

BULLETIN DE LA S. M. F.

PHILIPPE DU BOIS

FRANÇOISE MICHEL

Filtration par le poids et monodromie entière

Bulletin de la S. M. F., tome 120, n° 2 (1992), p. 129-167

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_2_129_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_2_129_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FILTRATION PAR LE POIDS ET MONODROMIE ENTIÈRE

PAR

PHILIPPE DU BOIS ET FRANÇOISE MICHEL (*)

RÉSUMÉ. — Soit $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe ayant une singularité isolée en l'origine et F la fibre de Milnor associée. Nous munissons la cohomologie et l'homologie entières de F d'une filtration M de longueur 3 par des sous $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules. La construction de M est de nature topologique et nous donnons des matrices de présentation (à coefficients dans $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$) des gradués de M . De plus, nous montrons que la tensorisée par \mathbb{Q} de la filtration M sur la cohomologie de F coïncide avec la filtration par le poids de la structure de Hodge mixte.

ABSTRACT. — Let $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ be the germ of an holomorphic function which is singular at the origin and F the associated Milnor fiber. We equip the cohomology and the homology of F on \mathbb{Z} with a filtration M of length 3 by sub $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules. The construction of M is naturally topological and we give presentation matrices (with coefficients in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$) of the graduates of M . Furthermore, we show that, once tensorised by \mathbb{Q} , the filtration M on the cohomology of F is none other than the weight filtration of the mixed Hodge structure.

Introduction

Convention : on notera B_r^{2n} la boule fermée de centre 0 et de rayon r dans \mathbb{C}^n et S_r^{2n-1} le bord ∂B_r^{2n} de B_r^{2n} . Soit $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe ayant une singularité isolée en l'origine. D'après J. MILNOR (cf. [M]), il existe $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ suffisamment petits pour que f induise sur $(B_\varepsilon^4 \cap f^{-1}(B_\eta^2 \setminus \{0\}))$ une fibration localement triviale. Posons $Y = B_\varepsilon^4 \cap f^{-1}(B_\eta^2)$, et soit $\pi : X \rightarrow Y$ la restriction à l'image inverse de Y d'une résolution de f . Choisissons z dans S_η^1 et appelons *fibre de Milnor*

(*) Texte reçu le 25 novembre 1989, révisé le 14 mai 1991.

Philippe Du BOIS, Département de Mathématiques, Université d'Angers, 2 Boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01.

Françoise MICHEL, Département de Mathématiques, Université de Nantes, 2 rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 03.

Classification AMS : 14, 14B05, 14C30, 14H20, 32, 32B10, 32B20, 32C40, 57M25, 57R45, 57R70.

de f la variété $F = \pi^{-1}(B_\varepsilon^4 \cap f^{-1}(z))$. L'action de la monodromie munit la cohomologie et l'homologie entières de F d'une structure de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module.

Dans ce travail, nous munissons la cohomologie et l'homologie entières de F d'une filtration M de longueur 3 par des sous $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules. La construction de M est de nature topologique et son caractère explicite permet de donner des matrices de présentation des gradués de M à coefficients dans $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. De plus, nous montrons que la tensorisée par \mathbb{Q} de la filtration M sur la cohomologie de F coïncide avec la filtration par le poids de la structure de Hodge mixte construite par J. STEENBRINK (cf. [S1] et [S2]).

Exposons plus précisément nos résultats.

La théorie de Hodge mixte s'introduit dans notre situation via le diviseur D_+ dont la définition est maintenant classique : notons E_i les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel $E_+ = \pi^{-1}(0)$ de la résolution π . Désignons par e_i la multiplicité de E_i et soit e le ppcm des e_i . Notons X' la normalisation du produit fibré $X \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}'$, où \mathbb{C}' est une copie de \mathbb{C} et où $z \mapsto z^e$ est l'application de \mathbb{C}' vers \mathbb{C} . Par définition, $D_+ = \rho^{-1}(E_+)$, où ρ est le morphisme naturel de X' vers X .

Nous construisons une monodromie h sur F et l'étendons en un difféomorphisme de X qui se relève en un difféomorphisme H sur X' . La restriction de H à chaque composante $D_i = \rho^{-1}(E_i)$ de D_+ est un générateur du groupe des automorphismes du revêtement ramifié induit par ρ de D_i sur E_i . Le théorème suivant nous permettra de comparer les structures algébriques de D_+ avec les structures topologiques de F :

THÉORÈME 3.7. — *Il existe une application continue et surjective $q : F \rightarrow D_+$ telle que :*

- 1) $qh(x) = Hq(x)$ pour tout x dans F ;
- 2) q est un difféomorphisme au-dessus de l'ensemble $\overset{\circ}{D}_+$ des points lisses de D_+ ;
- 3) au-dessus des points doubles de D_+ , q est une fibration en cercles.

Nous pouvons maintenant décrire la filtration M sur l'homologie de F . Soient $F_i = q^{-1}(D_i)$ et $C = \bigcup_{i,j} (F_i \cap F_j) \cup \partial F$. Nous obtenons une filtration M de $H_1(F, \mathbb{Z})$ en posant :

- $M_{-2}H_1(F) =$ image de $H_1(C, \mathbb{Z})$ par l'homomorphisme induit par l'inclusion ;
- $M_{-1}H_1(F) =$ image de $\bigoplus_i H_1(F_i, \mathbb{Z})$ par l'homomorphisme de Mayer-Vietoris ;
- $M_{-3}H_1(F) = 0$ et $M_0H_1(F) = H_1(F, \mathbb{Z})$.

THÉORÈME 2.2. — *La filtration M est une filtration de $H_1(F, \mathbb{Z})$ par des sous $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules. Les gradués de M sont sans \mathbb{Z} -torsion et M ne dépend que de la topologie de f .*

Nous définissons ensuite (cf. 3.9) une filtration croissante, encore notée M , de $H^1(F, \mathbb{Z})$ par des sous $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules, dont les gradués sont sans torsion. Nous montrons que cette filtration est duale par $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Z})$ de la précédente. Soit W la filtration par le poids usuelle de $H^1(D_+, \mathbb{Z})$. Nous démontrons :

THÉORÈME 4.3. — *L'image par q^* de $W_i H^1(D_+, \mathbb{Q})$ est, pour $i = 0$ ou 1 , égale à $M_i H^1(F) \otimes \mathbb{Q}$.*

D'autre part, nous considérons la structure de Hodge mixte sur $H^1(F)$ construite par J. STEENBRINK et nous démontrons :

THÉORÈME 4.8. — *La filtration sur $H^1(F, \mathbb{K})$ déduite de la filtration M par tensorisation par $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{C} coïncide avec la filtration W de la structure de Hodge mixte.*

L'intérêt de la filtration M réside dans le fait qu'elle est plus fine, puisque construite sur les entiers et cependant plus simple et plus explicite pour les calculs. En particulier, on obtient aisément le résultat suivant :

PROPOSITIONS 2.5, 3.14 et 6.2. — *Les $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules $\text{Gr}_0^M H^1(F)$ et $\text{Gr}_2^M H^1(F)/\text{Ker}(1-t)$ sont isomorphes. De plus, 1 n'est pas valeur propre de la monodromie sur $M_1 H^1(F)$.*

Notre construction dépendant du choix d'une fibre de Milnor, nous ne pouvons pas espérer obtenir une filtration de Hodge F^\bullet fonctorielle sur $H^1(F, \mathbb{C})$. On peut cependant transporter par q^* la filtration F de $H^1(D_+, \mathbb{C})$ sur $M_1 H^1(F) \otimes \mathbb{C}$, et ceci permet de calculer le $\text{Gr}_F^0 H^1(F, \mathbb{C})$ indépendamment des choix (voir PROPOSITION 4.12 et COROLLAIRE 4.14).

Nous donnons ensuite des matrices de présentation des $\text{Gr}_i^M H^1(F)$ pour $i = 0$ (voir chapitre 5) et pour $i = 2$ (voir chapitre 6). Donnons à titre d'exemple un énoncé intermédiaire :

PROPOSITION 5.2. — *$\text{Gr}_0^M H^1(F)$ admet la présentation suivante : pour tout (i, j) tel que $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, on prend un générateur x_{ij} , et on a les relations $(t^{m_{ij}-1})x_{ij} = 0$ et pour tout i la relation*

$$\sum_j ((t^{m_{ij}} - 1)/(t^{r_i} - 1))x_{ij} = 0,$$

où l'on somme sur les j tels que $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ et où m_{ij} est le pgcd de e_i et e_j , et r_i le pgcd de e_i et des e_j tels que $E_i \cap E_j \neq \emptyset$.

Exemple 5.11.1. — On considère la singularité à 7 branches dont les branches ont pour développement de Puiseux :

$$y_n = x + x^{25/12} + n \cdot x^{79/36}, \quad \text{où } n = 1, 2, 3;$$

$$y_k = 2x + x^{13/6} + k \cdot x^{29/12}, \quad \text{où } k = 1, 2, 3, 4.$$

On trouve

$$\mathrm{Gr}_0^M H^1(F) \simeq \mathbb{Z}[t, t^{-1}] / \left(\frac{t^{12} - 1}{t - 1} \times \frac{t^9 - 1}{t^3 - 1} \times \frac{t^8 - 1}{t^4 - 1} \right),$$

et ce module est indécomposable ;

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_2^M H^1(F) \simeq \mathbb{Z}[t, t^{-1}] / \left((t^{12} - 1) \times \frac{t^9 - 1}{t^3 - 1} \times \frac{t^8 - 1}{t^4 - 1} \right) \\ \oplus (\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(t - 1))^5. \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.10.2. — $\mathrm{Gr}_1^M H^1(F)$ est isomorphe à la somme directe des $H^1(D_i)$ pour $i > 0$.

Bien que notre méthode permette aussi de calculer une présentation du $\mathrm{Gr}_1^M H^1(F)$ (ceci fera l'objet d'un travail ultérieur), nous ne donnons ici qu'une famille d'exemples calculés à partir de (cf. [M.W1]). Ceci suffit pour démontrer que, comme on pouvait le prévoir, le Gr_1^M distingue des singularités ayant le même $\mathrm{Gr}_1^M \otimes \mathbb{Q}$.

Exemple 7.4. — Si $f(x, y) = (x^{44} - y^{21})(x^{11} - y^{14})$, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_1^M H^1(F) \simeq \mathbb{Z}[t, t^{-1}] / ((t^{21 \times 55} - 1)/(t^{55} - 1)) \\ \oplus \mathbb{Z}[t, t^{-1}] / ((t^{11 \times 35} - 1)/(t^{35} - 1)). \end{aligned}$$

Si $g(x, y) = (x^{22} - y^7)(x^{33} - y^{28})$, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_1^M H^1(F) \simeq \mathbb{Z}[t, t^{-1}] / ((t^{7 \times 55} - 1)/(t^{55} - 1)) \\ \oplus \mathbb{Z}[t, t^{-1}] / ((t^{33 \times 35} - 1)/(t^{35} - 1)). \end{aligned}$$

Ces deux modules ne sont pas $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ isomorphes et leurs tensorisés par \mathbb{Q} sont $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ isomorphes.

Nous remercions vivement pour les conversations stimulantes que nous avons eu avec eux pendant la préparation de cet article V. FRANJOU, P. VOGEL et tout spécialement C. WEBER, à qui nous devons les singularités étudiées dans les exemples 5.11 et 6.7.

1. Résolution et monodromie

1.1. — Soit $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe réduit. Soit \mathcal{U} un voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^2 et soit $\pi : W \rightarrow \mathcal{U}$ une résolution de f en l'origine obtenue par un nombre fini d'éclatements de points. Par définition, $E_+ = \pi^{-1}(0)$ est le *diviseur exceptionnel* de π et l'adhérence \tilde{E}_0 du complémentaire de E_+ dans $\pi^{-1}(f^{-1}(0) \cap \mathcal{U})$ est la *transformée stricte* de $f^{-1}(0)$. Notons E_i , pour $i \in \{1, \dots, k\}$, les composantes irréductibles de E_+ ; deux composantes irréductibles de E_+ sont soit disjointes, soit transverses et dans ce dernier cas elles se coupent en un seul point. Un point de E_+ est lisse s'il n'appartient qu'à une seule composante irréductible. On appellera *curvette de E_i* un germe de courbe lisse transverse à E_i en un point lisse de E_+ . Choisissons un voisinage ouvert de E_i qui soit un fibré en disques de base E_i , nous appellerons *fibres de E_i* les fibres de ce fibré en un point lisse de E_+ ; en particulier, les fibres de E_i sont des curvettes de E_i .

Pour tout $i \geq 1$, on appellera *multiplicité de E_i* l'ordre e_i de $f \circ \pi$ sur une fibre de E_i .

On notera b le nombre de branches de f . Si \mathcal{U} est assez petit, \tilde{E}_0 est donc composé de b courbes lisses transverses à E_+ en des points lisses de E_+ . Comme on a supposé f réduite, la multiplicité e_0 de chaque composante de \tilde{E}_0 est égale à un.

1.2 Description de la fibre de Milnor dans la résolution.

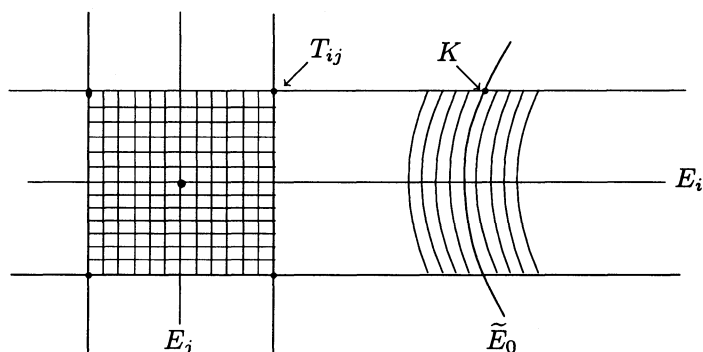
D'après J. MILNOR [M], il existe $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et $\eta' > 0$ assez petit par rapport à ε tels que pour tout η tel que $0 < \eta \leq \eta'$, f définisse une fibration localement triviale de $(B_\varepsilon^4 \cap (f^{-1}(B_\eta^2 \setminus \{0\})))$ sur $B_\eta^2 \setminus \{0\}$ dont la classe d'isomorphisme ne dépend pas de ε . Choisissons de plus η suffisamment petit pour que si $z \in \mathbb{C}$ et $|z| = \eta$, la variété $F_z = \pi^{-1}(f^{-1}(z) \cap B_\varepsilon^4)$ soit transverse aux fibres des composantes de E_+ en dehors d'un petit voisinage de \tilde{E}_0 . Posons :

$$\begin{aligned} F &= F_z, & X &= \pi^{-1}(f^{-1}(B_\eta^2) \cap B_\varepsilon^4), \\ F_0 &= \pi^{-1}\left(S_\varepsilon^3 \cap \bigcup_{0 \leq t \leq 1} f^{-1}(tz)\right), & E_0 &= \tilde{E}_0 \cap X. \end{aligned}$$

Il est clair que X est un voisinage fermé de E_+ dans W , et on déduit de [M] que son bord ∂X est difféomorphe à S^3 . Nous dirons que F est "la" fibre de Milnor de f . Le bord de F est égal à $F \cap F_0$ et est isotope au bord K de $F \cup F_0$. Par définition, K est l'entrelacs de f dans le bord de X .

Soit de plus \mathcal{U}_0 la réunion des curvettes Δ des E_i (avec $E_i \cap \tilde{E}_0 \neq \emptyset$) telles que $\pi(\Delta \cap \partial X) \subset S_\varepsilon^3 \cap f^{-1}(B_\eta^2)$. Remarquons que $\pi(\mathcal{U}_0 \cap \partial X) = S_\varepsilon^3 \cap f^{-1}(B_\eta^2)$. De plus, \mathcal{U}_0 est un voisinage fermé de E_0 dans X , difféomorphe à une réunion de polydisques.

1.3. — Comme dans [L.M.W.], nous construisons une variété \bar{X} de la façon suivante : pour tout $i \geq 1$, soit \bar{X}_i un fibré en disques réels de base E_i isomorphe à un voisinage fermé de E_i dans X . Notons \bar{X} la variété obtenue après avoir effectué les plombages des variétés \bar{X}_i au voisinage des points non lisses de E_+ . Pour tout point non lisse de E_+ , $P_{ij} = E_i \cap E_j$, notons \bar{B}_{ij} le polydisque de plombage. Par définition, le *tore de plombage* pour P_{ij} est l'intersection de \bar{B}_{ij} avec le bord de \bar{X} . On a donc le dessin suivant :



\mathcal{U}_0 est la partie hachurée, B_{ij} est la partie quadrillée, P_{ij} est le point situé au centre du quadrillage, le tore T_{ij} est représenté par le point indiqué et par les trois points analogues, l'entrelacs K est représenté par le point indiqué et par le point analogue.

On déduit de [B.K, p. 560 et sq.] la proposition suivante :

PROPOSITION 1.4. — *Il existe un difféomorphisme à coins ρ de \bar{X} dans X qui vérifie :*

- i) ρ est l'identité sur E_+ ;
- ii) $\rho^{-1}(E_0)$ est une réunion de fibres des fibrés \bar{X}_i , ces fibres sont situées en dehors des polydisques de plombage de \bar{X} ;
- iii) si Δ est une fibre de E_i , située en dehors de U_0 , $\rho^{-1}(\Delta)$ est une fibre de \bar{X}_i .

1.5. — Nous noterons X_i l'image par ρ de \bar{X}_i , par B_{ij} l'image du polydisque \bar{B}_{ij} et T_{ij} l'image par ρ du tore de plombage associé à

$P_{ij} = E_i \cap E_j$, où $0 < i < j$. Pour $i \geq 1$ et $E_i \cap E_0$ non vide, T_{i0} désignera l'ensemble des tores du bord de X_i tels que $\bigcup_{i>0} T_{i0} = \pi^{-1}(S_\varepsilon^3 \cap f^{-1}(S_\eta^1))$.

DÉFINITIONS 1.6. — Une monodromie de F est un difféomorphisme h de F qui est l'identité sur $F \cap F_0$ et dont le mapping tore sur F , $M = F \times [0, 1]/((x, 0) \sim (h(x), 1))$, soit difféomorphe à $B_\varepsilon^4 \cap f^{-1}(S_\eta^1)$ par un difféomorphisme qui envoie $F \times \{t\}$ sur $(B_\eta^4 \cap f^{-1}(z \cdot \exp(2\pi it)))$. On remarquera que h est bien défini à isotopie près.

Un difféomorphisme h d'une surface F est *quasi-fini* s'il existe une famille finie C de courbes fermées simples sur F et un petit voisinage tubulaire $\mathcal{U}(C)$ de C dans F dont chaque composante connexe est un anneau autour d'une unique courbe de C , tels que

- i) h laisse la famille C invariante;
- ii) h est un difféomorphisme d'ordre fini sur $F \setminus \mathcal{U}(C)$.

1.7 Décomposition de la fibre de Milnor et construction d'une monodromie quasi-finie.

Nous poserons $F_i = F \cap \partial X_i$; on a donc $F = \bigcup_{i>0} F_i$.

L'intersection des fibres de E_i avec le bord de X_i munit celui-ci d'une fibration en cercles. Soit h_i le difféomorphisme de premier retour sur F_i le long des fibres de ∂X_i . L'ordre de h_i est égal à e_i . Nous noterons h_0 le difféomorphisme identité sur F_0 .

Nous prendrons pour famille de courbes $C = \bigcup_{i>j \geq 0} F_i \cap F_j$.

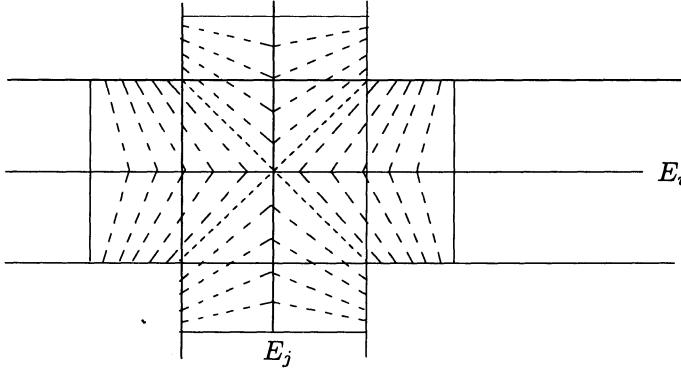
Si E_i rencontre E_j , on notera m_{ij} le pgcd de e_i et de e_j . Si de plus $i > j > 0$, on remarquera que $C_{ij} = F_i \cap F_j$ est constitué de m_{ij} courbes fermées simples de F .

Nous allons maintenant construire le voisinage $\mathcal{U}(C)$ et recoller les difféomorphismes h_i pour $0 \leq i \leq k$. Vu la description de X , nous avons des tores de plombage T_{ij} et des polydisques B_{ij} de plombage pour toute intersection non vide $P_{ij} = E_i \cap E_j$. Pour chaque P_{ij} (avec $k \geq i > j \geq 0$), nous choisissons des disques fermés $I(B_{ij})$ (resp. $J(B_{ij})$), voisinage de $B_{ij} \cap E_i$ (resp. $B_{ij} \cap E_j$) dans E_i (resp. E_j).

Il existe une rétraction par déformation R de X sur $E = E_+ \cup E_0$ telle que :

- i) les tores de plombage sont envoyés sur les points non lisses de E qui leur correspondent;
- ii) si $x \in E_i \setminus \bigcup_{j \neq i} I(B_{ij})$, $R^{-1}(x)$ est la fibre de E_i au point x ;
- iii) si $x \in I(B_{ij}) \setminus P_{ij}$, $R^{-1}(x)$ est une courvette de E_i au point x .

Le dessin suivant convaincra mieux que des formules de l'existence de R (les pointillés indiquent les trajectoires de la rétraction) :



On pose alors

$$V = \bigcup_{i>j\geq 0} \left(R^{-1}(I(B_{ij})) \cup R^{-1}(J(B_{ij})) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}(C) = V \cap F.$$

Recollons les h_i : sur C_{ij} , h permutera les m_{ij} courbes et $h^{m_{ij}}$ sera l'identité; sur le bord des anneaux de $\mathcal{U}(C)$, par exemple sur C_i dans $F_i \cap \partial(\mathcal{U}(C))$, h sera égal à h_i , i.e. $h^{m_{ij}}$ est une rotation; nous prolongeons h du bord de $\mathcal{U}(C)$ au bord de F_i par une isotopie, ce qui est toujours possible, vu que $\mathcal{U}(C) \cap F_i$ est une réunion d'anneaux.

Nous avons ainsi construit sur F une monodromie quasi-finie, qui s'étend par l'identité en un difféomorphisme sur $F \cup F_0$.

Remarque. — Cette monodromie dépend évidemment de la résolution, pour obtenir une monodromie quasi-finie canonique, on prend la résolution minimale, et on procède comme ci-dessus après avoir enlevé des courbes de C inutiles, cf. [L.M.W].

1.8 Monodromie sur X . — Pour tout θ , avec $0 < \theta \leq \eta$, posons $M_\theta = \pi^{-1}(B_\varepsilon^4 \cap f^{-1}(S_\theta^1))$. Les fibres des fibrés X_i munissent $M_\theta \cap (X \setminus V)$ d'une fibration en cercles. Pour tout z avec $|z| = \theta$, nous définissons une monodromie quasi-finie h_z sur $F_z = \pi^{-1}(B_\varepsilon^4 \cap f^{-1}(z))$ en faisant la même construction que celle déjà faite pour h .

Nous définissons une monodromie H sur X de la façon suivante :

- si $x \in \mathcal{U}_0 \cup E_+$, on pose $H(x) = x$;
- si $x \in X \setminus (\mathcal{U}_0 \cup E_+)$, $z = f \circ \pi(x)$ n'est pas nul, et on pose $H(x) = h_z(x)$.

Remarque. — La restriction de H à $(X \setminus E)$ est une monodromie pour la fibration localement triviale $f \circ \pi : X \setminus E \rightarrow B_\eta^2 \setminus \{0\}$.

1.9 L'arbre de résolution. — La topologie de la singularité de f est déterminée par la donnée de l'arbre pondéré $A(E)$ que l'on construit à partir de la résolution π de la façon suivante : chaque sommet de $A(E)$ représente une composante E_i de E_+ , notons (i) ce sommet, deux sommets (i) et (j) sont reliés par une arête, notée (ij), lorsque E_i intersecte E_j ; à chaque sommet (i) on ajoute b_i flèches où b_i est le nombre de branches de E_0 qui rencontrent E_i . On pondère le sommet (i) par la multiplicité e_i de E_i .

Par définition, la *valence* k_i d'un sommet (i) de l'arbre $A(E)$ est égale à la somme du nombre d'arêtes et du nombre de flèches qui rencontrent le sommet (i), on a donc :

$$b_i = \text{card}(E_i \cap E_0) \quad \text{et} \quad k_i = \text{card}\left(E_i \cap \bigcup_{j \neq i} E_j\right).$$

D'autre part, on posera $r_i = \text{pgcd}(E_j \mid E_i \cap E_j \neq \emptyset)$.

1.10. — Pour tout $i \geq 0$, nous noterons $\overset{\circ}{F}_i$ l'intérieur de F_i et $\overset{\circ}{E}_i = E_i \setminus (E_i \cap \bigcup_{j \neq i} E_j)$.

Désignons par v la restriction de la rétraction par déformation R à F , et par v_i sa restriction à $\overset{\circ}{F}_i$; par construction, $v_i : \overset{\circ}{F}_i \rightarrow \overset{\circ}{E}_i$ est un revêtement régulier d'ordre e_i et le difféomorphisme d'ordre fini h_i de $\overset{\circ}{F}_i$ est un générateur du groupe de Galois du revêtement. Comme h_i est (modulo une isotopie sur un petit col du bord de $\overset{\circ}{F}_i$) la restriction de la monodromie h à $\overset{\circ}{F}_i$, nous conviendrons de dire que h_i est la monodromie de $\overset{\circ}{F}_i$. La topologie des variétés à bord F_i est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 1.11.

- i) Le nombre de composantes connexes de F_i est r_i si $i > 0$;
- ii) F_0 est une réunion disjointe de b anneaux (b est le nombre de branches de f) ;
- iii) si $k_i = 1$, F_i est une réunion de disques, si $k_i = 2$, F_i est une réunion d'anneaux.

Démonstration. — Le revêtement $v_i : \overset{\circ}{F}_i \rightarrow \overset{\circ}{E}_i$ est défini par la donnée d'un morphisme de groupes $\zeta_i : H_1(\overset{\circ}{E}_i) \rightarrow \mathbb{Z}/e_i\mathbb{Z}$, le nombre de composantes connexes de $\overset{\circ}{F}_i$ est l'indice de l'image du morphisme ζ_i , et cette image est engendrée par les m_{ij} pour $E_i \cap E_j$ non vide. Ceci donne le point i), car le pgcd des m_{ij} est r_i .

Comme F_0 est un col autour de ∂F , le point ii) est clair. Si $i > 0$, $\overset{\circ}{E}_i$ est difféomorphe à une sphère S^2 avec k_i trous. L'intérieur $\overset{\circ}{F}_i$ de la surface à bord F_i est un revêtement régulier de $\overset{\circ}{E}_i$, ceci donne iii).

2. Filtration sur l'homologie entière de la fibre de Milnor

Dans tout ce chapitre, on notera $H_*(\cdot)$ pour $H_*(\cdot, \mathbb{Z})$.

2.1. — Nous considérons la décomposition de F en la réunion des F_i , où $0 < i \leq k$, décrite dans le paragraphe précédent, et l'ensemble des courbes fermées simples $C = \bigcup_{i>j \geq 0} F_i \cap F_j$. Posons de plus $C_+ = \bigcup_{i>j > 0} F_i \cap F_j$. Notons u l'homomorphisme de $H_1(C)$ dans $H_1(F)$ induit par l'inclusion de C dans F . Vu la construction de la monodromie h faite en 1.7, les morceaux F_i de F sont laissés invariants par h . Nous munissons donc $H_1(F)$, $H_1(F_i)$ (pour tout i tel que $0 < i \leq k$) et $H_1(C_+)$ de la structure de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module induite par h . La suite de Mayer-Vietoris suivante est donc une suite exacte de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules :

$$0 \rightarrow H_1(C_+) \xrightarrow{w} \bigoplus_{i>0} H_1(F_i) \xrightarrow{s} H_1(F) \rightarrow H_0(C_+),$$

où s est la somme des homomorphismes s_i induits par l'inclusion des F_i dans F , et où w est obtenue de la façon suivante : si γ_{ij} est une courbe de $F_i \cap F_j$, avec $i > j \geq 0$, nous convenons de munir γ_{ij} de l'orientation induite par F_j sur son bord ; notons $[\gamma_{ij}]$ la classe d'homologie de γ_{ij} , on pose alors $w([\gamma_{ij}]) = u_j([\gamma_{ij}]) - u_i([\gamma_{ij}])$, où u_i et u_j sont les homomorphismes induits par l'inclusion. Nous posons :

$$M_{-2}H_1(F) = u\left(H_1(C)\right) = u\left(\bigoplus_{i>j \geq 0} H_1(F_i \cap F_j)\right),$$

$$M_{-1}H_1(F) = s\left(\bigoplus_{i \geq 0} H_1(F_i)\right), \quad M_0H_1(F) = H_1(F).$$

Par construction, M_{-2} , M_{-1} et M_0 sont des sous- $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules de $H_1(F)$.

THÉORÈME 2.2. — *Les formules ci-dessus définissent une filtration croissante sur $H_1(F, \mathbb{Z})$. Cette filtration est compatible avec la monodromie et les gradués de M sont sans \mathbb{Z} -torsion. De plus, la filtration M ne dépend que de la topologie de f .*

Démonstration. — Vérifions d'abord que M_{-1} contient M_{-2} . Ce dernier est engendré par les $u([\gamma_{ij}])$, où γ_{ij} est une courbe de $F_i \cap F_j$ et on a $u([\gamma_{ij}]) = s(u_i([\gamma_{ij}]))$, d'où le résultat indiqué.

Montrons maintenant que les gradués de M sont sans torsion. Le cas du Gr_{-2}^M est clair. Soit G_i la surface close obtenue en rebouchant F_i , i.e. en ajoutant à F_i un disque sur chaque composante du bord de F_i . On voit facilement que $\text{Gr}_{-1}^M H_1(F)$ est la somme directe des $H_1(G_i)$, ces derniers sont sans torsion, il en est donc de même pour Gr_{-1}^M . D'après la suite exacte de Mayer-Vietoris donnée en 2.1, $\text{Gr}_0^M H_1(F)$ est un sous-module de $H_0(C_+)$, il est donc sans torsion.

Le type topologique de f fixe la classe d'isotopie de la monodromie. En 1.6 et 1.7 nous avons construit une monodromie quasi-finie h . Soit h^\sim un difféomorphisme quasi-fini isotope à h ayant un système de courbes de recollement C^\sim de cardinal minimum. Soit $F = \bigcup F_i^\sim$ la décomposition de F stable par h^\sim telle que $C^\sim = \bigcup (F_i^\sim \cap F_j^\sim)$. Posons :

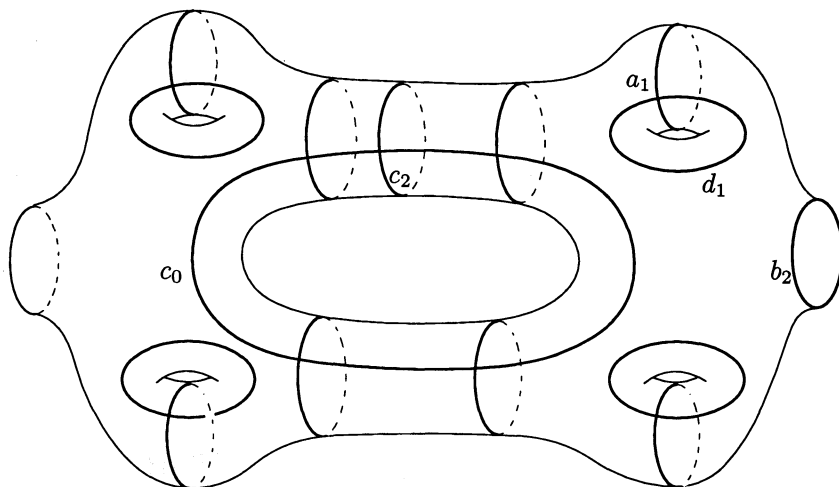
$$M_{-2}^\sim = u(H_1(C^\sim \cup \partial F)) \quad \text{et} \quad M_{-1}^\sim = s\left(\bigoplus H_1(F_i^\sim)\right).$$

D'après W. THURSTON, ou en utilisant les résultats de K. JOHANSSON, W. JACO et P. SHALEN (voir [J.S, p. 169]) sur les variétés de dimension 3 de F. WALDHAUSEN, nous savons que la classe d'isotopie de C^\sim dans F ne dépend que de la classe d'isotopie de h . Il nous reste donc à montrer que $M_i^\sim = M_i$, où $i = -2, -1$. Dans [L.M.W, 2.6], on montre que C^\sim est obtenu à partir de C de la façon suivante : si f est lisse ou possède un point double ordinaire en l'origine, $C = \partial F$ et C^\sim est vide. Sinon, il existe des F_i tels que la valence k_i définie en 1.9 soit supérieure ou égale à 3. On construit des morceaux F_i^\sim de F en faisant la réunion des F_i où $k_i \geq 3$ avec des morceaux F_j voisins tels que $k_j = 1$ ou 2. On pose ensuite $C^\sim = \bigcup (F_i^\sim \cap F_j^\sim)$, où la réunion est prise sur les i et j tels que $k_i \geq 3$ et $k_j \geq 3$.

D'après 1.1, F_i est une réunion de disques lorsque $k_i = 1$ et une réunion d'anneaux lorsque $k_i = 2$. Par suite, si γ est une courbe de $C \setminus (\partial F \cup C^\sim)$, soit γ borde un disque dans F , soit γ est une composante de bord d'un anneau dans F dont l'autre composante de bord se trouve dans C^\sim . Ceci implique que $u(H_1(C^\sim \cup \partial F)) = M_{-2}$. Pour les mêmes raisons, si $k_i = 1$, $H_1(F_i) = 0$ et si $k_i = 2$, le groupe $u(H_1(F_i))$ est engendré par des cycles homologues à des courbes de C^\sim et donc $s(\bigoplus_{k_i \geq 3} H_1(F_i^\sim)) = M_{-1}$.

Exemple 2.3. — Considérons l'exemple classique de N. A'CAMPO, $f(x, y) = (x^2 - y^3) \cdot (x^3 - y^2)$. La décomposition $F = \bigcup_{0 \leq i \leq 5} F_i$ de la fibre de Milnor associée à f présente l'aspect suivant (cf. [B.K, p. 566]). Les composantes F_4 et F_5 sont constituées de cinq disques, et, pour simplifier le dessin de la page suivante, on a tracé $F_1 \cup F_4$ et $F_2 \cup F_5$ sans indiquer les cercles bords de ces dix disques. On a représenté en trait gras sur F des

cycles qui forment une base de $H_1(F)$, et noté x_i (où $x = a, b, c, d$) un cycle dont la classe est dans $M_{-i} \setminus M_{-i-1}$.



$$\leftarrow F_1 \cap F_4 \quad \rightarrow \leftarrow F_3 \quad \rightarrow \leftarrow F_2 \cap F_5 \quad \rightarrow$$

2.4. — Revenons au cas général, et notons \mathcal{J} la forme d'intersection sur $H_1(F)$. Il est clair que le noyau de l'adjointe $\text{Ad } \mathcal{J}$ de la forme d'intersection est l'image de $H_1(\partial F)$ dans $H_1(F)$. De plus le bord ∂F de F est fixe par h , et l'image de $H_1(\partial F)$ dans $H_1(F)$ est $u(\bigoplus_{i>0} H_1(F_i \cap F_0))$. Ce dernier est un sous $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module de $M_{-2}H_1(F)$, isomorphe à $(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(t-1))^{b-1}$.

PROPOSITION 2.5. — *Le noyau $\text{Ker}(1-t)$ de la multiplication par $(1-t)$ dans le $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module $H_1(F)$ est l'image de $H_1(\partial F)$ dans $H_1(F)$.*

Démonstration. — Ce résultat est une conséquence de l'existence de la forme de Seifert L associée au noeud fibré $K = \partial F$ (cf. [D]). En effet, d'après [loc. cit., 2.4], la forme d'intersection \mathcal{J} sur $H_1(F)$ et la forme de Seifert sont reliées par la formule $\mathcal{J}(x, y) = L(x, (1-t)y)$, pour tout x et y dans $H_1(F)$. Vu que L est unimodulaire, on a $\text{Ker } \text{Ad } \mathcal{J} = \text{Ker}(1-t)$. De plus, par dualité de Poincaré, $\text{Ker } \text{Ad } \mathcal{J}$ est l'image de $H_1(\partial F)$ dans $H_1(F)$, d'où la proposition.

PROPOSITION 2.6. — *L'adjointe de la restriction de la forme d'intersection à $H_1(F) \times M_{-2}H_1(F)$ donne une suite exacte de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules :*

$$0 \rightarrow M_{-1}H_1(F) \rightarrow H_1(F) \xrightarrow{\text{Ad } \mathcal{J}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_{-2}H_1(F), \mathbb{Z}) \\ \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(\partial F), \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Démonstration. — Par construction, $M_{-1}H_1(F)$ est l'orthogonal pour \mathcal{J} de $M_{-2}H_1(F)$. La dualité de Poincaré sur $H_1(F)$ donne donc la proposition, via l'égalité :

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} H_1(F) - \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} M_{-1}H_1(F) \\ = \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} M_{-2}H_1(F) - \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} \operatorname{Ker}(1 - t). \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2.7. — *L'adjointe de la forme d'intersection donne un isomorphisme de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ modules :*

$$\operatorname{Ad} \mathcal{J} : Gr_0^M H_1(F) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_{-2}H_1(F) / \operatorname{Ker}(1 - t), \mathbb{Z}).$$

2.8. — Nous allons étudier la filtration M en comparant les constructions topologiques qui précèdent avec leurs analogues géométriques.

3. L'image de la fibre de Milnor en Géométrie Algébrique

3.1. — Reprenons la situation de 1; $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est un germe de fonction holomorphe réduit, qui présente en 0 un point critique; on désignera par S le disque de \mathbb{C} de centre 0, de rayon η ; B est la boule ouverte de \mathbb{C}^2 de centre 0, de rayon ε , $Y = f^{-1}(S) \cap B$, $Y_0 = f^{-1}(0) \cap B$. On a construit une désingularisation de f ,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & Y \\ & \searrow \varphi & \swarrow f \\ & S & \end{array}$$

c'est-à-dire que X est lisse, π est un isomorphisme au-dessus de $S^* = S - \{0\}$, $\varphi^{-1}(0) = E_0 \cup \dots \cup E_k$ est un diviseur à croisements normaux dans X , E_0 désigne la transformée stricte de Y_0 , et pour $1 \leq i \leq k$, E_i est un \mathbb{P}^1 de multiplicité e_i .

3.2. — Rappelons la construction donnée par J. STEENBRINK dans [S2] : soit e le ppcm des e_i , S' un disque de centre 0 de rayon $\eta^{1/e}$, soit $\sigma : S' \rightarrow S$, défini par $\sigma(t) = t^e$, soient X' la normalisation du produit fibré $X \times_S S'$, $\rho : X' \rightarrow X$ et $\varphi' : X' \rightarrow S'$ les flèches naturelles. On a alors les propriétés suivantes : X' est lisse, $D = \varphi'^{-1}(0)$ est un diviseur à croisements normaux réduit dans X' , $D_0 = \rho^{-1}(E_0)$ est isomorphe à E_0 ,

et, pour $1 \leq i \leq k$, $D_i = \rho^{-1}(E_i)$ est une courbe projective lisse, qui a r_i composantes connexes.

On notera enfin $D_+ = D_1 \cup \dots \cup D_k$.

On peut relever le difféomorphisme de monodromie H de X défini en 1.8 en un difféomorphisme encore noté $H : X' \rightarrow X'$, appelé lui aussi monodromie : il y a en effet une façon unique de relever H sur $X' \setminus D$ pour que $\varphi' = \varphi' \circ H$, et on étend ensuite à X' par continuité.

PROPOSITION 3.3. — *La restriction de ρ à $\mathring{D}_i := \rho^{-1}(\mathring{E}_i)$ est un revêtement galoisien cyclique d'ordre e_i de \mathring{D}_i sur \mathring{E}_i et la restriction de H à \mathring{D}_i est un générateur de son groupe de Galois.*

COROLLAIRE 3.4. — *Si i et j sont non nuls et si E_i intersecte E_j , $D_i \cap D_j$ se compose de m_{ij} points qui sont permutés cycliquement par la monodromie.*

Démonstration de la Proposition. — Notons $v_i : \mathring{F}_i \rightarrow \mathring{E}_i$, comme en (1.10), le revêtement induit par la fibration de X_i sur E_i . Soit Δ un disque fibre de X_i au-dessus d'un point de \mathring{E}_i . L'intersection $\Delta \cap \mathring{F}_i$ est donc constituée de e_i points, situés sur le bord $\partial\Delta$ de Δ . On voit tout de suite en prenant une coordonnée locale z sur Δ que $\rho^{-1}(\partial\Delta)$ est un nœud torique (e_i, e) , d'équation $z^{e_i} = t^e$ sur le tore $|z| = \eta, |t| = \eta^{e_i/e}$. Comme e_i divise e , $\rho^{-1}(\partial\Delta)$ est une tresse à e_i composantes, et $\rho^{-1}(\Delta)$ est composé de e_i disques disjoints, dont l'image dans $X \times_S S'$ est composée de ces e_i disques attachés par leurs centres. L'action de H permute cycliquement les e_i composantes de la tresse (resp. les e_i disques (resp. les centres des e_i disques)), la restriction de H à \mathring{D}_i est donc un générateur du groupe de Galois du revêtement $\rho : \mathring{D}_i \rightarrow \mathring{E}_i$.

Remarque 3.5. — Le difféomorphisme de monodromie H utilisé ici sur X' diffère de celui utilisé dans [S2]. Ceci n'ayant pas d'influence sur nos résultats (en particulier les modules de monodromie sont les mêmes), nous reportons à 3.15 la comparaison entre les deux points de vue.

3.6. Comparaison entre F et D_+ . — Nous avons défini des variétés à bord F_i , telles que $F = \bigcup_{i>0} F_i$. L'application v de F sur E_+ définie en 1.10 se restreint en un revêtement cyclique d'ordre e_i , $v_i : \mathring{F}_i \rightarrow \mathring{E}_i$, et l'action de la monodromie sur \mathring{F}_i est un générateur du groupe de Galois de ce revêtement.

Pour comparer les deux revêtements $\mathring{F}_i \rightarrow \mathring{E}_i$ et $\mathring{D}_i \rightarrow \mathring{E}_i$, considérons $A_i = \rho^{-1}(\mathring{F}_i)$ et $A = \rho^{-1}(F) = F \times_X X' = F \times_S S'$ (cette dernière égalité a lieu parce que l'image de A dans S' ne contient pas 0). Notons v' (resp. v'_i) l'application qui se déduit de v (resp. v_i) par le changement de

base $\rho : X' \rightarrow X$, nous avons donc les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \overset{\circ}{F}_i & \xleftarrow{\rho} & A_i \\ v_i \downarrow & & v'_i \downarrow \\ \overset{\circ}{E}_i & \xleftarrow{\rho} & \overset{\circ}{D}_i \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F & \xleftarrow{\rho} & A = F \times_X X' \\ v \downarrow & & v' \downarrow \\ E_+ & \xleftarrow{\rho} & D_+ = E_+ \times_X X'. \end{array}$$

La monodromie H laisse stables A et F et les flèches du diagramme ci-dessus sont compatibles à l'action de H . On a de plus un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} F & \xleftarrow{\quad} & A = F \times_S S' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ S & \xleftarrow{\sigma} & S', \end{array}$$

l'image de F dans S est réduite à un point $\eta \neq 0$, celle de A dans S' est constituée des racines e -ièmes de η . On voit donc que $\rho : A \rightarrow F$ est un revêtement trivial d'ordre e .

Soit s une section de ce revêtement, s_i la restriction de s à $\overset{\circ}{F}_i$ et Z l'image de s , Z est donc défini par le choix d'une racine e -ième de η , il est stable par H , et s est compatible à H .

THÉOREME 3.7. — *L'application continue $q = v' \circ s$ est surjective, et elle se restreint, pour tout i , à un difféomorphisme $q_i = v'_i \circ s_i$ de $\overset{\circ}{F}_i$ sur $\overset{\circ}{D}_i$ compatible à la monodromie.*

Démonstration. — La restriction de v'_i à $\rho^{-1}(\Delta) \cap A_i$ est induite par la projection de chacun des e_i disques sur son centre. On voit donc que cette restriction est une bijection de $s_i(Z) \cap \rho^{-1}(\Delta)$ avec $\overset{\circ}{D}_i \cap \Delta$. Il en résulte que q_i est une bijection de $\overset{\circ}{F}_i$ avec $\overset{\circ}{D}_i$ et que q est une surjection de F sur D .

De plus, v'_i étant un revêtement, q_i est localement un difféomorphisme, c'est donc un difféomorphisme, (et $v'_i : A_i \rightarrow \overset{\circ}{D}_i$ est un revêtement trivial d'ordre e).

3.8. — La fibration en disques de E_i définit une projection de $\overset{\circ}{F}_i$ sur E_i , dont l'image est E_i privé de petits disques centrés aux points de $E_i \setminus \overset{\circ}{E}_i$. Si on reprend la construction 3.6 en partant de cette fibration, au lieu d'utiliser v_i (qui a été construite en composant la fibration avec la

rétraction par déformation R) on peut construire un difféomorphisme p_i de \mathring{F}_i sur D_i privé de petits disques centrés aux points de $D_i \setminus \mathring{D}_i$.

On peut prolonger ce difféomorphisme de la façon suivante : soit K_i une réunion de disques disjoints, telle que $\partial K_i = \partial F_i$. On munit alors la réunion $G_i = F_i \cup K_i$ d'une structure de variété différentiable en prolongeant p_i en un homéomorphisme de G_i avec D_i , et en relevant la structure différentiable de D_i à G_i . On prolonge de même l'action de la monodromie H de F_i à G_i en relevant l'action sur D_i .

3.9. Définition de la filtration M sur la cohomologie.

Considérons les suites exactes de Mayer-Vietoris pour la cohomologie entière associée à $F = \bigcup_{i>0} F_i$ et à $D_+ = \bigcup_{i>0} D_i$, ainsi que le morphisme de suites exactes associé à $q : F \rightarrow D_+$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & H^0(F) & \longrightarrow & \bigoplus_{i>0} H^0(F_i) & \longrightarrow & \bigoplus_{i>j>0} H^0(F_i \cap F_j) \\
 & & \uparrow (1) & & \uparrow (2) & & \uparrow (3) \\
 (3.9.1) & & 0 & \rightarrow & H^0(D_+) & \longrightarrow & \bigoplus_{i>0} H^0(D_i) \longrightarrow \bigoplus_{i>j>0} H^0(D_i \cap D_j) \\
 & & \uparrow (4) & & \uparrow (5) & & \uparrow (6) \\
 \xrightarrow{\partial_F} & H^1(F) & \longrightarrow & \bigoplus_{i>0} H^1(F_i) & \longrightarrow & \bigoplus_{i>j>0} H^1(F_i \cap F_j) & \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow (4) & & \uparrow (5) & & \uparrow (6) \\
 \xrightarrow{\partial_D} & H^1(D_+) & \longrightarrow & \bigoplus_{i>0} H^1(D_i) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Notons que les flèches de ce diagramme sont compatibles à la monodromie, et que (1), (2) et (3) sont des isomorphismes, puisque $q_i : \mathring{F}_i \rightarrow \mathring{D}_i$ est un difféomorphisme. Nous définissons alors la filtration M sur $H^1(D_+) = H^1(D_+, \mathbb{Z})$ et sur $H^1(F) = H^1(F, \mathbb{Z})$ par :

$$\begin{aligned}
 M_{-1}H^1(D_+) &= 0 & M_{-1}H^1(F) &= 0, \\
 M_0H^1(D_+) &= \text{Im}(\partial_D), & M_0H^1(F) &= \text{Im}(\partial_F), \\
 M_1H^1(D_+) &= H^1(D_+), & M_1H^1(F) &= q^*H^1(D_+), \\
 M_2H^1(F) &= H^1(F).
 \end{aligned}$$

On a donc $\text{Gr}_1^M H^1(D_+) = \bigoplus_{i>0} H^1(D_i)$.

THÉORÈME 3.10.

i) Le morphisme q^* donne des isomorphismes de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ modules de $M_0 H^1(D_+)$ sur $M_0 H^1(F)$ et de $M_1 H^1(D_+)$ sur $M_1 H^1(F)$.

ii) Les gradués de la filtration M de $H^1(F)$ s'inscrivent dans les suites exactes de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ modules suivantes :

$$(3.10.1) \quad 0 \rightarrow H^0(D_+) \rightarrow \bigoplus_{i>0} H^0(D_i) \rightarrow \bigoplus_{i>j>0} H^0(D_i \cap D_j) \xrightarrow{q^* \partial_D} \mathrm{Gr}_0^M H^1(F) \rightarrow 0,$$

$$(3.10.2) \quad \mathrm{Gr}_1^M H^1(F) \xrightarrow{q^*} \bigoplus_{i>0} H^1(D_i),$$

$$(3.10.3) \quad 0 \rightarrow \mathrm{Gr}_2^M H^1(F) \rightarrow \bigoplus_{i>j\geq 0} H^1(F_i \cap F_j) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{i>0} H^2(G_i) \rightarrow 0,$$

où les premières flèches de 3.10.1 proviennent de la suite exacte de Mayer-Vietoris, ainsi que la flèche ∂ de 3.10.3. De plus, les $\mathrm{Gr}_i^M H^1(F)$ sont sans torsion.

Remarque. — Ces suites exactes sont l'équivalent en cohomologie entière des suites exactes de cohomologie rationnelle de [S2, 3.13].

Démonstration. — Compte tenu des isomorphismes (1), (2) et (3), le lemme des cinq donne l'isomorphisme

$$q^* : M_0 H^1(D_+) \xrightarrow{\cong} M_0 H^1(F);$$

la deuxième suite exacte de 3.9.1 donne alors la suite exacte 3.10.1.

Vu que D_i peut être obtenu à partir de F_i en contractant en un point chacun des cycles du bord de F_i , le morphisme (5) est injectif. Une chasse dans le diagramme 3.9.1 montre alors que le morphisme (4) est injectif, par suite $q^* : M_1 H^1(D_+) \rightarrow M_1 H^1(F)$ est un isomorphisme. Le gradué $\mathrm{Gr}_1^M H^1(F)$ est donc isomorphe au quotient de $H^1(D_+)$ par l'image de $\bigoplus_{i>j>0} H^0(D_i \cap D_j)$, c'est-à-dire à $\bigoplus_{i>0} H^1(D_i)$, d'où 3.10.2.

Pour traiter le cas du Gr_2^M , nous allons utiliser les variétés G_i introduites en 3.8. La définition de G_i donne une suite exacte de Mayer-Vietoris pour la cohomologie entière, compatible à la monodromie,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(G_i) \rightarrow H^0(F_i) \oplus H^0(K_i) \rightarrow H^0(\partial F_i) \xrightarrow{0} H^1(G_i) \\ \rightarrow H^1(F_i) \rightarrow H^1(\partial F_i) \xrightarrow{\partial_i} H^2(G_i) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

on a en effet $H^2(F_i) = 0$, car F_i est une variété à bord de dimension 2.

On a des isomorphismes $H^0(G_i) \cong H^0(F_i)$ et $H^0(K_i) \cong H^0(\partial F_i)$; par suite la flèche marquée 0 est nulle, d'où une nouvelle suite exacte, compte tenu de l'égalité $H^1(\partial F_i) = \bigoplus_{j \neq i} H^1(F_i \cap F_j)$,

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i>0} H^1(F_i)/H^1(G_i) \rightarrow \bigoplus_{i>0} \bigoplus_{j \neq i} H^1(F_i \cap F_j) \xrightarrow{\oplus \partial_i} \bigoplus_{i>0} H^2(G_i) \rightarrow 0.$$

On peut alors construire, grâce au lemme du serpent, un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes, dont les flèches sont compatibles à la monodromie :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_2^M H^1(F) & \longrightarrow & \bigoplus_{i>j \geq 0} H^1(F_i \cap F_j) & \xrightarrow{\partial} & \bigoplus_{i>0} H^2(G_i) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \eta & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & \bigoplus_{i>0} H^1(F_i)/H^1(G_i) & \rightarrow & \bigoplus_{i>0} \bigoplus_{j \neq i} H^1(F_i \cap F_j) & \xrightarrow{\oplus \partial_i} & \bigoplus_{i>0} H^2(G_i) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \theta & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i>j>0} H^1(F_i \cap F_j) & \longrightarrow & \bigoplus_{i>j>0} H^1(F_i \cap F_j) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

où l'on définit η et θ de la façon suivante : si $b = (b_{ij})_{i>j \geq 0}$ et si $d = (d_{ij})_{i>0, j \neq i}$, alors $\eta(b) = (c_{\ell\ell})_{k>0, \ell \neq k}$ est donné par

$$\begin{aligned} c_{k\ell} &= c_{\ell k} = b_{k\ell}, & \text{pour } \ell \neq 0 \text{ et } k > \ell, \\ c_{k0} &= b_{k0}, & \text{pour } \ell = 0, \end{aligned}$$

et $\theta(d) = (e_{k\ell})_{k>\ell>0}$ est donné par $e_{k\ell} = d_{k\ell} - d_{\ell k}$.

La première ligne nous donne la suite exacte qui concerne $\mathrm{Gr}_2^M H^1(F)$.

3.11. — La description détaillée des $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ morphismes qui figurent dans 3.10 fait l'objet des paragraphes 5, 6 et 7.

3.12. — La suite exacte des coefficients universels et la nullité de la torsion de l'homologie de F donnent des isomorphismes de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules : $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(F), \mathbb{Z}) \simeq H^1(F)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^1(F), \mathbb{Z}) \simeq H_1(F)$. La filtration M sur $H^1(F)$ induit alors une filtration duale M^0 sur $H_1(F)$, en effet, la suite exacte

$$0 \rightarrow M_{-1-i}H^1(F) \rightarrow H^1(F) \rightarrow H^1(F)/M_{-1-i}H^1(F) \rightarrow 0$$

donne par dualité la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^1(F)/M_{-1-i}H^1(F), \mathbb{Z}) &\xrightarrow{(j)} H_1(F) \\ &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_{-1-i}H^1(F), \mathbb{Z}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On pose alors

$$M_i^0 H_1(F) = \mathrm{Im}(j) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^1(F)/M_{-1-i}H^1(F), \mathbb{Z})$$

(isomorphisme de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ modules). Cette filtration vérifie

$$\begin{aligned} M_0^0 H_1(F) &= H^1(F), \quad M_{-3}^0 H_1(F) = 0, \\ \mathrm{Gr}_{-i}^{M^0} H_1(F) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Gr}_i^M H^1(F), \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.13. — *La filtration M^0 sur l'homologie de la fibre de Milnor définie en 3.12 coïncide avec la filtration M définie au chapitre 2.*

Démonstration. — En dualisant la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(F)/M_0 H^1(F) \rightarrow \bigoplus_{i>0} H^1(F_i) \rightarrow \bigoplus_{i>j>0} H^1(F_i \cap F_j) \rightarrow 0,$$

on trouve que $M_{-1}^0 H_1(F)$ est l'image de $\bigoplus_{i>0} H_1(F_i)$ dans $H_1(F)$.

De même, en dualisant la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{Gr}_2^M H^1(F) \rightarrow \bigoplus_{i>j\geq 0} H^1(F_i \cap F_j) \rightarrow \bigoplus_{i>0} H^2(G_i) \rightarrow 0,$$

on trouve que

$$M_{-2}^0 H_1(F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^1(F)/M_1 H^1(F), \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Gr}_2 H^1(F), \mathbb{Z})$$

est l'image de $\bigoplus_{i>j\geq 0} H_1(F_i \cap F_j)$ dans $H_1(F)$, d'où la proposition.

COROLLAIRE 3.14. — *La restriction de la monodromie à $M_1 H^1(F)$ n'admet pas 1 pour valeur propre.*

Démonstration. — Ce point est immédiat d'après 2.5 et 3.13.

3.15. — On peut relever en un difféomorphisme $g : X' \rightarrow X'$ le difféomorphisme de S' sur S' "multiplication par $\exp(2\pi i/e)$ " : si (x, t) désigne un point de $X' \setminus D$, avec $x \in X$, $t \in S'$, et $\varphi(x) = t^e \neq 0$, on pose $g(x, t) = (x, t \cdot \exp(2\pi i/e))$, et on prolonge à X' par continuité. Ce difféomorphisme g est utilisé dans [S2] pour définir l'action de la monodromie sur $H_1(F)$. Cette action et l'action induite par H coïncident au signe près grâce à la proposition suivante.

PROPOSITION 3.16. — *L'application composée gH laisse fixe chaque D_i .*

Démonstration. — Soit z une coordonnée locale sur Δ , t une coordonnée locale sur les e_i disques qui composent $\rho^{-1}(\Delta)$; numérotions les e_i disques par les racines e_i -ièmes de l'unité. On notera ζ une telle racine de l'unité, $\varepsilon_i = \exp(2\pi i/e_i)$, $\varepsilon = \exp(2\pi i/e)$. Les flèches du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \longleftarrow & \rho^{-1}(\Delta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & S' \end{array}$$

s'expriment dans les coordonnées locales de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} z = \zeta t^{e/e_i} & \longleftarrow & (\zeta, t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ z^{e_i} = t^e & \longleftarrow & t. \end{array}$$

Si $z \neq 0$, l'action de H est définie par $H(\zeta, t) = (\varepsilon_i \zeta, t)$, en effet, l'action de H laisse fixe t et transforme z en $\varepsilon_i z$ (H agit sur X' en agissant sur le premier facteur de $X \times_S S'$), et de même, l'action de g est définie par $g(\zeta, t) = (\varepsilon_i^{-1} \zeta, \varepsilon t)$, en effet l'action de g laisse fixe z et transforme t en εt (g agit sur X' en agissant sur le deuxième facteur de $X \times_S S'$).

On voit donc que, si $t \neq 0$, $gH(\zeta, t) = (\zeta, \varepsilon t)$, c'est-à-dire que gH laisse stables les e_i disques qui composent $\rho^{-1}(\Delta)$, et donc laisse fixe chaque D_i .

4. Comparaison avec la théorie de Hodge mixte

LEMME 4.1. — *La filtration obtenue en tensoriant la filtration M sur $H^1(D_+, \mathbb{Z})$ avec \mathbb{Q} ou \mathbb{C} n'est autre que la filtration par le poids W de la structure de Hodge mixte de $H^1(D_+)$.*

Démonstration. — Soit $L_{\mathbb{Q}}^0$ (resp. $L_{\mathbb{C}}^0$) le complexe de faisceaux de \mathbb{Q} -espaces vectoriels (resp. le complexe de $\mathcal{O}_{X'}$ -modules) suivant :

$$L_{\mathbb{Q}}^0 = \bigoplus_{i>0} \varepsilon_i^* \mathbb{Q}_{D_i}, \quad L_{\mathbb{Q}}^1 = \bigoplus_{i>j>0} \varepsilon_{ij}^* \mathbb{Q}_{D_i \cap D_j}, \quad L_{\mathbb{Q}}^i = 0 \quad \text{si } i \neq 0, 1$$

$$\text{(resp. } L_{\mathbb{C}}^0 = \bigoplus_{i>0} \varepsilon_i^* \mathcal{O}_{D_i}, \quad L_{\mathbb{C}}^1 = \bigoplus_{i>0} \varepsilon_i^* \Omega_{D_i}^1 \oplus \bigoplus_{i>j>0} \varepsilon_{ij}^* \mathbb{C}_{D_i \cap D_j},$$

et $L_{\mathbb{C}}^i = 0$ si $i \neq 0, 1$), où l'on note ε_i (resp. ε_{ij}) la flèche d'inclusion de D_i (resp. $D_i \cap D_j$) dans D_+ ou dans D . Filtrons ces complexes par la filtration W suivante :

$$\begin{aligned} W_{-2} L_{\mathbb{C}}^{\bullet} &= 0, & W_{-2} L_{\mathbb{Q}}^{\bullet} &= 0, \\ W_{-1} L_{\mathbb{C}}^{\bullet} &= \bigoplus_{i>j>0} \varepsilon_{ij}^* \mathbb{C}_{D_i \cap D_j}[-1], & W_{-1} L_{\mathbb{Q}}^{\bullet} &= \bigoplus_{i>j>0} \varepsilon_{ij}^* \mathbb{Q}_{D_i \cap D_j}[-1], \\ W_0 L_{\mathbb{C}}^{\bullet} &= L_{\mathbb{C}}^{\bullet} & W_0 L_{\mathbb{Q}}^{\bullet} &= L_{\mathbb{Q}}^{\bullet}. \end{aligned}$$

Suivant la définition donnée par P. DELIGNE dans [H.III], la filtration W de $H^*(D_+, \mathbb{Q})$ (resp. $H^*(D_+, \mathbb{C})$) provient par l'intermédiaire d'une suite spectrale qui dégénère en E_2 , de la filtration sur

$$H^*(D_+, \mathbb{Q}) = H^*(D_+, L_{\mathbb{Q}}^0) \quad (\text{resp. } H^*(D_+, \mathbb{C}) = H^*(D_+, L_{\mathbb{C}}^0))$$

induite par la filtration W sur $L_{\mathbb{Q}}^{\bullet}$ (resp. $L_{\mathbb{C}}^{\bullet}$).

Par suite, la filtration W sur $H^1(D_+, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C})$ vérifie

$$\begin{aligned} W_{-1} &= 0, \quad W_1 H^1(D_+) = H^1(D_+) \quad \text{et} \\ W_0 H^1(D_+) &= \text{Gr}_0^W H^1(D_+) \\ &= \text{Im} \left(\bigoplus_{i>j>0} H^0(D_i \cap D_j) \rightarrow H^1(D_+) \right); \end{aligned}$$

elle coïncide donc avec la filtration M définie en 3.9.

4.2. — En utilisant le THÉORÈME 3.10, nous constatons que le lemme ci-dessus implique :

THÉOREME 4.3. — Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{C} . L'homomorphisme q^* de $H^1(D_+, \mathbb{K})$ dans $H^1(F, \mathbb{K})$ induit un isomorphisme de $\mathbb{K}[t, t^{-1}]$ -modules de $W_i H^1(D_+, \mathbb{K})$ sur $M_i H^1(F) \otimes \mathbb{K}$, pour $i = 0$ ou 1.

4.4 Rappel. — On trouve dans [S2] la construction d'une structure de Hodge mixte sur la cohomologie de la fibre de Milnor F associée à $f : Y \rightarrow S$. On considère de nouveau le diagramme commutatif suivant, dont les flèches ont été définies en 3.2 :

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\rho} & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ S & \xleftarrow{\quad} & S'. \end{array}$$

Soit $A^\bullet(F)$ le complexe de $\mathcal{O}_{X'}$ -modules, porté par D_+ , suivant,

$$A^\bullet(F) = (A^{00}(F) \xrightarrow{(d', d'')} A^{10}(F) \oplus A^{01}(F)),$$

avec

$$A^{00}(F) = (\Omega_{X'}^1(\log D)/W_0 \Omega_{X'}^1(\log D))/\varepsilon_{0*} \mathcal{O}_{D_0},$$

$$A^{10}(F) = (\Omega_{X'}^2(\log D)/W_0 \Omega_{X'}^2(\log D))/\varepsilon_{0*} \Omega_{D_0}^1,$$

$$A^{01}(F) = (\Omega_{X'}^2(\log D)/W_1 \Omega_{X'}^2(\log D))/\bigoplus_{i>0} \varepsilon_{0i*} \mathbb{C}_{D_i \cap D_0},$$

et où

- $d' : A^{00}(F) \rightarrow A^{10}(F)$ est la flèche induite par

$$d : \Omega_{X'}^1(\log D) \rightarrow \Omega_{X'}^2(\log D);$$

- $d'' : A^{00}(F) \rightarrow A^{01}(F)$ est définie par

$$d''\omega = \text{classe de } (\varphi'^*(dt/t) \wedge \omega),$$

où t est une coordonnée sur S' .

Ce complexe $A^\bullet(F)$ est muni d'une filtration croissante W définie par

$$W_{-2} A^\bullet(F) = 0,$$

$$W_{-1} A^\bullet(F) = A^{01}(F)[-1],$$

$$W_0 A^\bullet(F) = (W_0 A^{00}(F) \rightarrow W_0 A^{10}(F) \oplus W_0 A^{01}(F)),$$

$$W_1 A^\bullet(F) = A^\bullet(F),$$

où

$$W_0 A^{00}(F) = \mathrm{Gr}_1^W \Omega_{X'}^1(\log D)/\varepsilon_{0*} \mathcal{O}_{D_0},$$

$$W_0 A^{10}(F) = \mathrm{Gr}_1^W \Omega_{X'}^2(\log D)/\varepsilon_{0*} \Omega_{D_0}^1,$$

$$W_0 A^{01}(F) = A^{01}(F).$$

Dans [loc. cit.], J. STEENBRINK démontre que la suite spectrale associée à la filtration W dégénère en E_2 , et que $H^i(F, \mathbb{C})$ est isomorphe à $H^i(D_+, A^\bullet(F))$. Nous noterons τ un isomorphisme de $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ -modules de $H^i(D_+, A^\bullet(F))$ sur $H^i(F, \mathbb{C})$. On a donc, compte tenu des égalités

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_{-1}^W A^\bullet(F) &= \bigoplus_{i>j>0} \varepsilon_{ij*} \mathbb{C}_{D_i \cap D_j}[-1], \\ \mathrm{Gr}_0^W A^\bullet(F) &= \left(\bigoplus_{i>0} \varepsilon_{i*} \mathcal{O}_{D_i} \rightarrow \bigoplus_{i>0} \varepsilon_{i*} \Omega_{D_i}^1 \right), \\ \mathrm{Gr}_1^W A^\bullet(F) &= \bigoplus_{i>j \geq 0} \varepsilon_{ij*} \mathbb{C}_{D_i \cap D_j}[-1], \end{aligned}$$

et du fait que $H^i(F, \mathbb{C})$ est nul si $i \neq 0, 1$, des suites exactes (à coefficients dans \mathbb{C})

$$(4.4.1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \bigoplus_{i>0} H^0(D_i) \rightarrow \bigoplus_{i>j>0} H^0(D_i \cap D_j) \rightarrow \mathrm{Gr}_0^W H^1(D_+, A^\bullet(F)) \rightarrow 0,$$

$$(4.4.2) \quad \mathrm{Gr}_1^W H^1(D_+, A^\bullet(F)) \simeq \bigoplus_{i>0} H^1(D_i),$$

$$(4.4.3) \quad 0 \rightarrow \mathrm{Gr}_2^W H^1(D_+, A^\bullet(F)) \rightarrow \bigoplus_{i>j \geq 0} H^0(D_i \cap D_j)(-1) \rightarrow \bigoplus_{i>0} H^2(D_i) \rightarrow 0,$$

où le (-1) indique un décalage de poids de $+2$.

La cohomologie rationnelle donne lieu aux mêmes suites exactes (à coefficients dans \mathbb{Q}). Le complexe de faisceaux de \mathbb{Q} -espaces vectoriels $A^\bullet(F)_{\mathbb{Q}}$ qui joue dans le calcul de $H^1(F, \mathbb{Q})$ le rôle joué par $A^\bullet(F)$ dans le

calcul de $H^1(F, \mathbb{C})$, est construit dans (loc. cit.). Cette construction, bien qu'essentiellement correcte, doit être complétée par [S.Z, 5.8].

La cohomologie $H^1(D_+, A^\bullet(F))$ est ainsi munie d'une structure de Hodge mixte, et l'isomorphisme τ mentionné plus haut transporte cette structure à la cohomologie de F .

4.5. — Construisons maintenant un morphisme η de complexes filtrés de (L_C^0, W) dans $(A^\bullet(F), W)$. Soit η^{00} (resp. η^{10}) la flèche composée pour $p = 0$ (resp. $p = 1$) dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{i>0} \varepsilon_{i*} \Omega_{D_i}^p & \longrightarrow & \bigoplus_{i\geq 0} \varepsilon_{i*} \Omega_{D_i}^p \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Gr}_1^W \Omega_{X'}^{p+1}(\log D) \longrightarrow \Omega_{X'}^{p+1}(\log D)/W_0 \\
 \searrow \simeq \quad \downarrow \quad \swarrow & & \downarrow \\
 & \mathrm{Gr}_1^W \Omega_{X'}^{p+1}(\log D)/\Omega_{D_0}^p & \longrightarrow (\Omega_{X'}^{p+1}(\log D)/W_0)/\Omega_{D_0}^p \\
 & \searrow & \parallel \\
 & & A^{p0}(F); \\
 \eta^{p0} \nearrow & &
 \end{array}$$

soit η^{01} l'isomorphisme $\bigoplus_{i>j>0} \varepsilon_{ij*} \mathbb{C}_{D_i \cap D_j} \rightarrow A^{01}(F)$. Le morphisme η est le suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{i>0} \varepsilon_{i*} \mathcal{O}_{D_i} & \longrightarrow & \bigoplus_{i>0} \varepsilon_{i*} \Omega_{D_i} \oplus \bigoplus_{i>j>0} \varepsilon_{ij*} \mathbb{C}_{D_i \cap D_j} \\
 \downarrow \eta^{00} & & \downarrow (\eta^{10}, \eta^{01}) \\
 A^{00}(F) & \longrightarrow & A^{10}(F) \oplus A^{01}(F).
 \end{array}$$

On vérifie immédiatement que η est compatible à W et que η est un isomorphisme de

$$\bigoplus_{i>0} \varepsilon_{i*} \mathcal{O}_{D_i} \rightarrow \bigoplus_{i>0} \varepsilon_{i*} \Omega_{D_i}^1 \oplus \bigoplus_{i>j>0} \varepsilon_{ij*} \mathbb{C}_{D_i \cap D_j}$$

avec $W_0(A^\bullet(F))$.

On vérifie de même en étudiant la délicate construction de $(A^\bullet(F)_{\mathbb{Q}}, W)$ que la flèche η définie ci-dessus provient d'une flèche définie au niveau rationnel.

4.6. — Munissons les complexes de $\mathcal{O}_{X'}$ -modules introduits en 4.1 et 4.4 des filtrations F^\bullet de Hodge suivantes : dans les deux cas, F^0 est le complexe tout entier et $F^2 = 0$, d'autre part

$$F^1(L_{\mathbb{C}}^\bullet) = \bigoplus_{i>0} \varepsilon_{i*} \Omega_{D_i}^1[-1], \quad \text{et} \quad F^1(A^\bullet(F)) = A^{10}(F)[-1].$$

Le morphisme η est compatible à la filtration F^\bullet et on a donc la proposition suivante :

PROPOSITION 4.7. — *Le morphisme η construit en 4.5 donne par passage à la cohomologie un morphisme de structures de Hodge mixtes*

$$\eta^* : (H^1(D_+, \mathbb{C}), W, F^\bullet) \rightarrow (H^1(D_+, A^\bullet(F)), W, F^\bullet).$$

THÉOREME 4.8. — *La filtration sur $H^1(F, \mathbb{Q}$ ou \mathbb{C}) déduite de la filtration M définie en 3.9 par tensorisation coïncide avec la filtration par le poids W de la structure de Hodge mixte définie par J. Steenbrink.*

Démonstration. — Notons $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{C} . Nous disposons d'un diagramme commutatif de $\mathbb{K}[t, t^{-1}]$ -modules

$$\begin{array}{ccc} H^1(D_+, \mathbb{K}) & \xrightarrow{\eta^*} & H^1(D_+, A^\bullet(F_{\mathbb{K}})) \\ q^* \searrow & & \swarrow \tau \\ & H^1(F, \mathbb{K}), & \end{array}$$

on a alors, d'après 4.3 et 4.7, pour $i = 0$ ou 1 ,

$$\begin{aligned} M_i H^1(F) \otimes \mathbb{K} &= q^*(W_i H^1(D_+, \mathbb{K})) = \tau \eta^*(W_i H^1(D_+, \mathbb{K})) \\ &\subset \tau(W_i H^1(D_+, A^\bullet(F)_{\mathbb{K}})) = W_i H^1(F, \mathbb{K}) \end{aligned}$$

et

$$H^1(F, \mathbb{K}) = M_2 H^1(F) \otimes \mathbb{K} = W_2 H^1(F, \mathbb{K}).$$

De plus, les suites exactes (3.10.i) et (4.4.i) sont semblables, W et le tensorisé de M ont donc des gradués isomorphes. Vu les inclusions ci-dessus, les deux filtrations sont identiques.

4.9. — On a des isomorphismes “résidu de Poincaré” :

$$\begin{aligned} \Omega_{X'}^1(\log D)/W_0 \Omega_{X'}^1(\log D) &\simeq \bigoplus_{i \geq 0} \varepsilon_{i*} \mathcal{O}_{D_i}, \\ \Omega_{X'}^2(\log D)/W_1 \Omega_{X'}^2(\log D) &\simeq \bigoplus_{i>j \geq 0} \varepsilon_{ij*} \mathbb{C}_{D_i \cap D_j}. \end{aligned}$$

Les $\mathcal{O}_{X'}$ -modules $A^{00}(F)$ et $A^{01}(F)$ prennent alors la forme simple suivante :

$$A^{00}(F) \simeq \bigoplus_{i>0} \varepsilon_i^* \mathcal{O}_{D_i}, \quad A^{01}(F) \simeq \bigoplus_{i>j>0} \varepsilon_{ij}^* \mathbb{C}_{D_i \cap D_j}.$$

On voit que $\mathrm{Gr}_F^0 \eta$ est un isomorphisme de $\mathrm{Gr}_F^0 L_{\mathbb{C}}^{\bullet}$ avec $\mathrm{Gr}_F^0 A^{\bullet}(F)$. On a d'autre part une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{D_+} \rightarrow \bigoplus_{i>0} \varepsilon_i^* \mathcal{O}_{D_i} \rightarrow \bigoplus_{i>j>0} \varepsilon_{ij}^* \mathbb{C}_{D_i \cap D_j} \rightarrow 0.$$

On a donc les isomorphismes :

$$\mathcal{O}_{D_+} \simeq \mathrm{Gr}_F^0 L_{\mathbb{C}}^{\bullet} \simeq \mathrm{Gr}_F^0 A^{\bullet}(F).$$

Par passage à la cohomologie, on trouve alors, $(H^1(D_+, A^{\bullet}(F)), W, F)$ étant une structure de Hodge mixte, les isomorphismes suivants :

$$H^1(D_+, \mathcal{O}_{D_+}) \simeq \mathrm{Gr}_F^0 H^1(D_+, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Gr}_F^0 H^1(F, \mathbb{C}).$$

En composant les isomorphismes ci-dessus, on trouve donc le résultat suivant :

PROPOSITION 4.10. — *On a une suite exacte compatible à l'action de la monodromie :*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \bigoplus_{i>0} H^0(D_i, \mathcal{O}_{D_i}) &\rightarrow \bigoplus_{i>j>0} H^0(D_i \cap D_j, \mathbb{C}) \\ &\rightarrow \mathrm{Gr}_F^0(F, \mathbb{C}) \rightarrow \bigoplus_{i>0} H^1(D_i, \mathcal{O}_{D_i}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

4.11. Calcul direct de $\mathrm{Gr}_F^0 H^1(F, \mathbb{C})$. — Comme on l'a vu plus haut, la filtration W sur $H^1(F, \mathbb{C})$ est déterminée par la donnée de q et est égale à $M \otimes \mathbb{C}$. En ce qui concerne la filtration F^{\bullet} , la situation est la suivante :

PROPOSITION 4.12. — *Soit $0 = F^2 \subset F^1 \subset F^0 = H^1(D_+, \mathbb{C})$ la filtration F^{\bullet} de Hodge usuelle sur $H^1(D_+, \mathbb{C})$; q^* induit un isomorphisme de $\mathrm{Gr}_F^0 H^1(D_+, \mathbb{C})$ sur $M_1 H^1(F) \otimes \mathbb{C} / q^*(F^1 H^1(D_+, \mathbb{C}))$.*

Démonstration. — On a en effet un isomorphisme de suites exactes, où les isomorphismes verticaux sont induits par q^* :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F^1 H^1(D_+, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^1(D_+, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^1(D_+, \mathbb{C}) / F^1 H^1(D_+, \mathbb{C}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & q^*(F^1 H^1(D_+, \mathbb{C})) & \longrightarrow & M_1 H^1(F) \otimes \mathbb{C} & \longrightarrow & M_1 H^1(F) \otimes \mathbb{C} / q^*(F^1 H^1(D_+, \mathbb{C})) \longrightarrow 0, \end{array}$$

4.13. — Reprenons le diagramme commutatif utilisé en 4.8 :

$$\begin{array}{ccc} H^1(D_+, \mathbb{K}) & \xrightarrow{\eta^*} & H^1(D_+, A^\bullet(F_{\mathbb{K}})) \\ & \searrow q^* \quad \swarrow \tau & \\ & H^1(F, \mathbb{K}), & \end{array}$$

dont les flèches sont compatibles aux filtrations W_\bullet et F^\bullet , ainsi qu'à l'action de la monodromie. Ce diagramme permet d'obtenir le corollaire suivant de la PROPOSITION 4.12.

COROLLAIRE 4.14. — *Le gradué $\mathrm{Gr}_F^0 H^1(F, \mathbb{C})$ défini par J. Steenbrink est égal à*

$$M_1 H^1(F) \otimes \mathbb{C}/q^*(F^1 H^1(D_+, \mathbb{C})).$$

Remarque 4.15. — D'après ce qui précède, on peut définir $\mathrm{Gr}_F^0 H^1(F, \mathbb{C})$ à isomorphisme de $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ -module près, comme un sous-quotient de $H^1(F, \mathbb{C})$, indépendamment de la construction de F^1 en dehors de W_1 , et on peut utiliser la suite exacte 4.10 pour le calculer.

Ceci conduit au calcul du spectre de la singularité associée au germe de f , pour lequel nous renvoyons le lecteur à [L.S].

Nous avons montré que $(F^1 \cap W_1)H^1(F, \mathbb{C}) = q^*(F^1 H^1(D_+, \mathbb{C}))$, mais notre construction ne nous permet pas de définir de manière fonctorielle un sous-espace $F^1 H^1(F, \mathbb{C})$ de $H^1(F, \mathbb{C})$.

On peut interpréter géométriquement ceci en disant que q_i donne une structure holomorphe à \tilde{F}_i d'une façon compatible à la fibration $\varphi : X \times_S S^* \rightarrow S^*$, tandis que la structure holomorphe de F dépend du choix de la fibre de Milnor.

5. Description du $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module $\mathrm{Gr}_0^M H^1(F)$

5.1. — Posons pour simplifier $\mathbb{Z}T = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ et reprenons les notations du chapitre 3 pour décrire le $\mathbb{Z}T$ -module $\mathrm{Gr}_0^M H^1(F)$. Le point de départ est la suite exacte de $\mathbb{Z}T$ -modules

$$(3.10.1) \quad 0 \rightarrow H^0(D_+) \rightarrow \bigoplus_{i>0} H^0(D_i) \xrightarrow{\Delta} \bigoplus_{i>j>0} H^0(D_i \cap D_j) \longrightarrow \mathrm{Gr}_0^M H^1(F) \rightarrow 0.$$

Si $i \neq 0$, le $\mathbb{Z}T$ -module $H^0(D_i)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}T/(t^{r_i} - 1)$, si $i \neq 0$, $j \neq 0$ et $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, le $\mathbb{Z}T$ -module $H^0(D_i \cap D_j)$ est isomorphe

à $\mathbb{Z}T/(t^{m_{ij}} - 1)$; en effet, d'après 3.2 et 3.4, la courbe D_i a r_i composantes connexes et $D_i \cap D_j$ est constitué de m_{ij} points, et dans les deux cas la monodromie agit par permutation circulaire.

PROPOSITION 5.2. — *Il existe des générateurs de $\mathbb{Z}T$ -modules*

- x_i générateur de $H^0(D_i)$, pour $i > 0$, et
- x_{ij} générateur de $H^0(D_i \cap D_j)$, pour $i > j > 0$ et $D_i \cap D_j \neq \emptyset$,

tels que :

$$\Delta(x_i) = \bigoplus_{i>j} (t^{m_{ij}} - 1)/(t^{r_i} - 1) x_{ij} \oplus \bigoplus_{j>i} (t^{m_{ij}} - 1)/(t^{r_i} - 1) x_{ji}.$$

Démonstration. — L'arbre de résolution $A(E)$ se plonge dans D_+ ; en effet, $A(E)$ étant un arbre, on peut suivre la règle suivante : si p_i est l'image du sommet (i) dans D_i , et si D_j est adjacent à D_i , on envoie (j) dans la composante connexe de D_j qui rencontre la composante connexe de D_i qui contient p_i . L'image des sommets de $A(E)$ par ce plongement fournit des générateurs x_i et celle des arêtes des générateurs x_{ij} . Vu que l'homomorphisme Δ provient d'une suite exacte de Mayer-Vietoris, $\Delta(x_i)$ a la valeur indiquée dans l'énoncé.

Remarque 5.3. — Étant donné la suite exacte rappelée en 5.1, la PROPOSITION 5.2 fournit un système de générateurs et de relations pour le $\mathbb{Z}T$ -module $\mathrm{Gr}_0^M H^1(F)$. La suite de ce chapitre explique comment simplifier cette présentation.

5.4. Le graphe $G(D)$. — On considère l'arbre de résolution de f , noté $A(E)$, dont la définition est rappelée en 1.9, et on construit le graphe $G(D)$ comme suit : on remplace chaque sommet (i) de $A(E)$ par r_i sommets qui représentent les r_i composantes connexes de D_i , on remplace chaque arête (ij) de $A(E)$ par m_{ij} arêtes qui représentent les m_{ij} points de $D_i \cap D_j$ et chacune de ces arêtes s'accroche au sommet correspondant à la composante connexe de D_i (resp. D_j) auquel appartient le point représenté par cette arête. On attache ensuite à chaque sommet un nombre d'arêtes égal au nombre de branches de f qui coupent la composante de E_+ associée à ce sommet. On note B le fermé de $G(D)$ constitué des extrémités extérieures de ces arêtes supplémentaires.

Le graphe $G(D)$ est ainsi un revêtement ramifié de $A(E)$ tel que l'arête de $A(E)$ est revêtue par m_{ij} arêtes de $G(D)$. Il est de plus muni d'une action de la monodromie, qui est un isomorphisme du revêtement. Ceci munit l'homologie et la cohomologie de $G(D)$ d'une structure de $\mathbb{Z}T$ -module.

On voit donc, en utilisant 5.2 et la définition de la cohomologie singulière :

THÉORÈME 5.5. — *Le $\mathbb{Z}T$ -module $H^1(G(D))$ est isomorphe au $\mathbb{Z}T$ -module $\mathrm{Gr}_0^M H^1(F)$.*

5.6. — Suivant la terminologie habituelle, on appellera *point de rupture* un sommet de $A(E)$ de valence supérieure ou égale à 3, *branche morte* une géodésique de $A(E)$ d'origine un point de rupture, d'extrémité un point de valence 1, et qui ne contient pas d'autre point de rupture, *segment géodésique* une géodésique de $A(E)$ d'extrémités deux points de rupture, ou un point de rupture et un point de valence 2 qui porte une flèche, et qui ne contient pas d'autre point de rupture.

LEMME 5.7. — *Soit i, j, k trois sommets consécutifs sur une branche morte ou sur un segment géodésique, on a alors $m_{ij} = m_{jk}$.*

Démonstration. — Le sommet j étant de valence 2, F_j est la réunion de r_j tubes disjoints qui se raccordent à F_i par $m_{ij} = r_j$ cercles et à F_k par $m_{jk} = r_j$ cercles, d'où le résultat.

Définition 5.8. — On appellera *arbre simplifié* de f et on notera $A_0(E)$ l'arbre pondéré obtenu à partir de $A(E)$ de la façon suivante :

i) On efface les branches mortes au-delà du point de rupture origine de celles-ci.

ii) On remplace chaque segment géodésique par une arête affectée de la multiplicité m_{ij} d'une arête quelconque de ce segment. On a ainsi effacé tous les points de valence 1 ou 2, sauf les points de valence 2 qui portent une flèche.

iii) On associe à chaque sommet de l'arbre ainsi construit le nombre r_i associé au point de rupture de $A(E)$ qui correspond à ce sommet.

On notera $G_0(D)$ le graphe construit à partir de $A_0(E)$, comme $G(D)$ l'est à partir de $A(E)$, et s_0 (resp. a_0) le nombre de sommets (resp. d'arêtes) de $A_0(E)$. On désignera chaque sommet de $A_0(E)$ par l'indice (i) qui est le sien dans $A(E)$, et si (i) et (j) sont les extrémités d'un segment géodésique, on notera encore, par abus de langage, m_{ij} la multiplicité de l'arête de $A_0(E)$ qui joint (i) et (j) , i.e. la multiplicité d'une arête quelconque du segment correspondant dans $A(E)$.

PROPOSITION 5.9. — *Le $\mathbb{Z}T$ -module $H^1(G_0(D))$ est isomorphe au $\mathbb{Z}T$ -module $\mathrm{Gr}_0^M H^1(F)$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $H^1(G(D))$ et $H^1(G_0(D))$ sont des $\mathbb{Z}T$ -modules isomorphes. Ce point est une conséquence facile du LEMME 5.7.

THÉOREME 5.10. — Le $\mathbb{Z}T$ -module $\mathrm{Gr}_0^M H^1(F)$ admet une matrice de présentation \mathcal{M}_0 à a_0 lignes et $(a_0 + s_0)$ colonnes définie comme suit :

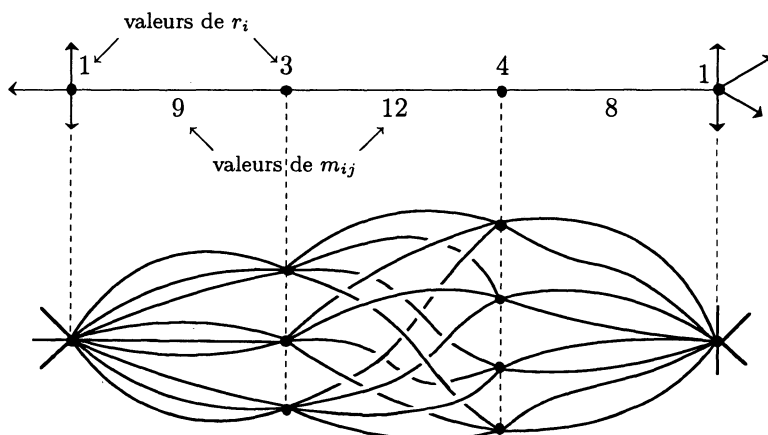
- Les lignes de \mathcal{M}_0 sont indexées par les indices des arêtes de $A_0(E)$.
- Les a_0 premières colonnes de \mathcal{M}_0 sont indexées par les indices des arêtes de $A_0(E)$; dans la colonne d'indice (ij) le seul terme non nul est sur la ligne d'indice (ij) et a pour valeur $t^{m_{ij}} - 1$.
- Les s_0 colonnes suivantes sont indexées par les indices des sommets de $A_0(E)$; dans la colonne d'indice (i) le terme d'indice ligne (ij) a pour valeur $(t^{m_{ij}} - 1)/(t^{r_i} - 1)$, et les termes d'indice ligne (jk) (où $j \neq i \neq k$) sont nuls.

Démonstration. — Cet énoncé est une traduction dans le langage des matrices de présentation de 5.3 et 5.9.

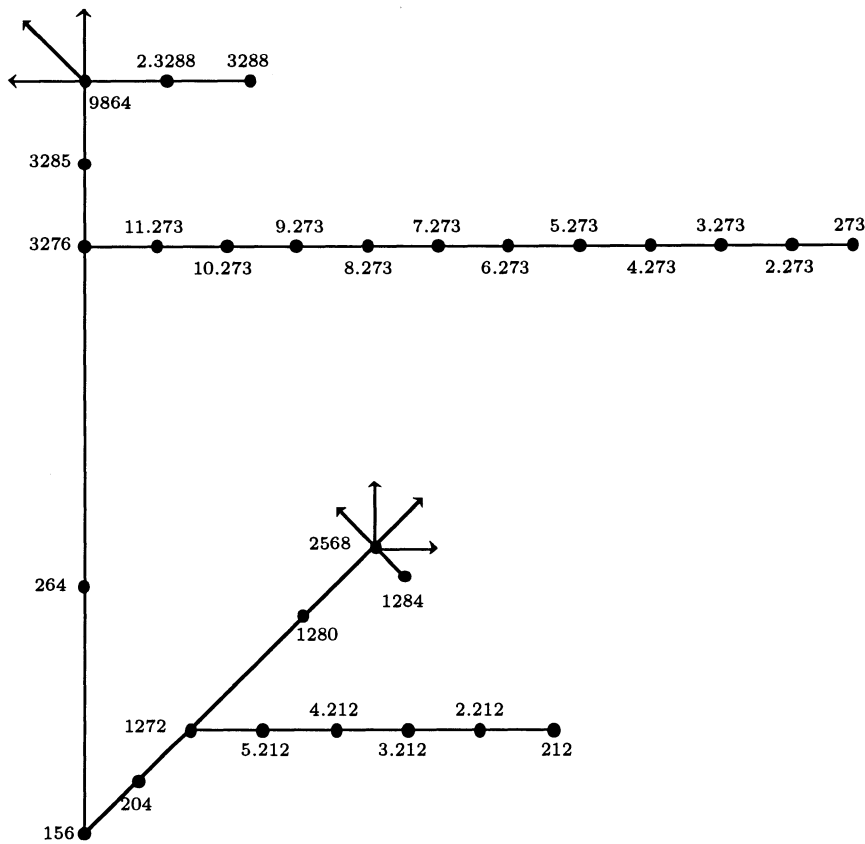
Exemple 5.11. — Nous allons maintenant calculer le $\mathrm{Gr}_0^M H^1(F)$ de singularités empruntées à [M.W1, t.2, en préparation]. Dans chaque cas, on donnera le $\mathbb{Z}T$ -module $\mathrm{Gr}_0^M H^1(F)$ sous la forme de somme de modules irréductibles. On notera qu'il n'y a pas de relation directe entre les facteurs irréductibles de Gr_0^M et les points de rupture.

5.11.1. — Cet exemple a été construit à notre intention par C. WEBER. On considère la singularité à 7 branches dont les branches ont pour développement de Puiseux :

$$\begin{aligned} y_n &= x + x^{25/12} + n \cdot x^{79/36}, & \text{où } n = 1, 2, 3; \\ y_k &= 2x + x^{13/6} + k \cdot x^{29/12}, & \text{où } k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$



L'arbre $A_0(E)$ et le graphe $G_0(D)$ de l'exemple 5.11.1.



L'arbre $A(E)$ de l'exemple 5.11.1.

La matrice de présentation associée est alors :

$$\mathcal{M}_0 = \begin{bmatrix} t^9 - 1 & 0 & 0 & \frac{t^9 - 1}{t - 1} & \frac{t^9 - 1}{t^3 - 1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{12} - 1 & 0 & 0 & \frac{t^{12} - 1}{t^3 - 1} & \frac{t^{12} - 1}{t^4 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & t^8 - 1 & 0 & 0 & \frac{t^8 - 1}{t^4 - 1} & \frac{t^8 - 1}{t - 1} \end{bmatrix}$$

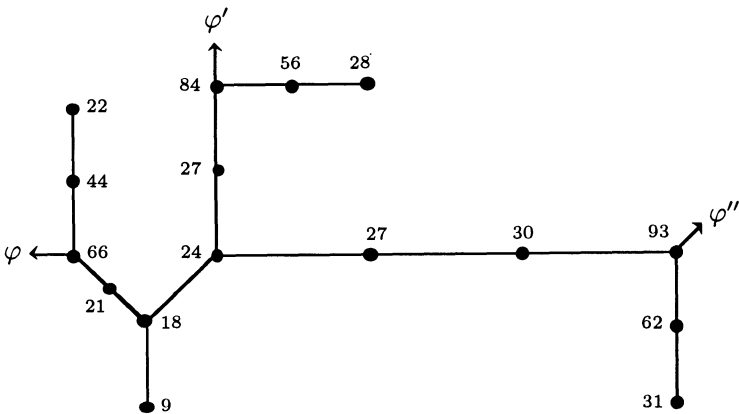
et après réduction, on trouve :

$$\mathrm{Gr}_0^M H^1(F) \simeq \mathbb{Z}T \Big/ \frac{t^{12} - 1}{t - 1} \times \frac{t^9 - 1}{t^3 - 1} \times \frac{t^8 - 1}{t^4 - 1}.$$

On démontre en réduisant modulo 2 et modulo 3 que ce $\mathbb{Z}T$ -module est indécomposable.

5.11.2. — Considérons la singularité à trois branches dont les branches ont pour développement de Puiseux

$$\varphi : y = x^2 + x^{10/3}, \quad \varphi' : y = x^3 + x^{13/3}, \quad \varphi'' : y = x^{16/3}.$$



L'arbre $A(E)$ de l'exemple 5.11.2.

Après réduction de la matrice de présentation, on trouve l'isomorphisme suivant :

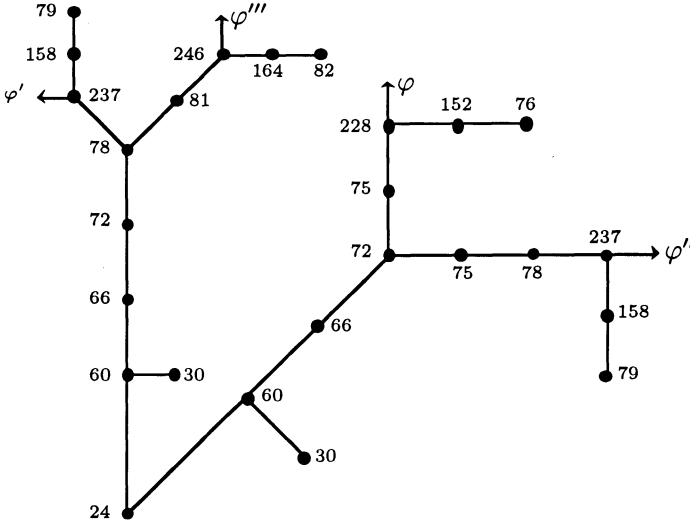
$$\mathrm{Gr}_0^M H^1(F) \simeq \mathbb{Z}T/((t^6 - 1)/(t - 1)) \oplus \mathbb{Z}T/((t^3 - 1)/(t - 1)).$$

On vérifie comme plus haut que les deux facteurs ci-dessus sont indécomposables.

5.11.3. — Considérons la singularité à quatre branches définie par les développements de Puiseux suivants :

$y = x^{3/2} + x^{19/6}$	pour la branche φ ,
$y = x + x^{3/2} + x^{19/6}$	pour la branche φ' ,
$y = x^{3/2} + x^{5/2} + x^{22/6}$	pour la branche φ'' ,
$y = x + x^{3/2} + x^{6/2} + x^{22/6}$	pour la branche φ''' .

L'arbre $A(E)$ comporte ici 8 points de rupture :



On laisse au lecteur le soin d'écrire la matrice \mathcal{M}_0 et de vérifier qu'après réduction on trouve :

$$\mathrm{Gr}_0^M H^1(F) \simeq \mathbb{Z}T/\Phi_2\Phi_4\Phi_3\Phi_6\Phi_{12} \oplus \mathbb{Z}T/\Phi_3 \oplus \mathbb{Z}T/\Phi_3.$$

On vérifie comme plus haut que les facteurs ci-dessus sont indécomposables.

6. Description du $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module $\mathrm{Gr}_2^M H^1(F)$

6.1. — Les notations sont celles de 3. Le point de départ est la suite exacte 3.10.3 :

$$0 \rightarrow \mathrm{Gr}_2^M H^1(F) \rightarrow \bigoplus_{i>j\geq 0} H^1(F_i \cap F_j) \rightarrow \bigoplus_{i>0} H^2(G_i) \rightarrow 0.$$

Après avoir dualisé, on trouve donc que $M_{-2}H_1(F)$ figure dans la suite exacte de $\mathbb{Z}T$ -modules suivante :

$$(6.1.2) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{i>0} \mathbb{Z}T/(t^{r_i} - 1) \xrightarrow{\Delta^\circ} \bigoplus_{i>j>0} \mathbb{Z}T/(t^{m_{ij}} - 1) \oplus \bigoplus_{i>0} (\mathbb{Z}T/(t - 1))^{b_i} \rightarrow M_{-2}H_1(F) \rightarrow 0$$

où la flèche Δ^0 est la somme de Δ définie en 5.2 et des flèches Δ_{i0} suivantes : Δ_{i0} est l'injection diagonale si $b_i \neq 0$ et $\Delta_{i0} = 0$ sinon.

La ressemblance entre les présentations des $\mathbb{Z}T$ -modules $M_0H^1(F)$ et $M_{-2}H_1(F)$ provient de la proposition suivante, qui se déduit immédiatement de 2.7 et 3.13.

PROPOSITION 6.2. — *La forme d'intersection \mathcal{J} définit un morphisme de $\mathbb{Z}T$ -modules $\pi = (\text{Ad}\mathcal{J})^t$ qui s'insère dans la suite exacte suivante :*

$$(6.2.1) \quad 0 \rightarrow (\mathbb{Z}T/(t-1))^{b-1} \rightarrow M_{-2}H_1(F) \xrightarrow{\pi} M_0H^1(F) \rightarrow 0.$$

Notation 6.3. — On notera B le fermé du graphe simplifié $G_0(D)$ défini en 5.8, constitué des extrémités extérieures des arêtes qui proviennent des flèches de $A(E)$, on a donc $\text{card } B = b$.

6.4. — La suite exacte de cohomologie relative de la paire $(G_0(D), B)$,

$$0 \rightarrow H^0(G_0(D)) \rightarrow H^0(B) \rightarrow H^1(G_0(D), B) \rightarrow H^1(G_0(D)) \rightarrow 0,$$

est une suite exacte de $\mathbb{Z}T$ -modules et l'on a les isomorphismes de $\mathbb{Z}T$ -modules suivants : $H^0(G_0(D)) \simeq \mathbb{Z}T/(t-1)$, $H^0(B) \simeq (\mathbb{Z}T/(t-1))^b$. On trouve, en comparant avec 6.2.1, le résultat suivant.

THÉORÈME 6.5. — *Les $\mathbb{Z}T$ -modules $\text{Gr}_{-2}^M H_1(F)$ et $H^1(G_0(D), B)$ sont isomorphes.*

THÉORÈME 6.6. — *Le $\mathbb{Z}T$ -module $\text{Gr}_{-2}^M H_1(F)$ admet une matrice de présentation \mathcal{M}_2 à $(a_0 + b)$ lignes et $(a_0 + s_0 + b)$ colonnes définie comme suit :*

- Les lignes de \mathcal{M}_2 sont indexées par les indices des arêtes de $A_0(E)$, les a_0 premières lignes correspondant aux arêtes de $A(E)$ et les b suivantes aux flèches de $A(E)$.

- Les $(a_0 + b)$ premières colonnes sont indexées par les indices des arêtes de $A_0(E)$ dans le même ordre ; si $j \neq 0$, le seul terme non nul dans la colonne d'indice (ij) est sur la ligne d'indice (ij) et a pour valeur $t^{m_{ij}} - 1$, dans les colonnes indexées par les flèches de $A(E)$, le seul terme non nul est sur la diagonale et a pour valeur $t - 1$.

- Les s_0 colonnes suivantes sont indexées par les indices des sommets de $A_0(E)$; dans la colonne d'indice (i) , les termes d'indice ligne (ij) ont pour valeur $(t^{m_{ij}} - 1)/(t^{r_i} - 1)$ si $j \neq 0$, les termes dont l'indice ligne correspond à une flèche d'origine le sommet d'indice i ont pour valeur 1, et les autres termes sont nuls.

Démonstration. — Cet énoncé est une traduction dans le langage des matrices de présentation de 6.1 et 6.5.

Exemple 6.7. — Reprenons les exemples précédents, et donnons dans chaque cas une décomposition de $\mathrm{Gr}_2^M H^1(F)$ en facteurs indécomposables.

6.7.1. — On trouve

$$\mathrm{Gr}_2^M H^1(F) \simeq \mathbb{Z}T / \left((t^{12} - 1) \times \frac{t^9 - 1}{t^3 - 1} \times \frac{t^8 - 1}{t^4 - 1} \right) \oplus (\mathbb{Z}T / (t - 1))^5,$$

en reprenant 5.11.1, et en réduisant la matrice de présentation \mathcal{M}_2 de la page suivante.

6.7.2. — L'exemple 5.11.2 donne

$$\mathrm{Gr}_2^M H^1(F) \simeq \mathbb{Z}T / (t^6 - 1) \oplus \mathbb{Z}T / (t^3 - 1).$$

6.7.3. — L'exemple 5.11.3 donne

$$\mathrm{Gr}_2^M H^1(F) \simeq \mathbb{Z}T / (t^{12} - 1) \oplus (\mathbb{Z}T / (t^3 - 1))^2.$$

Remarque 6.8. — Comme l'indique la PROPOSITION 6.2, et comme on le vérifie sur les exemples, le calcul de $\mathrm{Gr}_2^M H^1(F)$ donne immédiatement $\mathrm{Gr}_0^M H^1(F)$. Cependant, les matrices de présentation \mathcal{M}_0 sont plus petites que les matrices \mathcal{M}_2 (comparer 5.11.1 et 6.7.1) et il est donc plus simple de commencer par le Gr_0^M .

7. Un exemple de calcul du $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module $\mathrm{Gr}_1^M H^1(F)$

D'après 3.10, on a un isomorphisme

$$q^* : \mathrm{Gr}_1^M H^1(F) \simeq \bigoplus_i H^1(D_i),$$

où la somme directe peut être effectuée sur les seuls sommets de rupture. En effet, d'après 1.11, si le sommet (i) est de valence 1 ou 2, D_i est de genre 0.

7.1. — Nous allons utiliser les résultats de [M.W.2] pour donner un exemple de $\mathrm{Gr}_{-1}^M H_1(F)$. Le cas général sera traité dans un article ultérieur. Soit

$$f_{a,b,c,d}(x, y) = (x^a - y^b) \cdot (x^c - y^d),$$

avec $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, c) = \mathrm{pgcd}(c, d) = 1$, et $c/d < a/b$. La singularité ainsi définie est donc réduite, et a exactement 2 branches à l'origine. L'arbre de désingularisation présente 2 points de rupture. On notera i (resp. j) le point de rupture qui porte la flèche associée à la branche d'équation $x^a - y^b = 0$ (resp. $x^c - y^d = 0$). D'après [loc. cit., 4.9], la condition $\mathrm{pgcd}(b, c) = 1$ implique $m_{ij} = 1$, et on a donc $\mathrm{Gr}_0^M H_1(F) = 0$ et $\mathrm{Gr}_{-2}^M H_1(F) = \mathbb{Z}T / (t - 1)$.

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^9-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t^9-1}{t-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^{12}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t^{12}-1}{t^3-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^8-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t^{12}-1}{t^4-1} & \frac{t^8-1}{t^4-1} & \frac{t^8-1}{t-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice \mathcal{M}_2 de l'exemple 6.7.1.

THÉORÈME 7.2. — Notons $H_1(a, b, cd)$ le module de monodromie entière associé à la singularité définie en 7.1, notons D_i (resp. D_j) la courbe associée au point de rupture i (resp. j) par la construction 3.2 et posons

$$A_i(t) = (t^{b(a+c)} - 1)/(t^{a+c} - 1), \quad A_j(t) = (t^{c(b+d)} - 1)/(t^{b+d} - 1).$$

Le gradué $\text{Gr}_{-1}^M H_1(a, b, c, d)$ est alors la somme directe de

$$H_1(D_i, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}T/A_i(t) \quad \text{et} \quad H_1(D_j, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}T/A_j(t).$$

Démonstration. — D'après 7.1 et 2.4, on a

$$\text{Gr}_{-1}^M H_1(a, b, c, d) = H_1(a, b, c, d) / \text{Ker}(1 - t).$$

De plus, d'après [loc. cit., 4.14], la matrice suivante est une matrice de présentation de $H_1(a, b, c, d)$

$$\begin{bmatrix} (t-1)A_i(t) & A_i(t) \\ 0 & A_j(t) \end{bmatrix}$$

Par suite, $\text{Gr}_{-1}^M H_1(a, b, c, d) \simeq \mathbb{Z}T/A_i(t) \oplus \mathbb{Z}T/A_j(t)$, et on vérifie en étudiant la démonstration du théorème cité que $H_1(D_k) \simeq \mathbb{Z}T/A_k(t)$ pour $k = i$ ou j .

7.3. Application numérique. — Comme dans (loc. cit.), comparons les cas

$$I : (a, b, c, d) = (44, 21, 11, 14),$$

$$II : (a, b, c, d) = (22, 7, 33, 28).$$

Dans le cas I, on a

$$H_1(D_i) \simeq \mathbb{Z}T/((t^{21 \times 55} - 1)/(t^{55} - 1)),$$

$$H_1(D_j) \simeq \mathbb{Z}T/((t^{11 \times 35} - 1)/(t^{35} - 1)),$$

et dans le cas II,

$$H_1(D_i) \simeq \mathbb{Z}T/((t^{7 \times 55} - 1)/(t^{55} - 1)),$$

$$H_1(D_j) \simeq \mathbb{Z}T/((t^{33 \times 35} - 1)/(t^{35} - 1)).$$

On vérifie facilement que

$$\text{Gr}_{-1}^M H_1(44, 21, 11, 14) \otimes \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \text{Gr}_{-1}^M H_1(22, 7, 33, 28) \otimes \mathbb{Q}$$

sont des $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ -modules isomorphes; par contre on a le résultat suivant.

PROPOSITION 7.4. — *Les $\mathbb{Z}T$ -modules*

$$\mathrm{Gr}_{-1}^M H_1(44, 21, 11, 14) \quad \text{et} \quad \mathrm{Gr}_{-1}^M H_1(22, 7, 33, 28)$$

ne sont pas isomorphes.

Démonstration. — Il suffit de voir que les $\mathbb{F}_3[t, t^{-1}]$ -modules obtenus par réduction modulo 3 ont des polynômes minimaux distincts. On a

$$t^{3 \times 5 \times 7 \times 11} - 1 \cong (t^{5 \times 7 \times 11} - 1)^3 \pmod{3};$$

par suite, dans $\mathbb{F}_3[t, t^{-1}]$,

$$\begin{aligned} ((t^{11 \times 35} - 1)/(t^{35} - 1)) &\text{ divise } ((t^{21 \times 55} - 1)/(t^{55} - 1)), \\ ((t^{7 \times 55} - 1)/(t^{55} - 1)) &\text{ divise } ((t^{33 \times 35} - 1)/(t^{35} - 1)). \end{aligned}$$

Le polynôme minimal est donc

$$\text{dans le cas I : } ((t^{3 \times 5 \times 7 \times 11} - 1)/(t^{55} - 1));$$

$$\text{dans le cas II : } ((t^{3 \times 5 \times 7 \times 11} - 1)/(t^{35} - 1)). \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

- [B.K.] BRIESKORN (E.) et KNORRER (H.) . — *Plane Algebraic Curves*. — Birkhäuser.
- [H.III] DELIGNE (P.). — Théorie de Hodge III, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, t. **44**, 1972, p. 5–77.
- [D] DURFEE (A.) . — Fibered Knots and Algebraic Singularities, *Topology*, t. **13**, 1974, p. 47–59.
- [J.S.] JACO (W.) et SHALEN (P.). — *Seifert Fibered Spaces in 3-Manifolds*, A.M.S. Memoirs n° **220**.
- [L.M.W.] LE DUNG TRANG, MICHEL (F.) et WEBER (C.). — Courbes Polaires et Topologie des Courbes Planes, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, t. **24**, 1991.

- [L.S.] LE VAN THANH et STEENBRINK (J.H.M.). — *Le Spectre d'une Singularité d'un germe de Courbe Plane*. — Preprint Math. Inst. Catholic University of Nijmegen, 1988.
- [M] MILNOR (J.). — Singular Points of Complex Hypersurfaces, *Ann. of Math. Stud.*, t. **61**, 1968.
- [M.W1] MICHEL (F.) et WEBER (C.). — *Topologie des Germes de Courbes Planes à plusieurs Branches*. — Université de Genève, 1985.
- [M.W2] MICHEL (F.) et WEBER (C.). — Sur le Rôle de la Monodromie Entière dans la Topologie des Singularités, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, t. **36**, **1**, 1986, p. 183–218.
- [S1] STEENBRINK (J.H.M.). — Limits of Hodge Structures, *Invent. Math.*, t. **31**, 1976, p. 229–257.
- [S2] STEENBRINK (J.H.M.). — *Mixed Hodge Structure on the Vanishing Cohomology*, Nordic Summer School/NAVF, Symposium in Math., Oslo, 1976.
- [S.Z] STEENBRINK (J.H.M.) et ZUCKER (S.). — *Variation of Mixed Hodge Structure, I*. — Preprint Math. Inst. University of Leiden, 1984.