. La géodésique $\overline{N}_1$ passant par $\bar{x} = \lim \bar{x}_p$ limite de N_1 et l'hypersurface $\overline{N}_2$ passant par $y = \lim y_n$, limite de N_2 satisfont encore

$$d(\overline{N}_1, \overline{N}_2) \geq d = d(x, y)$$

ce qui contredit le LEMME 1.1. Ceci termine la démonstration du THÉORÈME 1.3.

Remarque 3.3. — Si V_n est une suite de géodésiques contenant chacune un segment de rayon R centré en x_n, x_n suite convergente, les 1-jet $J^1(V_n, x_n)$ convergent. L'adhérence d'une sous-variété totalement géodésique complète plongée dans une variété riemannienne complète est donc une lamination géodésique.

En courbure positive le seul cas non couvert par le théorème de Myers est celui des géodésiques d'une surface.

De la Remarque 3.3 et du THÉORÈME 1.3 on en déduit donc le :

COROLLAIRE 3.4. — *Une géodésique plongée d'une surface compacte de courbure sectionnelle strictement positive est compacte.*

BIBLIOGRAPHIE

[CLS] CAMACHO (C.), LINS NETO (A.) and SAD (P.). — *Minimal sets of foliations on complexe projective spaces*, Preprint 1988.

[Car] DO CARMO (M.). — *Geometria Riemanniana.* — Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.

[Fr] FRANKEL (T.). — *On the fundamental group of a compact minimal submanifold*, Ann. of Math., t. **83**, 1966, p. 68–73.

[Ha] HADAMARD (J.). — *Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique*, J. Math. Pures Appl., série 5, t. **3**, 1897 p. 331–387.

[Sc] SCHOEN (R.). — *Estimates for stable minimal surfaces in three dimensional manifolds*, Ann. of Math. Stud., vol. 103, 1983, p. 111–126.