

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JOËL BRIANÇON

F. GEANDIER

PHILIPPE MAISONOBE

## **Déformation d'une singularité isolée d'hypersurface et polynômes de Bernstein**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 120, n° 1 (1992), p. 15-49

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1992\\_\\_120\\_1\\_15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_1_15_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## DÉFORMATION D'UNE SINGULARITÉ ISOLÉE D'HYPERSURFACE ET POLYNÔMES DE BERNSTEIN

PAR

J. BRIANÇON, F. GEANDIER ET

PH. MAISONOBE (\*)

---

RÉSUMÉ. — Nous étudions le polynôme de Bernstein d'une famille  $(W_y)_{y \in Y}$ , d'hypersurfaces de  $\mathbb{C}^n$  à singularités isolées, paramétrée par un espace lisse  $Y$ , définie par une application holomorphe  $F$  sur  $\mathbb{C}^n \times Y$ . Nous montrons que la partition de l'espace des paramètres  $Y$  définie par le polynôme de Bernstein  $b_y$  de la fibre  $W_y$  est localement finie, "constructible".

Nous prouvons l'existence d'un polynôme de Bernstein "générique" qui coïncide avec le polynôme de Bernstein de la fibre générique.

Dans le cas particulier où la famille  $(W_y)_{y \in Y}$  est à nombre de Milnor constant, nous montrons l'existence d'un "bon" opérateur en  $s$  dans l'anneau des opérateurs différentiels relatifs polynomiaux en  $s$ , annulant  $F^s$ ; ainsi que l'existence d'un polynôme de Bernstein "relatif".

ABSTRACT. — We study the Bernstein's polynomial of a family  $(W_y)_{y \in Y}$  of hypersurfaces of  $\mathbb{C}^n$  with isolated singularities when the family is parametrized by a smooth space  $Y$  and defined by an holomorphic mapping  $F$  on  $\mathbb{C}^n \times Y$ . We show that the partition defined by the Bernstein's polynomial  $b_y$  of the fiber  $W_y$  of the parameter-space  $Y$  is locally finite and "constructible".

We prove the existence of a generic Bernstein's polynomial which coincide with the Bernstein's polynomial of the generic fiber.

In the particular case where the family  $(W_y)_{y \in Y}$  has a constant Milnor's number we establish the existence of a "good operator in  $s$ " in the ring of the relative differential operators which are polynomial in  $s$ , nullifying  $F^s$ ; and the existence of a "relative" Bernstein's polynomial.

Dans ce travail, nous étudions le polynôme de Bernstein d'une famille  $(W_y)_{y \in Y}$  d'hypersurfaces de  $\mathbb{C}^n$  à singularités isolées, paramétrée

---

(\*) Texte reçu le 28 juin 1990, révisé le 20 février 1991.

J. BRIANÇON, F. GEANDIER et Ph. MAISONOBE, Université de Nice, Laboratoire de Mathématiques, Parc Valrose, F 06034 Nice Cedex.

par un espace lisse  $Y$ , définie par une application holomorphe

$$F : X = \mathbb{C}^n \times Y \rightarrow \mathbb{C} ;$$

en fait notre étude est locale, au voisinage d'une singularité isolée de la fibre spéciale  $W_o$ ,  $o \in Y$ . Essentiellement, nous montrons que la partition de l'espace des paramètres  $Y$  définie par le polynôme de Bernstein  $b_y$  de la fibre  $W_y$  est localement finie, constructible.

En passant, nous prouvons l'existence d'un polynôme générique (c'est-à-dire réalisant l'équation fonctionnelle  $b(s)F^s = PF^{s+1}$ , lorsqu'on étend les coefficients des opérateurs différentiels relatifs  $\mathcal{D}_{X/Y}[s]$  au corps des fractions de  $\mathcal{O}_{Y,0}$ , et que ce polynôme  $b_g$  est effectivement le polynôme de Bernstein  $b_y$  de la fibre  $W_y$  lorsque  $y$  appartient à un ouvert de Zariski non vide de  $Y$ ).

Dans le cas particulier où la famille  $(W_y)_{y \in Y}$  est à nombre de Milnor constant, notre étude généralise les résultats de F. GEANDIER ([Ge1], [Ge2]) : nous montrons l'existence d'un bon opérateur en  $s$  dans l'anneau  $\mathcal{D}_{X/Y}[s]$  des opérateurs différentiels relatifs polynomiaux en  $s$ , annihilant  $F^s$  ; ainsi que l'existence d'un polynôme de Bernstein "en famille" ou "relatif" (c'est-à-dire lorsque l'on prend dans la relation fonctionnelle, l'opérateur dans  $\mathcal{D}_{X/Y}[s]$ ).

Notre méthode repose pour l'essentiel sur la description de la variété caractéristique de  $\mathcal{D}_X[s]F^s$  donnée par M. KASHIWARA dans [Kas] ; dans l'appendice B, nous montrons comment un théorème de C. SABBABH [Sa] permet d'obtenir une version relative plus fine. Pour mener à bien notre quête de l'analyticité, l'idée est d'essayer de plonger la cohomologie de De Rham d'un  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -module  $\mathcal{M}$  (précisément :

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_{X/Y}[s]F^s / \mathcal{D}_{X/Y}[s](F, \mathcal{I}(F))F^s$$

où  $\mathcal{I}(F)$  est l'idéal jacobien relatif), à support fini au-dessus de  $Y$ , dans un  $\mathcal{O}_Y$ -module de type fini ; la difficulté vient du fait que  $\mathcal{M}$  n'est en général pas de type fini sur  $\mathcal{D}_{X/Y}$  ; il nous a donc fallu montrer d'abord la finitude de la stratification pour pouvoir "tronquer"  $\mathcal{M}$  en un certain degré en  $s$  : d'où quelques complications techniques. Dans l'appendice A nous donnons quelques résultats généraux sur les  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -modules cohérents à support fini au-dessus de l'espace des paramètres  $Y$ , et en particulier sur leur cohomologie de De Rham.

*Plan :*

0. Description de la situation et notations
1. Existence du polynôme de Bernstein générique
2. Finitude de la stratification
3. Analyticité et polynôme de Bernstein générique
4. Déformations à “ $\mu$ -constant”
5. Exemples

Appendice A :  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -modules relatifs à support fini au-dessus de l'espace des paramètres

Appendice B : Variété caractéristique de  $\mathcal{D}_{X/Y}[s]F^s$ .

## 0. Description de la situation et notations

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$  et  $Y \subset \mathbb{C}^p$  sont des polydisques ouverts de centre l'origine,  $X = \Omega \times Y$ ,  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction analytique définissant l'hypersurface  $W = F^{-1}(0)$  de  $X$ .  $\pi : X \rightarrow Y$  désigne la projection canonique sur  $Y$ , “espace des paramètres”.

Pour  $y \in Y$ , soit  $i_y : \Omega \rightarrow X$  l'injection canonique définie par  $i_y(x) = (x, y)$  et  $W_y$  l'hypersurface de  $\Omega$  définie par la fonction  $F_y = F \circ i_y$ . On dit que  $W_y$  est la fibre en  $y$  de la déformation  $W$  de  $W_0$ , fibre spéciale.

Nous notons  $C$  le lieu critique de  $F$  relatif à  $\pi$ , sous-espace analytique de  $X$  défini par l'idéal :

$$\mathcal{I} = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) \mathcal{O}_X$$

et  $\Gamma \subset C$  le lieu singulier relatif de  $W$ , sous-espace de  $X$  défini par l'idéal

$$\mathcal{J} = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, F \right) \mathcal{O}_X.$$

*Situation générale :* déformation d'une singularité d'hypersurface.

Nous supposons que la fibre spéciale  $W_0$  admet l'unique point singulier 0, origine de  $\Omega$ . De plus, nous supposons que la restriction de la projection  $\pi$  à  $C$  est propre, finie. Remarquons que si nous nous donnons le germe en 0 d'une déformation d'une singularité isolée d'hypersurface de  $\mathbb{C}^n$ , nous pouvons en trouver un représentant satisfaisant aux propriétés demandées (grâce au théorème de préparation de Weierstrass).

*Situation à “ $\mu$ -constant” :* il s'agit d'un cas particulier de la situation précédente : on suppose  $|C| = |\Gamma| = \{0\} \times Y$ . Cela signifie que chaque

fibres  $W_y$  admet l'unique singularité  $\{0\}$ , avec nombre de Milnor constant lorsque  $y$  parcourt  $Y$ .

Remarquons que l'existence d'une section  $\tau : Y \rightarrow W$  de  $\pi|_W$  telle que  $W_y$  possède en  $\tau(y)$  une singularité avec nombre de Milnor constant, permet de se ramener au cas précédent par changement de coordonnées  $x = \tau(y) + x'$ .

Supposons "seulement"  $|C| = |\Gamma|$ ; cela se traduit en disant que la somme des nombres de Milnor des singularités de  $W_y$  est égale au nombre de Milnor de  $W_0$ . Le théorème de F. LAZZERI ([La, corollaire p. 274]), montre alors qu'on est dans la situation précédente, à nombre de Milnor constant le long d'une section.

*Notations :*

$\partial/\partial x_i$  désignera l'opérateur de dérivation par rapport à la variable  $x_i$ . Les faisceaux d'opérateurs différentiels seront notés :

- $\mathcal{D}_\Omega = \mathcal{O}_\Omega \langle \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_n \rangle$ ,
- $\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X \langle \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_n; \partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_p \rangle$ ,
- $\mathcal{D}_{X/Y} = \mathcal{O}_X \langle \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_n \rangle$ , sous faisceau de  $\mathcal{D}_X$  des opérateurs différentiels relatifs sur  $X$ .

Puis  $\mathcal{D}_X[s]$ ,  $\mathcal{D}_\Omega[s]$ ,  $\mathcal{D}_{X/Y}[s]$ , opérateurs à coefficients polynomiaux en  $s$ .

Un opérateur différentiel  $P$  de  $\mathcal{D}_X[s]$  par exemple s'écrit :

$$P = \sum a_{\alpha, \beta, k}(x, y) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^\beta s^k,$$

somme finie avec  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{N}^p$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_{\alpha, \beta, k}$  section de  $\mathcal{O}_X$  et

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^\beta &= \left( \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^{\beta_1} \left( \frac{\partial}{\partial y_2} \right)^{\beta_2} \dots \left( \frac{\partial}{\partial y_p} \right)^{\beta_p}. \end{aligned}$$

Le degré total de  $P$  est

$$d(P) = \sup\{|\alpha| + |\beta| + k; a_{\alpha, \beta, k} \neq 0\}$$

où  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ,  $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p$  et le symbole total de  $P$  est

$$\sigma(P) = \sum_{|\alpha| + |\beta| + k = d(P)} a_{\alpha, \beta, k} \xi^\alpha \eta^\beta s^k \in \mathcal{O}_X[\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_p, s].$$

Le fibré cotangent à  $X$ ,  $T^*X$ , est identifié à  $X \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$  et le fibré cotangent relatif  $T^*(X/Y)$  est identifié à  $X \times \mathbb{C}^n$ .

Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent, car  $(\mathcal{M}) \subset T^*X$  désigne sa variété caractéristique,  $\text{supp}(\mathcal{M})$  son support,  $\mathcal{M}_0$  son germe en 0.

*Polynômes de Bernstein :*

- $b$  : polynôme de Bernstein absolu (ou ambiant), polynôme unitaire de degré minimum satisfaisant à l'équation fonctionnelle :

$$b(s)F^s = PF^{s+1} \quad \text{avec } P \in \mathcal{D}_{X,0}[s], \quad b(s) = (s+1)\tilde{b}(s).$$

- $b_y$  : polynôme de Bernstein de la fibre  $W_y$ , ppcm des polynômes de Bernstein locaux de  $W_y$  en chaque point.
- $b_g$  : polynôme de Bernstein générique; dans l'équation fonctionnelle l'opérateur est relatif et ses coefficients sont étendus au corps des fractions de  $\mathcal{O}_{Y,0}$ .

$P \in \text{Frac}(\mathcal{O}_{Y,0}) \otimes \mathcal{D}_{X/Y,0}[s]$  (produit au-dessus de  $\mathcal{O}_{Y,0}$ ).

- $b_{X/Y}$  : polynôme de Bernstein "relatif" ou en "famille", s'il existe : dans l'équation fonctionnelle  $P \in \mathcal{D}_{X/Y,0}[s]$ .

### 1. Existence du polynôme de Bernstein générique

Nous nous plaçons dans la situation décrite au § 0. Le lieu critique  $C$  est une intersection complète, donc de dimension pure  $p$ ; parmi ses composantes irréductibles nous pouvons distinguer celles dont le support est contenu dans  $W$ , donc dans  $|\Gamma|$  : nous notons  $C'$  la réunion de ces composantes,  $C''$  la réunion des autres,  $C = C' \cup C''$ . Remarquons que  $C' = \emptyset$  signifie que la fibre générique  $W_y$  est lisse, et  $C'' = \emptyset$  signifie  $\mu$  constant.

Introduisons  $\bar{\mathcal{J}}$  la clôture intégrale de l'idéal  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{O}_X$ ;  $\bar{\mathcal{J}}$  définit le même ensemble analytique  $|\Gamma|$  que  $\mathcal{J}$  (voir [L.T] pour la définition et les propriétés de  $\bar{\mathcal{J}}$  en particulier la cohérence).

Considérons la décomposition de  $\bar{\mathcal{J}}$  à l'origine :  $\bar{\mathcal{J}}_0 = J' \cap J''$  où  $J'$  définit  $\Gamma'$  réunion des composantes de dimension  $p$  au voisinage de 0, et où  $J''$  définit  $\Gamma''$  réunion des composantes de dimension strictement inférieure à  $p$ . Quitte à réduire le polydisque  $X$  nous supposons cette décomposition valable dans  $X$ , et donc  $|\Gamma'| = |C'|$ .

LEMME 1.1. — Soit  $\tau \in J''(X) \cap \mathcal{O}_Y(Y)$ ; pour tout  $j = 1, \dots, p$  :

$$\tau \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j} \in \bar{\mathcal{J}}(X).$$

Commençons par prouver le résultat préliminaire suivant. Soient  $\tau \in J''(X) \cap \mathcal{O}_Y(Y)$  et  $\phi \in \mathcal{O}_X(X)$ ; on suppose l'existence d'un ouvert de Zariski  $U' \subset |C'|$  dense tel que, en tout point  $z$  de  $U'$ ,  $\phi_z \in J'_z$  dans l'anneau des germes  $\mathcal{O}_{X,z}$ . Montrons qu'alors  $\tau\phi \in \bar{\mathcal{J}}(X)$ . En effet, par hypothèse, le support de  $(J' + \phi\mathcal{O}_X)/J'$  est contenu dans l'ensemble analytique  $A = |C'| - U'$  de dimension strictement inférieure à  $p$ . Comme  $\pi$  en restriction à  $C$  est finie,  $\pi(A) \neq Y$ , et il existe  $\lambda \in \mathcal{O}_Y(Y)$  non nulle et identique à 0 sur  $A$ ; par le théorème des zéros, il existe  $\ell \in \mathbb{N}$  tel que  $\lambda^\ell \phi \in J'(X)$ . Dans la situation finie où nous sommes,  $\mathcal{O}_X/J'$  est sans  $\mathcal{O}_Y$ -torsion si et seulement si  $\mathcal{O}_X/J'$  est de dimension pure  $p$ , ce qui est notre cas par définition de  $J'$ . Donc  $\phi \in J'(X)$  et le résultat préliminaire  $\tau\phi \in J'(X)J''(X) \subset \bar{\mathcal{J}}(X)$  est ainsi démontré.

Nous allons appliquer ce résultat à  $\phi = \partial F / \partial y_j$  ce qui prouvera le LEMME 1.1. La restriction de  $\pi$  à  $|C'|$  est un revêtement ramifié : il existe un sous ensemble analytique  $A \subset |C'|$  de dimension strictement inférieure à  $p$  tel qu'en tout point  $z \in U' = |C'| - A$  :  $\sqrt{\mathcal{I}_z} = \sqrt{\mathcal{I}_z}$  et  $\pi$  en restriction à  $U'$  est un isomorphisme local. Nous voyons alors que  $W$  est, au voisinage de  $z$ , une déformation à nombre de Milnor constant, et donc  $\partial F / \partial y_j \in \bar{\mathcal{I}}_z = \bar{\mathcal{I}}_z$  dans l'anneau des germes  $\mathcal{O}_{X,z}$  d'après B. TEISSIER ([T1] ou [B.S, proposition 1.2.1]).

PROPOSITION 1.2. — Soit  $F \in \mathcal{O}_{X,0}$  définissant un germe de déformation à  $p$  paramètres d'une singularité isolée d'hypersurface complexe à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ . Il existe  $\lambda \in \mathcal{O}_{Y,0}$  non nul,  $c \in \mathbb{C}[s]$  non nul, et un opérateur différentiel relatif  $P \in \mathcal{D}_{X/Y,0}[s]$  satisfaisant à la relation fonctionnelle :

$$\lambda(y)c(s)F^s = PF^{s+1}.$$

Preuve. — D'après le LEMME 1.1, pour chaque  $j = 1, \dots, p$  nous pouvons trouver une relation de dépendance intégrale :

$$\sigma_j\left(\tau \frac{\partial F}{\partial y_j}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, F\right) = 0,$$

où  $\sigma_j(u, \xi_1, \dots, \xi_n, s) = u^r + \lambda_1 u^{r-1} + \dots + \lambda_r$  avec  $\lambda_k(\xi_1, \dots, \xi_n, s) \in \mathcal{O}_X[\xi_1, \dots, \xi_n, s]$  homogène de degré  $k$  pour  $k = 1, \dots, r$ .

Cela se traduit en disant que

$$\omega_j(x, y, \xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_p, s) = \sigma_j(\tau \eta_j, \xi_1, \dots, \xi_n, s)$$

s'annule sur la variété caractéristique de  $\mathcal{D}_X[s]F^s$  d'après M. KASHIWARA ([Kas] ou [Y, proposition 2.3]). Par conséquent il existe un

opérateur  $P_j \in \mathcal{D}_{X,0}[s]$  dont le symbole total est une puissance de  $\sigma_j(\tau\eta_j, \xi_1, \dots, \xi_n, s)$  qui annule  $F^s$ . Nous écrivons :

$$P_j = \tau(y)^{n_j} \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)^{n_j} + S_j,$$

où le degré total de  $S_j$  est  $\leq n_j$  et le degré de  $S_j$  par rapport aux dérivations  $(\partial/\partial y_j)_{1 \leq k \leq p}$  est  $< n_j$ . Par récurrence sur le degré par rapport aux dérivations  $(\partial/\partial y_j)$  on démontre facilement *un lemme de division* :

*Étant donné  $A \in \mathcal{D}_{X,0}[s]$ , il existe un entier  $N$ , des opérateurs  $(B_j)_{j=1, \dots, p}$  et  $R$  dans  $\mathcal{D}_{X,0}[s]$  vérifiant  $\tau^N A = \sum B_j P_j + R$  où le degré total de  $R$  est  $\leq$  au degré total de  $A$  et le degré de  $R$  par rapport aux  $\partial/\partial y_j$  est  $<$  à  $n_j$ .*

En itérant la relation fonctionnelle définissant le polynôme de Bernstein absolu de  $F$  nous avons :

$$b(s)b(s+1) \cdots b(s+\ell-1)F^s = AF^{s+\ell}$$

et en utilisant le lemme de division par les opérateurs  $P_j(s+\ell)$  on obtient

$$\tau^N b(s)b(s+1) \cdots b(s+\ell-1)F^s = RF^{s+\ell}$$

où le degré de  $R$  par rapport aux dérivations  $\partial/\partial y_j$  est au plus égal à  $\sum (n_j - 1)$ ; fixons  $\ell = \sum (n_j - 1) + 1$  et écrivons

$$R = (s+\ell)R_1 + \sum S_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum T_j \frac{\partial}{\partial y_j};$$

les opérateurs  $S_i$  ne dépendant pas de  $\partial/\partial y_j$ , et  $R_1 \in \mathcal{O}_{X,0}[s]$ . Faisons opérer et simplifions par  $s+\ell$  :

$$\begin{aligned} \tau^N b(s)b(s+1) \cdots \tilde{b}(s+\ell-1)F^s \\ = \left( R_1 F + \sum S_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum T_j \frac{\partial F}{\partial y_j} \right) F^{s+\ell-1} \end{aligned}$$

(où  $b(s) = (s+1)\tilde{b}(s)$ ).

En itérant ce procédé au bout de  $(\ell-1)$  opérations

$$\tau^N (s+1)\tilde{b}(s)\tilde{b}(s+1) \cdots \tilde{b}(s+\ell-1)F^s = QF^{s+1},$$

où maintenant  $Q$  est un opérateur différentiel indépendant des dérivations par rapport aux paramètres.



Le générateur unitaire de l'idéal des polynômes  $c \in \mathbb{C}[s]$  satisfaisant à l'équation fonctionnelle suivante :

$$\exists \lambda \in \mathcal{O}_{Y,0}, \exists P \in \mathcal{D}_{X,0}[s], \quad \lambda(y)c(s)F^s = PF^{s+1}$$

est appelé polynôme de Bernstein générique du germe de déformation  $W = F^{-1}(0)$ . Nous le notons  $b_g$  et nous montrerons plus loin qu'il est égal au polynôme de Bernstein de la fibre générique  $W_y$  de  $W$ .

Nous allons maintenant définir un polynôme de Bernstein générique le long de chaque composante  $\Gamma_\alpha$  de dimension  $p$  du lieu singulier relatif  $\Gamma$ .

Soit  $\mathcal{I} = (\partial F/\partial x_1, \dots, \partial F/\partial x_n)\mathcal{O}_X = \bigcap \mathcal{I}_\beta$  la décomposition primaire de l'intersection complète  $C$  à l'origine. Soit  $C'_\alpha$  la composante primaire définie par  $\mathcal{I}_\alpha$  telle que  $|C'_\alpha| = |\Gamma_\alpha|$ . Nous avons vu que sur un ouvert dense de Zariski nous avons " $\mu$  constant", donc  $\partial F/\partial y_j \in \bar{\mathcal{I}}_z$  en tout point  $z$  de cet ouvert. Choisissons une fonction analytique  $h_\alpha \in (\bigcap \mathcal{I}_\beta)_{\beta \neq \alpha} - \mathcal{I}_\alpha$ ; alors sur un ouvert de Zariski dense de  $|C|$  nous avons  $h_\alpha \partial F/\partial y_j \in \bar{\mathcal{I}}_z$ . Nous pouvons conclure ([T2, Appendice I, corollaire 1.2] ou [BS, § I.1]) que  $h_\alpha \partial F/\partial y_j \in \bar{\mathcal{I}}_0$ . De même  $h_\alpha F \in \bar{\mathcal{I}}_0$ . En prenant comme plus haut des relations de dépendance intégrale et en utilisant comme plus haut le théorème de Kashiwara, nous en déduisons l'existence d'opérateurs dans  $\mathcal{D}_{X,0}[s]$  annulant  $F^s$  de la forme :

$$P_j = h_\alpha^{n_j} (\partial F/\partial y_j)^{n_j} + S_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq p,$$

$$Q = h_\alpha^m s^m + S,$$

où le degré total de  $S_j$  (resp.  $S$ ) est au plus égal à  $n_j$  (resp.  $m$ ), et le degré de  $S_j$  (resp.  $S$ ) par rapport à  $s$  et aux dérivations  $\partial F/\partial y_j$  est strictement inférieur à  $n_j$  (resp.  $m$ ).

De nouveau par le même procédé, itération et division par les opérateurs  $P_j(s + \ell)$  et  $Q(s + \ell)$ , nous prouvons l'existence d'un entier  $N$ , d'un opérateur différentiel  $P$  relatif et indépendant de  $s$  tel que :

$$(h_\alpha)^N (s+1) \tilde{b}(s) \tilde{b}(s+1) \cdots \tilde{b}(s+\ell-1) F^s = PF^{s+1}$$

(prendre  $l = \sum (n_j - 1) + m$ ).

Nous savons que l'annulateur dans  $\mathcal{D}_{X/Y}$  de  $F^s$  est l'idéal à gauche engendré par les opérateurs  $(\partial F/\partial x_k \partial/\partial x_\ell - \partial F/\partial x_\ell \partial/\partial x_k)$  ceci car les dérivées partielles forment une suite régulière : signalé dans [Ma, p. 117] ou [Y, théorème 2.19]).

Or, dans la relation  $h_\alpha^N c(s) F^s = PF^{s+1}$  obtenue, si le degré de  $P$  est strictement supérieur au degré de  $c$ , son symbole  $\sigma(P)(\xi_1, \dots, \xi_n)$  fournit

une relation homogène entre les dérivées partielles  $(\partial F/\partial x_1, \dots, \partial F/\partial x_n)$ ;  $\sigma(P)$  est donc dans l'idéal engendré par les  $\partial F/\partial x_k \xi_\ell - \partial F/\partial x_\ell \xi_k$  et en enlevant à  $P$  un élément de l'annulateur de  $F^s$ , nous pouvons remplacer  $P$  par un opérateur de degré strictement plus petit. Ainsi dans la relation  $h_\alpha^N c(s) = PF^{s+1}$ , nous pouvons supposer de plus  $d(P) \leq \deg(c)$ . Nous avons démontré :

PROPOSITION 1.3. — *Soit  $F \in \mathcal{O}_{X,0}$  définissant un germe de déformation à  $p$  paramètres d'une singularité isolée d'hypersurface complexe à l'origine de  $\mathbb{C}^n$  et soit  $\Gamma_\alpha$  une composante de dimension  $p$  du lieu singulier relatif  $\Gamma$ . Il existe  $\lambda \in \mathcal{O}_{X,0}$  non identique à 0 sur  $\Gamma_\alpha$ ,  $c \in \mathbb{C}[s]$  non nul et un opérateur différentiel relatif  $P \in \mathcal{D}_{X/Y,0}$  de degré au plus égal au degré de  $c$  tel que  $\lambda \cdot c(s)F^s = PF^{s+1}$ .*

Nous notons  $b_{\Gamma_\alpha}$  le générateur de l'idéal des polynômes  $c$  de  $\mathbb{C}[s]$  définis ainsi : il existe  $\lambda \in \mathcal{O}_{X,0}$  non identique à 0 sur  $\Gamma_\alpha$ ,  $c \in \mathbb{C}[s]$  non nul et un opérateur différentiel relatif  $P \in \mathcal{D}_{X/Y,0}[s]$  tel que :

$$\lambda \cdot c(s)F^s = PF^{s+1}.$$

Nous appelons  $b_{\Gamma_\alpha}$  le polynôme de Bernstein générique de la déformation  $W$  le long de  $\Gamma_\alpha$ . C'est le polynôme de Bernstein de  $F$  lorsque l'on prend l'opérateur différentiel relatif à coefficients dans le localisé de  $\mathcal{O}_{X,0}$  en  $\Gamma_\alpha$ .

Remarquons en fait que, avec la condition de degré, la PROPOSITION 1.3 nous dit plus : elle nous donne en plus l'existence d'un bon opérateur en  $s$  annihilant  $F^s$ , à coefficients dans le localisé en question. Pour l'existence de  $b_{\Gamma_\alpha}$ , la PROPOSITION 1.2 suffisait, bien sûr.

PROPOSITION 1.4. — *Soit  $b_g$  le polynôme générique de la déformation  $W = F^{-1}(0)$ ,  $b_{\Gamma_\alpha}$  le polynôme de Bernstein générique de  $W$  le long de  $\Gamma_\alpha$  composante de dimension  $p$  du lieu singulier relatif  $\Gamma$ . On a  $b_g = \text{ppcm}(b_{\Gamma_\alpha})$  lorsque  $\Gamma_\alpha$  parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de dimension  $p$  de  $\Gamma$ .*

*Preuve.* — Il est évident d'abord, que  $\lambda \in \mathcal{O}_{Y,0}$  non nul ne peut s'annuler identiquement sur une composante  $\Gamma_\alpha$  de dimension  $p$  finie sur  $Y$ ; donc  $b_g$  est multiple de tous les polynômes  $b_{\Gamma_\alpha}$ .

Réciproquement supposons pour tout  $\alpha$  :

$$h_\alpha b_{\Gamma_\alpha}(s)F^s = P_\alpha F^{s+1}$$

où  $h_\alpha \in \mathcal{O}_{X,0}$  ne s'annule pas identiquement sur  $\Gamma_\alpha$  et  $P_\alpha \in \mathcal{D}_{X/Y,0}[s]$ . Notons  $c(s)$  le ppcm des polynômes  $b_{\Gamma_\alpha}(s)$ ; nous obtenons :

- $h_\alpha c(s)F^s = QF^{s+1}$  pour  $\Gamma_\alpha$  composante de dimension  $p$  de  $\Gamma$  ;
- $Fc(s)F^s = c(s)F^{s+1}$  ;
- $\partial F/\partial x_i c(s)F^s = \tilde{c}(s)(\partial F^{s+1}/\partial x_i)$ .

Comme  $h_\alpha$  ne s'annule pas identiquement sur  $\Gamma_\alpha$ , l'idéal engendré par les fonctions  $h_\alpha$ ,  $F$  et les dérivées partielles  $\partial F/\partial x_i$  définit un sous espace analytique de  $\Gamma$  de dimension strictement inférieure à  $p$  ; il existe donc un élément  $\lambda \in \mathcal{O}_{Y,0}$  non nul appartenant à cet idéal et on fabrique ainsi une relation :

$$\lambda(y)c(s)F^s = PF^{s+1} \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{D}_{X/Y,0}[s].$$

## 2. Finitude de la stratification

Dans ce paragraphe, nous ne supposons plus que l'espace  $Y$  des paramètres est lisse : nous supposons seulement que  $Y$  est un représentant d'un germe d'espace analytique réduit et  $F : X = \Omega \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  représente un germe de fonction analytique ; la fibre  $W_y \subset \Omega$  a un nombre fini de singularités isolées et nous notons  $b_y = (s+1)\tilde{b}_y$  son polynôme de Bernstein égal au ppcm des polynômes de Bernstein locaux en ses points singuliers dans  $\Omega$  :  $\tilde{b}_y$  est le polynôme minimal de l'action de  $s$  sur le faisceau :

$$\mathcal{D}_\Omega[s](F_y)^s / \mathcal{D}_\Omega[s](F_y, \partial F_y/\partial x_1, \dots, \partial F_y/\partial x_n)(F_y)^s$$

dont le support est justement le lieu singulier de  $W_y$ .

**PROPOSITION 2.1.** — *Soit  $F \in \mathcal{O}_{X,0}$  définissant un germe de déformation d'une singularité isolée  $W_0$  d'hypersurface complexe à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ , paramétrée par un espace réduit  $Y$ .*

*Il existe un polydisque  $\Omega$  de centre 0 dans  $\mathbb{C}^n$ , un voisinage  $V$  de 0 dans  $Y$ , satisfaisant à :*

- il existe  $B(s) \in \mathbb{C}[s]$  non nul tel que pour tout  $y \in V$  le polynôme de Bernstein  $b_y$  de la fibre  $W_y = F_y^{-1}(0) \subset \Omega$  divise  $B$ ,*
- il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $y \in V$ , tout  $x \in W_y$ , il existe un bon opérateur en  $s$  de degré au plus  $N$  dans  $\mathcal{D}_{\Omega,x}[s]$  annulant  $(F_y)^s$ .*

*Preuve.* — Nous allons faire la démonstration, à la fois de a) et de b), par récurrence sur la dimension  $p$  de  $Y$  ; nous pouvons bien sûr supposer  $Y$  irréductible de dimension  $p$  strictement positive. Soit, d'après H. HIRONAKA,  $\rho : \tilde{Y} \rightarrow Y$  une désingularisation de  $Y$  :

- $\tilde{Y}$  est lisse de dimension  $p$  ;
- $\rho$  est propre ;
- $\rho$  induit un isomorphisme de  $\tilde{Y} - \rho^{-1}(\text{sing}(Y))$  sur  $Y - \text{sing}(Y)$  [H].

Quitte à diminuer  $Y$ , nous pouvons trouver  $\Omega_1$  un polydisque de centre 0 dans  $\mathbb{C}^n$ ,  $\Omega_1 \times Y$  satisfaisant aux conditions de la situation générale décrite au § 0. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\pi} : \Omega_1 \times \tilde{Y} & \longrightarrow & \tilde{Y} \\ \text{Id}(\Omega_1) \times \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ \pi : \Omega_1 \times Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

où  $\pi$  et  $\bar{\pi}$  sont les projections canoniques et soit  $D = \rho^{-1}(0)$ .

Pour chaque point  $\bar{y} \in D$ , choisissons, grâce aux PROPOSITIONS 1.2 et 1.3 :

- $V(\bar{y})$  un voisinage de  $\bar{y}$  dans  $\tilde{Y}$  ;
- $\Omega(\bar{y})$  un polydisque de centre 0  $\subset \Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$  ;
- $b_g(\bar{y})$  le polynôme de Bernstein générique de  $W_{\rho(\bar{y})}$  valable sur un ouvert de Zariski  $U(\bar{y}) \subset V(\bar{y})$ .
- $N_g(\bar{y})$  un entier majorant le degré d'un bon opérateur en  $s$  de  $\mathcal{D}_{\Omega(\bar{y}),x}[s]$  annihilant  $(F_{\rho(z)})^s$  en tout point  $x \in W_{\rho(z)}$  au-dessus de  $z \in U(\bar{y})$ .

En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $V(\bar{y}) - U(\bar{y})$  de dimension strictement inférieure à  $p$ , quitte à rétrécir  $V(\bar{y})$  et  $\Omega(\bar{y})$ , nous pouvons supposer l'existence d'un polynôme  $B(\bar{y}) \in \mathbb{C}[s]$  multiple des polynômes de Bernstein des fibres  $W_{\rho(z)} \subset \Omega(\bar{y})$  en tout point  $z \in V(\bar{y})$  ; ainsi que l'existence d'un entier  $N(\bar{y})$  majorant le degré d'un bon opérateur en  $s$  annihilant  $(F_{\rho(z)})^s$  au voisinage d'un point de  $W_{\rho(z)}$  pour  $z \in V(\bar{y})$ .

On recouvre le compact  $D = \rho^{-1}(0)$  par un nombre fini de voisinages  $V(\bar{y}_m)$  et on prend

$$\begin{aligned} B(s) &= \text{ppcm}(B(\bar{y}_m)), & N &= \sup(N(\bar{y}_m)), \\ \Omega &= \bigcap \Omega(\bar{y}_m), & V &= \bigcap \rho(V(\bar{y}_m)). \end{aligned}$$

La propriété de  $\rho$  implique que  $V$  est un voisinage de 0 dans  $Y$  et les propriétés demandées se vérifient sans difficulté.

*Remarque.* — A notre connaissance on ne sait pas borner le degré d'un bon opérateur en  $s$  annulant  $f^s$  en fonction d'invariants de la singularité comme par exemple le nombre de Milnor. C'est cette ignorance qui nous a imposé d'établir la PROPOSITION 2.1. Pour l'existence d'un bon opérateur annulant  $f^s$  dans le cas absolu, voir M. KASHIWARA [Kas, théorème 6.3].

### 3. Analyticité et polynôme de Bernstein générique

Nous nous plaçons toujours dans la situation générale décrite au § 0. Commençons par nous y installer confortablement. Quitte à restreindre, choisissons des éléments  $(e_1, e_2, \dots, e_\mu)$  de  $\mathcal{O}_\Omega(\Omega)$  dont les classes forment une base du faisceau de  $\mathcal{O}_Y$ -modules :  $\pi_*(\mathcal{O}_{X/I})$ . On obtient une suite exacte scindée de  $\mathcal{O}_Y$ -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_*(\mathcal{I}) & \longrightarrow & \pi_*(\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \pi_*(\mathcal{O}_{X/I}) \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \downarrow \simeq \\ & & & & & & \bigoplus_{k=1}^{\mu} \mathcal{O}_Y e_k \end{array}$$

de laquelle on déduit l'isomorphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -modules :

$$\pi_*(\mathcal{O}_X) \simeq \left( \bigoplus_{k=1}^{\mu} \mathcal{O}_Y e_k \right) \oplus \pi_*(\mathcal{I}).$$

Si  $U$  est un polydisque de  $Y$ , tout élément  $g$  de  $\mathcal{O}_X(\Omega \times U)$  s'écrit :

$$g = \sum_{k=1}^{\mu} h_k e_k + \sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)$$

où  $a_i \in \mathcal{O}_X(\Omega \times U)$ ,  $h_k \in \mathcal{O}_Y(U)$  et où les  $h_k$ , pour  $k \in (1, 2, \dots, \mu)$ , sont déterminés de façon unique en fonction de  $g$ .

Considérons dans  $\mathcal{O}_X[s, 1/F]F^s$  le sous  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -module engendré par les  $\xi_\ell = s(s-1)\dots(s-\ell+1)F^{s-\ell}$  pour  $\ell \in \mathbb{N}$ , égal à  $\bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X \xi_\ell$ .

Notons :

- $E = \bigoplus_{k=1}^{\mu} \mathcal{O}_Y e_k$  ;
- $\mathbb{D} = \mathbb{C}[\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n]$  ;

- $\mathbb{D}E = \mathbb{D} \otimes E$  (le produit tensoriel pris au dessus de  $\mathbb{C}$ );
- $\bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbb{D}E\xi_\ell$  le sous faisceau de  $\pi_*(\bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X \xi_\ell) = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} \pi_*(\mathcal{O}_X)\xi_\ell$ .

En adaptant la preuve de la proposition A.1.4 de [B.G.M.M.] ou de [B.G.M.] au cas relatif, on a la décomposition :

$$\pi_*\left(\bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X \xi_\ell\right) \simeq \left(\bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbb{D}E\xi_\ell\right) \oplus \pi_*(\mathcal{D}_{X/Y}\mathcal{I})F^s$$

(isomorphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -modules).

Notons  $c$  le morphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -modules :

$$c : \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} \pi_*(\mathcal{O}_X)\xi_\ell \rightarrow \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} E\xi_\ell,$$

défini par :

$$c\left(\sum \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha a_{\alpha,\ell} \xi_\ell + QF^s\right) = \sum a_{(0,0,\dots,0),\ell} \xi_\ell,$$

où  $Q \in \pi_*(\mathcal{D}_{X/Y}\mathcal{I})$  et  $a_{\alpha,\ell} \in E$ .

Notons encore :

- $Z' = c(\pi_*(\mathcal{D}_{X/Y}[s])F^s)$ ;
- $Z = c(\pi_*(\mathcal{D}_{X/Y}[s] \cdot \mathcal{J})F^s)$ , en rappelant que  $\mathcal{J} = \mathcal{I} + F\mathcal{O}_X$ .

Soit  $K$  un polydisque compact contenu dans  $\Omega$  tel que pour tout  $y$  dans  $Y$ , l'intérieur de  $K$  contient tous les points critiques de  $F_y$  dans  $\Omega$ ; cela est toujours possible quitte à diminuer  $Y$ . Soit  $y \in Y$ ; en spécialisant  $\xi_\ell$  (resp.  $e_k$ ) en  $y$  et en restreignant à  $K$ , on définit  $\xi_\ell(y, K)$  (resp.  $e_{k,K}$ ) et des applications de spécialisation-restriktion :

$$rs : E_y \rightarrow E(y, K) = \bigoplus_{k \in \{1, \dots, \mu\}} \mathbb{C}e_{k,K}.$$

Tout comme précédemment, on a dans  $\mathcal{O}_\Omega(K)[s, 1/F_y](F_y)^s$  :

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_\Omega(K)\xi_\ell(y, K) \\ & \simeq \left(\bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbb{D}E(y, K)\xi_\ell(y, K)\right) \oplus \mathcal{D}_\Omega(K)\mathcal{I}(y, K)\xi_0(y, K), \end{aligned}$$

où  $\mathcal{I}(y, K)$  est l'idéal de  $\mathcal{O}_\Omega(K)$  engendré par les dérivées partielles de  $F_y$ .

On définit alors de façon analogue à  $c$  le morphisme (de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels)  $c(y, K)$  :

$$\bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_\Omega(K)\xi_\ell(y, K) \rightarrow \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} E(y, K)\xi_\ell(y, K)$$

et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 (\oplus \pi_*(\mathcal{O}_X)\xi_\ell)_y & \xrightarrow{c_y} & \oplus E_y \xi_\ell \\
 \downarrow rs & & \downarrow rs \\
 \oplus \mathcal{O}_\Omega(K)\xi_\ell(y, K) & \xrightarrow{c(y, K)} & \oplus E(y, K)\xi_\ell(y, K)
 \end{array}$$

- $rs$  : spécialisation en  $y$  suivie de restriction à  $K$  ;
- $c_y$  : fibre de  $c$  en  $y$  ;
- $\tilde{b}_y(s)$  est le polynôme minimal de l'action de  $s$  sur le  $\mathcal{D}_\Omega$ -module :

$$\mathcal{M}_\Omega = \mathcal{D}_\Omega[s](F_y)^s / \mathcal{D}_\Omega[s]\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s$$

où  $\mathcal{J}(F_y)$  est l'idéal de  $\mathcal{O}_\Omega$  engendré par  $F_y$  et ses dérivées partielles  $\partial F_y / \partial x_1, \dots, \partial F_y / \partial x_n$ .

D'après la PROPOSITION 2.1,  $\tilde{b}_y(s)$  est aussi le polynôme unitaire de degré minimal parmi les polynômes  $d(s)$  de degré au plus  $N$  ( $N = \sup(\deg(B), N')$  où  $B$  est donné par le a) de la PROPOSITION 2.1 et  $N'$  par le b)) tel que le morphisme  $d(s)$  :

$$\mathcal{D}_\Omega(F_y)^s / \mathcal{D}_\Omega\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s \longrightarrow \mathcal{D}_\Omega[s]_{\leq N}(F_y)^s / \mathcal{D}_\Omega[s]_{\leq N}\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s ,$$

soit nul (on a noté  $\mathcal{D}_\Omega[s]_{\leq N} = \mathcal{D}_\Omega + s\mathcal{D}_\Omega + \dots + s^N\mathcal{D}_\Omega$ ).

Les deux faisceaux précédents étant supportés par un nombre fini de points intérieurs à  $K$ , on a le même résultat en les remplaçant par leurs sections sur  $K$ . On a d'autre part :

$$\Gamma\left(K, \mathcal{D}_\Omega(F_y)^s / \mathcal{D}_\Omega\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s\right) = \mathcal{D}_\Omega(K)(F_y)^s / \mathcal{D}_\Omega(K)\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s$$

(et de manière analogue pour l'autre faisceau) car

$$H^1(K, \mathcal{D}_\Omega\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s) = 0$$

puisque  $\mathcal{D}_\Omega\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s$  est limite inductive de  $\mathcal{O}_\Omega$ -modules cohérents et  $K$  est un polydisque compact.

Ainsi  $\tilde{b}_y(s)$  est le polynôme unitaire de degré minimal parmi les polynômes  $d(s)$  de degré au plus  $N$  pour lesquels le morphisme induit  $d(s)$  :

$$\mathcal{D}_\Omega(K)(F_y)^s / \mathcal{D}_\Omega(K)\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s \longrightarrow$$

$$\mathcal{D}_\Omega(K)[s]_{\leq N}(F_y)^s / \mathcal{D}_\Omega(K)[s]_{\leq N}\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s$$

est nul.

Soit encore  $H^n(\mathcal{M})$  le  $n$ -ième groupe de cohomologie de De Rham d'un  $\mathcal{D}_\Omega$ -module  $\mathcal{M}$ ,  $H^n(\mathcal{M}(K))$  ses sections sur  $K$ .

LEMME 3.1. —  $\tilde{b}_y(s)$  est le polynôme unitaire de degré minimal parmi les polynômes  $d(s)$  de degré au plus  $N$  pour lesquels le morphisme induit  $d(s)$  :

$$H^n\left(\mathcal{D}_\Omega(K)(F_y)^s/\mathcal{D}_\Omega(K)\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s\right) \longrightarrow \\ H^n\left(\mathcal{D}_\Omega(K)[s]_{\leq N}(F_y)^s/\mathcal{D}_\Omega(K)[s]_{\leq N}\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s\right)$$

est nul.

*Preuve.* — Le lemme résulte de l'isomorphisme de

$$H^n\left(\mathcal{D}_\Omega(K)(F_y)^s/\mathcal{D}_\Omega(K)\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s\right)$$

avec la somme directe des :

$$H^n\left(\mathcal{D}_{\Omega,x}(F_y)^s/\mathcal{D}_{\Omega,x}\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s\right)$$

où  $x$  décrit l'ensemble des points singuliers de  $W_y = F_y^{-1}(0)$ . Nous sommes alors ramenés au cas où  $F_y$  a une singularité isolée,  $\mathcal{M}_\Omega(y)$  à support un point : cas traité dans [B.G.M.M.]. On pose :

$$Z'(y, K, N) = c(y, K)\left(\mathcal{D}_\Omega(K)[s]_{\leq N}(F_y)^s\right),$$

$$Z(y, K, N) = c(y, K)\left(\mathcal{D}_\Omega(K)[s]_{\leq N}\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s\right).$$

LEMME 3.2. —  $c(y, K)$  induit un isomorphisme :

$$H^n\left(\mathcal{D}_\Omega(K)[s]_{\leq N}(F_y)^s/\mathcal{D}_\Omega(K)[s]_{\leq N}\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s\right) \\ \simeq Z'(y, K, N)/Z(y, K, N).$$

*Preuve.* — On adapte la preuve de la proposition A.2.5 de [B.G.M.M.]. On a les inclusions :

$$\mathcal{D}_\Omega(K)[s]_{\leq N}\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s \subset \mathcal{D}_\Omega(K)[s]_{\leq N}(F_y)^s,$$

$$\mathcal{D}_\Omega(K)[s]_{\leq N}(F_y)^s \subset \bigoplus_{\ell=0}^N \mathbb{D}E\xi_\ell(y, K) \oplus \mathcal{D}_\Omega(K)\mathcal{J}(y, K)\xi_0(y, K)$$

et les quotients successifs ayant pour support un nombre fini de points, leur cohomologie de De Rham en degré  $(n-1)$  est nulle, et on obtient des injections entre les cohomologies de De Rham en degré  $n$ .



On a  $H^n(L) = L / \sum_{i=0}^n (\partial/\partial x_i)L$ , donc :

$$\begin{aligned} H^n \left( \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbb{D}E(y, K)\xi_\ell(y, K) \oplus \mathcal{D}_\Omega(K)\mathcal{I}(y, K)\xi_0(y, K) \right) \\ = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} E(y, K)\xi_\ell(y, K) \oplus H^n(\mathcal{D}_\Omega(K)\mathcal{I}(y, K)\xi_0(y, K)) \end{aligned}$$

et de la suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Ann}(F^s)(K) \longrightarrow \mathcal{D}_\Omega(K)\mathcal{I}(y, K) \longrightarrow \mathcal{D}_\Omega(K)\mathcal{I}(y, K)F^s \rightarrow 0$$

et de  $\text{Ann}(F^s)(K) = \sum \mathcal{D}_\Omega(K)(\partial/\partial x_j \partial F/\partial x_i - \partial/\partial x_i \partial F/\partial x_j)$ , on tire

$$\begin{aligned} H^n(\mathcal{D}_\Omega(K)\mathcal{I}(y, K)F^s) &= \mathcal{I}(y, K)/\mathcal{L}(y, K) \\ &\approx \mathcal{I}(y, K)\Omega^n(K)/dF \wedge d\Omega^{n-2}(K) \end{aligned}$$

quotient de l'idéal  $\mathcal{I}(y, K)$  de  $\mathcal{O}_\Omega(K)$  engendré par les dérivées partielles de  $F_y$ , par le sous espace vectoriel  $\mathcal{L}(y, K)$  des

$$(\partial\lambda/\partial x_j \partial F/\partial x_i - \partial\lambda/\partial x_i \partial F/\partial x_j)$$

lorsque  $\lambda$  parcourt  $\mathcal{O}_\Omega(K)$  et  $1 \leq i < j \leq n$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} H^n \left( \bigoplus \mathbb{D}E(y, K)\xi_\ell(y, K) \oplus \mathcal{D}_\Omega(K)\mathcal{I}(y, K)\xi_0(y, K) \right) \\ \simeq \bigoplus E(y, K)\xi_\ell(y, K) \oplus \mathcal{I}(y, K)/\mathcal{L}(y, K) \end{aligned}$$

et il reste à vérifier que les images de

$$H^n(\mathcal{D}_\Omega(K)[s]_{\leq N}(F_y)^s) \quad \text{et} \quad H^n(\mathcal{D}_\Omega(K)[s]_{\leq N}\mathcal{J}(F_y)(F_y)^s)$$

par cet isomorphisme s'identifient respectivement à :

$$Z'(y, K, N) \oplus \mathcal{I}(y, K)/\mathcal{L}(y, K) \quad \text{et} \quad Z(y, K, N) \oplus \mathcal{I}(y, K)/\mathcal{L}(y, K),$$

d'où le lemme.

Des LEMMES 3.1 et 3.2 on déduit que  $\tilde{b}_y(s)$  est le diviseur unitaire de degré minimal de  $B(s)$  tel que  $\tilde{b}_y(s)Z'(y, K, 0) \subset Z(y, K, N)$ .

Il est clair que pour tout  $y$ ,  $Z'(y, K, 0)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie engendré par les  $V(k, y)$  pour  $k = 1, \dots, \mu$  :

$$V(k, y) = c(y, K)(e_{k,K}F^s).$$

Et de l'égalité :

$$(s+1)\lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} F^s = \lambda \frac{\partial F^{s+1}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} F^{s+1} + \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda F F^s$$

on déduit que pour tout  $y$ ,  $Z(y, K, N)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie engendré par les  $W(k, \ell, y) = c(y, K)(s^\ell e_{k,K} F F^s)$  pour  $k = 1, \dots, \mu$  et  $\ell = 1, \dots, N$ .

**THÉORÈME 3.3.** — Soit  $F \in \mathcal{O}_{X,0}$  définissant un germe  $W$  de déformation à  $p$  paramètres d'une singularité isolée d'hypersurface complexe à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ . La partition de l'espace des paramètres  $(Y, 0)$  par le polynôme de Bernstein de la fibre  $W_y$  est constructible.

*Preuve.* — Notons  $A_r$  l'ensemble des points  $y$  de  $Y$  où la dimension de  $Z(y, K, N)$  est au plus  $r$  :  $A_r$  est le sous espace analytique fermé de  $Y$  défini par l'annulation de tous les  $(r+1) \times (r+1)$  mineurs extraits de la matrice des composantes des générateurs  $W(k, \ell, y)$  dans la base  $e_{k,K} \xi_\ell(y, K)$  où  $k = 1, \dots, \mu$  et  $\ell = 1, \dots, N$ .

Soit  $d(s)$  un diviseur du polynôme  $B(s)$  donné par la PROPOSITION 2.1. Définissons le sous ensemble de  $Y$  :

$$B_{d,r} = \left\{ y \in Y \mid \dim_{\mathbb{C}}(d(s)Z'(y, K, 0) + Z(y, K, N)) \leq r \right\}.$$

C'est encore un fermé de Zariski de  $Y$ , contenu dans  $A_r$ , défini par l'annulation des  $(r+1) \times (r+1)$  mineurs extraits de la matrice des composantes du système de générateurs de  $d(s)Z'(y, K, 0) + Z(y, K, N)$ ,  $d(s)V(k, y)$ ,  $W(k, \ell, y)$ , dans la même base que précédemment.

Posons :

$$C_{d,r} = B_{d,r} - A_{r-1} - \left( \bigcup_{\substack{d' \text{ diviseur} \\ \text{strict de } d}} D_{d',r} \right).$$

$C_{d,r}$  est l'ensemble des points  $y$  de  $A_r$  où le polynôme de Bernstein de la fibre est  $d(s) = \tilde{b}_y(s)$ .

Enfin  $\bigcup C_{d,r}$  (où  $r$  varie) est l'ensemble des points  $y \in Y$  où  $d(s) = \tilde{b}_y(s)$ . C'est une réunion finie de différences de fermés analytiques.

**THÉORÈME 3.4.** — Le polynôme de Bernstein  $b_g$  est le polynôme de Bernstein de la fibre générique.

*Preuve.* — Si  $b_g$  est le polynôme de Bernstein générique (PROPOSITION 1.2) on a  $\lambda(y)b_g(s)F^s = PF^{s+1}$  avec  $\lambda \in \mathcal{O}_{Y,0}$  non nul et  $P \in \mathcal{D}_{X/Y,0}[s]$  ; on peut donc trouver des représentants assez petits tels que pour  $\lambda(y) \neq 0$ , le polynôme de Bernstein  $b_y(s)$  de la fibre  $W_y$  divise  $b_g(s)$ .

Étudions la réciproque. Soient  $r = r_{\max}$  la dimension maximum de  $Z(y, K, N)$  pour  $y$  voisin de 0, et  $d(s)$  le polynôme de Bernstein de la fibre générique (i.e. de  $W_y$  pour  $y$  appartenant à l'ouvert de Zariski non vide de la partition).

$$Z'(0) = c(\pi_* \mathcal{D}_{X/Y} F^s) \quad \text{et} \quad Z(N) = c(\pi_* \mathcal{D}_{X/Y}[s]_{\leq N} \mathcal{J}(F) F^s)$$

sont des  $\mathcal{O}_Y$ -modules engendrés par des sections globales (respectivement  $c(e_k F^s)$  et  $c(s^\ell e_k F F^s)$ ). Si  $\lambda(y)$  est un  $(r \times r)$ -mineur non nul extrait de la matrice des composantes de ces générateurs  $c(s^\ell e_k F F^s)$  de  $Z(N)$  dans la base  $(e_k \xi_\ell) : \lambda(y) \tilde{d}(s) Z'(0) \subset Z(N)$  et le morphisme

$$\lambda(y) \tilde{d}(s) : Z'(0)/Z(0) \longrightarrow Z'(N)/Z(N)$$

est nul. Comme

$$\begin{aligned} Z'(0)/Z(0) &\simeq H^n(\pi_* \mathcal{D}_{X/Y} F^s / \pi_* \mathcal{D}_{X/Y} \mathcal{J}(F) F^s) \\ &\simeq \pi_* H^n(\mathcal{D}_{X/Y} F^s / \mathcal{D}_{X/Y} \mathcal{J}(F) F^s), \end{aligned}$$

et de même :

$$Z'(N)/Z(N) \simeq \pi_* H^n(\mathcal{D}_{X/Y}[s]_{\leq N} F^s / \mathcal{D}_{X/Y}[s]_{\leq N} \mathcal{J}(F) F^s),$$

on déduit de l'appendice (COROLLAIRE A.6) que  $\lambda(y) \tilde{d}(s)$  est le morphisme nul de

$$\mathcal{D}_{X/Y} F^s / \mathcal{D}_{X/Y} \mathcal{J}(F) F^s \longrightarrow \mathcal{D}_{X/Y}[s]_{\leq N} F^s / \mathcal{D}_{X/Y}[s]_{\leq N} \mathcal{J}(F) F^s.$$

D'où :

$$\lambda(y) d(s) F^s \in \mathcal{D}_{X/Y}[s] F^{s+1}.$$

#### 4. Déformations à “ $\mu$ -constant”

Si nous nous plaçons dans la situation d'une déformation à nombre de Milnor constant (voir paragraphe 0), nous savons que  $F$ ,  $\partial F / \partial y_1, \dots, \partial F / \partial y_p$  sont entiers sur l'idéal  $\mathcal{I}_0 = (\partial F / \partial x_1, \dots, \partial F / \partial x_n) \mathcal{O}_{X,0}$ ; le théorème de Kashiwara [Kas] montre alors l'existence de bons opérateurs dans  $\mathcal{D}_{X,0}[s]$  annihilant  $F^s$ , bons en  $s$ ,  $\partial / \partial y_1, \dots, \partial / \partial y_p$  respectivement. Nous pouvons recopier la preuve de la PROPOSITION 1.3 (c'est le cas particulier  $h_\alpha = 1$ ) et prouver ainsi l'existence de  $c \in \mathbb{C}[s]$  non nul, d'un opérateur différentiel relatif  $P \in \mathcal{D}_{X/Y,0}[s]$  de degré au plus égal au degré de  $c$  tel que :

$$c(s) F^s = P F^{s+1}.$$

Cela prouve donc l'existence d'un polynôme de Bernstein “en famille”, ainsi que l'existence d'un bon opérateur en  $s$  relatif sous la forme,  $c(s) - P F$ , annihilant  $F^s$ .

PROPOSITION 4.1. — *Soit  $F \in \mathcal{O}_{X,0}$  définissant un germe  $W$  de déformations à  $p$  paramètres d'une singularité isolée d'hypersurface complexe à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *la déformation est à  $\mu$  constant ;*
- ii) *il existe un bon opérateur en  $s$  annulant  $F^s$  dans  $\mathcal{D}_{X/Y,0}[s]$  ;*
- iii) *il existe un bon opérateur en  $s$  annulant  $F^s$  dans*

$$\mathcal{D}_{X/Y,0}[s] \otimes_{\mathcal{O}_{Y,0}} \text{Fract}(\mathcal{O}_{Y,0}).$$

*Preuve.* — Nous venons de voir que i)  $\Rightarrow$  ii) et, d'évidence ii)  $\Rightarrow$  iii). Réciproquement, si nous supposons iii), c'est qu'il existe un opérateur  $P \in \mathcal{D}_{X/Y,0}[s]$  annulant  $F^s$  dont le symbole est de la forme :

$$\sigma(P) = \lambda(y)s^m + A_1s^{m-1} + \dots + A_m,$$

où  $A_k(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{O}_{X,0}[\xi_1, \dots, \xi_n]$  est homogène de degré  $k$  pour  $k = 1, \dots, m$ . En écrivant  $PF^s = 0$  dans  $\bigoplus_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X \xi_l$ , la composante suivant  $\xi_m$  fournit

$$\begin{aligned} \lambda(y)F^m + A_k\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)F^{m-1} + \dots \\ \dots + A_m\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique  $\lambda(y)F$  nul sur  $C$ , le lieu des zéros de  $(\partial F/\partial x_1, \dots, \partial F/\partial x_n)$  ; donc  $F$ , car plat implique sans torsion.

Nous sommes obligés, une nouvelle fois d'invoquer le théorème de F. LAZZERI [La] pour conclure.

PROPOSITION 4.2. — *Soit  $F \in \mathcal{O}_{X,0}$  définissant un germe  $W$  de déformation à  $p$  paramètres d'une singularité isolée d'hypersurface complexe à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ , à nombre de Milnor constant. Il existe  $c(s) \in \mathbb{C}[s]$  non nul,  $P \in \mathcal{D}_{X/Y,0}[s]$ , tel que :*

$$c(s)F^s = PF^{s+1}.$$

Le générateur unitaire de l'idéal des polynômes de  $\mathbb{C}[s]$  ainsi défini est appelé polynôme de Bernstein "relatif" ou "en famille". Nous conjecturons que réciproquement l'existence d'un polynôme de Bernstein en famille (dans la situation générale de déformation d'une singularité isolée d'hypersurface) implique " $\mu$ -constant".

Signalons deux cas particuliers où nous savons démontrer cette réciproque :

a) on suppose de plus que les singularités éventuelles apparaissant dans la fibre générique sont quasi-homogènes.

b) On suppose de plus que l'hypersurface  $W_0$  est semi-quasi-homogène.

## 5. Exemples

Dans [Ka.1] et [Ka.2], M. KATO décrit la stratification de la strate à  $\mu$ -constant de la déformation semi-universelle de singularités quasi-homogènes par la  $b$ -fonction. Dans ses exemples, les strates sont lisses et la condition de frontière est vérifiée; nous allons voir que ce n'est pas le "cas général". Voir [B.G.M.] pour le calcul du polynôme de Bernstein dans le cas semi-homogène.

*Exemple 5.1 :*

$$F = x_2^3 + x_1^3(x_1 - y_1)^3 x_2 + y_2 x_1^5 (x_1 - y_1)^4 + y_3 x_1^5.$$

Décrivons la fibre  $W_y = F_y^{-1}(0)$  pour différentes valeurs du paramètre  $y = (y_1, y_2, y_3)$  au voisinage de 0.

•  $y_1 = y_3 = 0$  :  $F_{(0,y_2,0)} = x_2^3 + x_1^6 x_2 + y_2 x_1^9$  est une singularité quasi-homogène; le polynôme de Bernstein de  $W_{(0,y_2,0)}$  est donc constant :

$$\tilde{b}(s) = \left[ \prod_{\substack{1 \leq i \leq 8 \\ 1 \leq j \leq 2}} \left( s + \frac{1}{9}i + \frac{1}{3}j \right) \right]_{\text{red}}.$$

Voir [B.G.M.] pour le calcul.

•  $y_2 = y_3 = 0; y_1 \neq 0$  : la fibre  $W_{(y_1,0,0)}$  présente deux singularités de type  $E_7$  ( $x_2^3 + x_1^3 x_2 = 0$ ) l'une en  $x_1 = x_2 = 0$ , l'autre en  $x_1 = y_1, x_2 = 0$ . Le polynôme de Bernstein de la fibre est donc  $b_{E_7}$ .

•  $y_3 = 0; y_1 y_2 \neq 0$  : la fibre  $W_{(y_1,y_2,0)}$  présente deux singularités, l'une de type  $E_7$  en  $x_1 = x_2 = 0$  et l'autre de type  $E_6$  en  $x_1 = y_1, x_2 = 0$ . Le polynôme de Bernstein est le ppcm de  $b_{E_6}$  et de  $b_{E_7}$ .

•  $y_1 = 0; y_3 \neq 0$  :  $W_{(0,y_2,y_3)}$  a en  $x_1 = x_2 = 0$  une singularité de type  $E_8$  :  $x_2^3 + x_1^5 = 0$ .

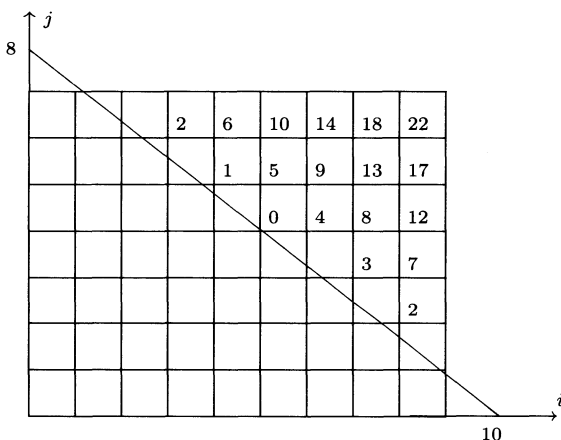
• Dans un ouvert de Zariski  $U$  contenu dans l'ouvert  $y_1 y_3 \neq 0$ ,  $W_y$  a une unique singularité de type  $E_7$ .

L'ensemble des points  $y$  où le polynôme de Bernstein  $b_y$  de la fibre  $W_y$  est  $b_{E_7}$  est donc la réunion de l'ouvert générique  $U$ , et de l'axe des  $y_1$  privé de l'origine. Ce n'est donc pas la différence de deux fermés analytiques.

*Exemple 5.2.* — Étudions la strate à  $\mu$ -constant de la déformation semi-universelle de la singularité  $x_2^8 + x_1^{10} = 0$  :

$$F = x_2^8 + x_1^{10} + \sum y_{i,j} x_1^i x_2^j$$

la somme étant étendue aux couples  $(i, j)$  vérifiant :  $0 \leq i \leq 8, 0 \leq j \leq 6, \frac{1}{10}i + \frac{1}{8}j \geq 1$ . Observons d'abord que la strate “quasi-homogène” est l'axe des  $y_{5,4}$  de l'espace des paramètres.



Étudions maintenant le polynôme de Bernstein de la singularité :

$$F_t = x_2^8 + x_1^{10} + t x_1^3 x_2^6$$

pour  $t = y_{3,6}$  non nul.

Les techniques développées dans [B.G.M.] permettent de voir que  $\tilde{b}_t$  est multiple de  $(s + \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{2}{40})$  et de  $(s + \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{47}{40})$ .

Le poids du monôme  $x_1^i x_2^j$  est  $\frac{1}{10}i + \frac{1}{8}j = (4i + 5j)/40$ ; les monômes sont numérotés par l'entier  $k$  tel que le poids soit  $1 + \frac{1}{40}k$  (Figure).

Par contre nous pouvons montrer que la strate “quasi-homogène” :  $x_2^8 + x_1^{10} + y_{5,4} x_1^5 x_2^4$  pour  $y_{5,4} \neq 0$  n'est pas contenue dans l'adhérence de la strate de polynôme de Bernstein  $b_t$  bien que leur intersection soit non vide : en effet, dans le cas contraire, il existerait une déformation de

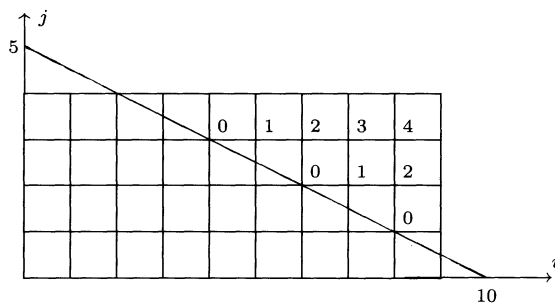
la singularité  $x_2^8 + x_1^{10} + y_{5,4}x_4^5x_2^4$  dans laquelle apparaîtrait le monôme  $x_1^3x_2^6$  ou le monôme  $x_1^8x_2^2$  (pour qu'il y ait le facteur  $(s + \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{2}{40})$ ); mais alors le calcul montre que dans  $Z$  on trouve le monôme  $x_1^8x_2^3$ , soit par réécriture de  $x_2(x_1^3x_2^6)$ , soit directement par multiplication de  $x_1^8x_2^2$  par  $x_2$  : mais alors, cela contredit le fait que le polynôme de Bernstein est multiple de  $(s + \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{47}{40})$ .

*La stratification ne vérifie donc pas la condition de frontière.*

*Exemple 5.3.* — Considérons la strate à  $\mu$ -constant de la déformation semi-universelle de  $x_1^{10} + x_2^5 = 0$  :  $F = x_1^{10} + x_2^5 + \sum y_{i,j}x_1^i x_2^j$  la somme étant étendue aux couples  $(i, j)$  avec  $0 \leq i \leq 8$ ,  $0 \leq j \leq 3$ ,  $\frac{i}{10} + \frac{j}{5} \geq 1$ . Le poids du monôme  $x_1^i x_2^j$  est  $\frac{1}{10}i + \frac{1}{5}j = (i + 2j)/10$ .

Soit  $S$  la strate de l'espace  $Y$  où le polynôme de Bernstein de la fibre est :

$$\tilde{b}(s) = \prod_{0 \leq k \leq 12} (s + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}k).$$



Le calcul montre que *cette strate est singulière* en tout point

$$(0, \dots, 0, y_{7,3}, y_{8,3}), \quad y_{7,3} \neq 0.$$

En effet, c'est une hypersurface d'équation  $y_{7,2}(y_{6,3} + u) - y_{5,3}(y_{8,3} + v) = 0$  ( $u(y)$  et  $v(y)$  étant de multiplicité 2 en ce point).

*Question.* — Dans tous les exemples que nous avons calculés pour la strate à  $\mu$ -constant de la déformation semi-universelle de  $x^a + y^b = 0$ ,  $a$  et  $b$  premiers entre eux, la stratification par le polynôme de Bernstein fournit des strates lisses, vérifiant la condition de frontière. Est-ce toujours le cas ?

## Appendice A

### $\mathcal{D}_{X/Y}$ -modules relatifs à support fini au-dessus de l'espace des paramètres

- $X = \Omega \times Y$  est un polydisque ouvert de  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$  et  $\pi : X \rightarrow Y$  la projection canonique sur le deuxième facteur.
- $\mathcal{D}_{X/Y}$  est le faisceau sur  $X$  des opérateurs différentiels relatifs qui s'identifie à  $\mathcal{O}_X \langle \partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n \rangle$ , sous-faisceau de  $\mathcal{D}_X$  engendré par les dérivations annulant  $\pi^{-1}\mathcal{O}_Y$ .
- $\Omega_{X/Y}^k$  désigne le faisceau des  $k$ -formes différentielles relatives à coefficients dans  $\mathcal{O}_X$ .

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -module cohérent sur  $X$ ;  $\text{car}(\mathcal{M})$  désigne la variété caractéristique dans le cotangent relatif  $T^*(X/Y)$  identifié à  $X \times \mathbb{C}^n$ ,  $p$  désigne la projection naturelle  $p : T^*(X/Y) \rightarrow X$  et  $\text{Supp}(\mathcal{M}) = p(\text{car}(\mathcal{M}))$  le support de  $\mathcal{M}$ .

On dit que  $\mathcal{M}$  est à support fini au-dessus de l'espace des paramètres  $Y$  si la restriction de  $\pi$  à  $\text{Supp}(\mathcal{M})$  est propre et finie.

La proposition suivante donne la variété caractéristique :

PROPOSITION A1. — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -module cohérent à support fini au-dessus de l'espace des paramètres; sa variété caractéristique est :*

$$\text{car}(\mathcal{M}) = p^{-1}(\text{Supp}(\mathcal{M})) = \text{Supp}(\mathcal{M}) \times \mathbb{C}^n.$$

Une question est la suivante : quelles sont les propriétés des  $\mathcal{D}$ -modules à support un point (classification, cohomologie de De Rham) qui se généralisent au cas des  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -modules à support fini au-dessus de l'espace des paramètres  $Y$ ? Dans cet appendice nous apportons une réponse partielle, orientée vers le calcul de la cohomologie de De Rham.

Le complexe de De Rham relatif  $DR(\mathcal{M})$  d'un  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -Module  $\mathcal{M}$  sur  $X$  est :

$$0 \rightarrow \Omega_{X/Y}^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_{X/Y}^k \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \rightarrow \Omega_{X/Y}^{k+1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_{X/Y}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \rightarrow 0$$

où la différentielle  $d$  est définie par :

$$d(\omega \otimes m) = d_{X/Y}(\omega) \otimes m + \sum_{i=1}^n (dx_i \wedge \omega) \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} m$$

$d_{X/Y}$  étant la différentielle du complexe  $\Omega_{X/Y}^\bullet$ .



*Preuve de la proposition A1.* — Le résultat général de GABBER sur l'involutivité de la variété caractéristique des modules sur les anneaux noethériens filtrés s'appliquent aux fibres de l'anneau filtré  $\mathcal{D}_{X/Y}$ . Il s'ensuit que les fibres de l'application  $\pi \circ p : \text{car}(\mathcal{M}) \rightarrow Y$  sont involutives dans  $T^*(\Omega)$  et donc de dimension au moins  $n$ . Alors, puisque la projection  $\pi$  en restriction à  $\text{Supp}(\mathcal{M})$  est propre à fibre finie, les fibres de  $p : \text{car}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Supp}(\mathcal{M})$  sont de dimension au moins  $n$ . Ces fibres sont donc égales à  $\mathbb{C}^n$  ce qui prouve la proposition. Les  $\mathcal{D}$ -modules relatifs sont traités dans le cas général dans J.-P. SCHNEIDERS [Sc], C. HOUZEL et SCHAPIRA [H.S] : on n'y suppose plus que  $\pi$  en restriction à  $\text{Supp}(\mathcal{M})$  est finie.

*Remarque.* — Il est possible de donner une preuve plus directe de A1 qui n'utilise pas l'involutivité mais seulement l'inégalité de Bernstein.

Sur un ouvert dense de chaque composante irréductible de  $\text{Supp}(\mathcal{M})$ ,  $\pi$  induit un isomorphisme local de  $\text{Supp}(\mathcal{M})$  sur son image ; au voisinage d'un tel point  $z = (\underline{x}, \underline{y})$ ,  $\text{Supp}(\mathcal{M})$  est défini par des équations de la forme  $x_i = \phi_i(y)$ ,  $i = 1, \dots, n$  dans  $\Omega \times \pi(\text{Supp}(\mathcal{M}))$ . Si  $\text{car}(\mathcal{M})$  ne contenait pas  $\{z\} \times \mathbb{C}^n$ , on pourrait supposer, quitte à faire un changement linéaire des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ , que l'axe des  $\xi_1$  n'est pas dans  $\text{car}(\mathcal{M})$  : autrement dit qu'il existe un polynôme homogène en  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  unitaire en  $\xi_1$  dans  $\mathcal{O}_{X,z}[\xi_1, \dots, \xi_n]$  qui s'annule sur  $\text{car}(\mathcal{M})$  au voisinage de  $z$ . En conséquence, l'annulateur  $\text{Ann}(u) \subset \mathcal{D}_{X/Y,z}$  d'une section locale non nulle  $u$  de  $\mathcal{M}_z$  contient à la fois une puissance de  $x_1 - \phi_1(y)$  (soit  $(x_1 - \phi_1(y))^k$ ) et un opérateur  $P = (\partial/\partial x_1)^r + A_1$  unitaire en  $\partial/\partial x_1$  de degré  $r$ . En écrivant que  $(x_1 - \phi_1(y))^{k+r-1}P$  est dans  $\text{Ann}(u)$ , et en faisant "passer les coefficients à droite", on trouve  $(x_1 - \phi_1(y))^{k-1} \in \text{Ann}(u)$ . En itérant on obtient  $1 \in \text{Ann}(u)$  ce qui contredit  $u \neq 0$ . On vient ainsi de montrer que  $\text{car}(\mathcal{M})$  contient  $\{x\} \times \mathbb{C}^n$  pour  $z$  appartenant à un ouvert dense de  $\text{Supp}(\mathcal{M})$  ; en prenant l'adhérence puisque  $\text{car}(\mathcal{M})$  est fermée, on obtient  $\text{car}(\mathcal{M}) = \text{Supp}(\mathcal{M}) \times \mathbb{C}^n$ .

LEMME A2. — Soit  $\mathfrak{A}$  un idéal à gauche cohérent de  $\mathcal{D}_{X/Y}$  tel que  $\mathfrak{A} \cap \mathcal{O}_X = \mathfrak{J}$  soit un idéal réduit de  $\mathcal{O}_X$  ; on suppose que le sous-ensemble analytique  $V(\mathfrak{J})$  défini par  $\mathfrak{J}$  est fini et propre au-dessus de  $Y$ . Alors  $\mathfrak{A} = \mathcal{D}_{X/Y} \bullet \mathfrak{J}$ .

*Preuve.* — Soit  $S \subset V(\mathfrak{J})$  le support de  $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{X/Y}/\mathfrak{A}$  ; on sait, par la PROPOSITION A1, que sa variété caractéristique est  $\text{car}(\mathcal{M}) = S \times \mathbb{C}^n$ . Soit  $h$  une section locale de  $\mathcal{O}_X$  qui s'annule sur  $S$  : alors une puissance de  $h$  appartient à  $\mathfrak{A} \cap \mathcal{O}_X = \mathfrak{J}$  ; comme  $\mathfrak{J}$  est réduit,  $h \in \mathfrak{J}$  et  $S = V(\mathfrak{J})$ .

Soit alors une section locale  $P$  de  $\mathfrak{A}$  ; son symbole principal  $\sigma(P)$  est une section locale de  $\mathcal{O}_X[\xi_1, \dots, \xi_n]$  qui s'annule sur  $\text{car}(\mathcal{M}) = V(\mathfrak{J}) \times \mathbb{C}^n$ , donc appartient à l'idéal réduit  $\mathcal{O}_X[\xi_1, \dots, \xi_n]\mathfrak{J}$ . Tous les coefficients des opérateurs  $(\partial/\partial x)^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$  de plus haut degré dans  $P$  appartiennent donc à  $\mathfrak{J}$  : par récurrence sur le degré des opérateurs on en déduit que  $P \in \mathcal{D}_{X/Y} \bullet \mathfrak{J}$ .

LEMME A3. — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -Module cohérent à support  $\Gamma$  fini au-dessus de  $Y$ . Au voisinage de tout point  $z \in \Gamma$ , il existe une section locale non nulle  $u$  de  $\mathcal{M}$  dont l'annulateur vérifie  $\text{Ann}(u) = \mathcal{D}_{X/Y} \bullet \mathfrak{J}$  où  $\mathfrak{J}_z$  est premier dans  $\mathcal{O}_{X,z}$ .*

*Preuve.* — Soit  $u_1$  une section non nulle de  $\mathcal{M}$  au voisinage de  $z$ . Si  $\text{Ann}(u_1) \cap \mathcal{O}_{X,z}$  n'est pas un idéal premier, il existe deux éléments  $s$  et  $t$  de  $\mathcal{O}_{X,z}$  tels que  $stu_1 = 0$ ,  $su_1 \neq 0$  et  $tu_1 \neq 0$  ; donc si on pose  $u_2 = su_1$ , on obtient  $\text{Ann}(u_2) \cap \mathcal{O}_{X,z}$  contient strictement  $\text{Ann}(u_1) \cap \mathcal{O}_{X,z}$  puisque  $t$  annule  $u_2$  et n'annule pas  $u_1$ . S'il n'existait pas de section locale  $u \neq 0$  satisfaisant à  $\text{Ann}(u) \cap \mathcal{O}_{X,z}$  premier, on construirait ainsi une suite strictement croissante d'idéaux de  $\mathcal{O}_{X,z}$ , ce qui contredirait le caractère noethérien de cette algèbre. Ainsi il existe  $u \in \mathcal{M}_z$  non nul tel que  $\mathfrak{J}_z = \text{Ann}(u) \cap \mathcal{O}_{X,z}$  soit premier, donc  $\text{Ann}(u) = \mathcal{D}_{X/Y} \bullet \mathfrak{J}$  d'après le LEMME A2.

LEMME A4. — *Soient  $\mathfrak{N}$  un faisceau cohérent de  $\mathcal{O}_X$ -modules et  $\mathcal{E} = \mathcal{D}_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathfrak{N}$  considéré comme  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -Module à gauche. Alors sa cohomologie de De Rham relative est :*

$$H^k(\mathcal{E}) = 0 \quad \text{pour } k \neq n,$$

$$H^n(\mathcal{E}) \cong \mathfrak{N} \quad (\text{isomorphisme de } \pi^{-1}\mathcal{O}_Y\text{-Module}).$$

*Preuve.* — En identifiant  $\Omega_{X/Y}^k$  et  $\Lambda^k \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$ , puis  $\Omega_{X/Y}^k \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$  et  $\Lambda^k \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{E}$ , on voit que le complexe de De Rham relatif de  $\mathcal{E}$  s'identifie au complexe de Koszul associé à la suite d'endomorphismes  $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$  de  $\mathcal{E}$  qui commutent entre eux. L'écriture unique d'un opérateur différentiel avec "coefficients à droite" permet d'écrire

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \mathfrak{N}$$

avec la notation habituelle :  $(\partial/\partial x)^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$  ; posons  $\mathcal{E}_r = \mathcal{E} / \sum_{i=1}^r \partial/\partial x_i \mathcal{E}$  : on a de la même manière

$$\mathcal{E}_r = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{N}^{n-r}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{(0,\beta)} \mathfrak{N}.$$

Avec cette écriture, il devient évident que  $\partial/\partial x_{r+1}$  induit une injection de  $\mathcal{E}_r$  dans lui-même donc que la suite  $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$  est régulière : par conséquent le complexe de De Rham relatif fournit une résolution de  $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}/\sum_{i=1}^n \partial/\partial x_i \mathcal{E} \cong \mathfrak{N}$ .

*Remarque.* — En particulier, pour  $\mathfrak{J}$  idéal cohérent de  $\mathcal{O}_X$  on obtient :

$$H^k(\mathcal{D}_{X/Y} \bullet \mathfrak{J}) = H^k(\mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y} \bullet \mathfrak{J}) = 0 \quad \text{pour } k \neq n,$$

$$H^n(\mathcal{D}_{X/Y} \bullet \mathfrak{J}) \cong \mathfrak{J} \quad \text{et} \quad H^n(\mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y} \bullet \mathfrak{J}) \cong \mathcal{O}_X/\mathfrak{J}.$$

**PROPOSITION A5.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -module cohérent à support fini au-dessus de  $Y$ . Alors sa cohomologie de De Rham relative vérifie  $H^k(\mathcal{M}) = 0$  pour  $k \neq n$  et  $\pi_* H^n(\mathcal{M})$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module cohérent.*

*Preuve.* — Comme le support de  $\mathcal{M}$  est fini au-dessus de  $Y$ , “la question est locale en haut” : ce qui suit est valable sur un voisinage  $U$  d’un point  $z$  du support de  $\mathcal{M}$ , mais nous n’avons pas signalé les restrictions pour ne pas alourdir l’écriture.

Si  $\mathcal{M} \neq 0$ , en utilisant le LEMME A3, nous pouvons construire une suite d’idéaux premiers  $\mathfrak{J}_p$  de  $\mathcal{O}_X$  ( $p = 1, \dots, r$ ) et une suite d’éléments  $u_1, \dots, u_r$  de  $\mathcal{M}$  tels que, en posant  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}/\sum_{j=1}^{p-1} \mathcal{D}_{X/Y} u_j$ , pour  $p = 2, \dots, r$ , l’annulateur de la classe de  $u_p$  dans  $\mathcal{M}_p$  soit exactement  $\mathcal{D}_{X/Y} \mathfrak{J}_p$ , et que  $\mathcal{M}_r = \mathcal{D}_{X/Y} \bar{u}_r$ . Autrement dit, on a les suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y} \mathfrak{J}_1 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_2 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y} \mathfrak{J}_p \xrightarrow{\phi_p} \mathcal{M}_p \xrightarrow{\Psi_p} \mathcal{M}_{p+1} \rightarrow 0,$$

...

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y} \mathfrak{J}_r \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_r \rightarrow 0,$$

$\phi_p$  étant définie par  $\phi_p(1) = \bar{u}_p$  et  $\Psi_p$  étant l’application canonique de passage au quotient. La suite s’arrête car, à chaque pas, nous choisissons un élément  $\bar{u}_p$  non nul de  $\mathcal{M}_p$  : la suite  $\sum_{j=1}^{p-1} \mathcal{D}_{X/Y} u_j$  de sous- $\mathcal{D}_{X/Y}$ -modules de  $\mathcal{M}$  est strictement croissante et on sait que  $\mathcal{D}_{X/Y,z}$  est noethérien.

Effectuons une récurrence décroissante sur  $p$  : supposons la conclusion de la proposition valable pour  $\mathcal{M}_{p+1}$  ;  $\Omega_{X/Y}^k$  étant libre sur  $\mathcal{O}_X$ , la suite exacte courte de  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -modules donne la suite exacte courte des

complexes de De Rham correspondants, d'où la suite exacte longue de cohomologie :

$$\cdots \rightarrow H^k(\mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}\mathfrak{I}_p) \rightarrow H^k(\mathcal{M}_p) \rightarrow H^k(\mathcal{M}_{p+1}) \rightarrow \cdots$$

L'hypothèse de récurrence et le LEMME A4 donnent  $H^k(\mathcal{M}_p) = 0$  pour  $k \neq n$  et pour  $k = n$  la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathfrak{I}_p \xrightarrow{H^n(\phi_p)} H^n(\mathcal{M}_p) \xrightarrow{H^n(\Psi_p)} H^n(\mathcal{M}_{p+1}) \rightarrow 0.$$

Tous les faisceaux considérés sont à support dans  $\text{Supp}(\mathcal{M})$  propre et fini sur  $Y$ , de plus le foncteur  $\pi_*$  est exact et  $\pi_*(\mathcal{O}_X/\mathfrak{I}_p)$  est  $\mathcal{O}_Y$ -cohérent d'après le théorème des morphismes finis : l'hypothèse de récurrence sur  $\pi_*H^n(\mathcal{M}_{p+1})$  permet donc de conclure que  $\pi_*H^n(\mathcal{M}_p)$  est lui-même  $\mathcal{O}_Y$ -cohérent.

**COROLLAIRE A6.** —  $\pi_*H^n$  est un foncteur additif exact et fidèle de la catégorie des  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -Modules cohérents à support fini au-dessus de  $Y$ , vers la catégorie des  $\mathcal{O}_Y$ -Modules cohérents.

*Preuve.* — Nous venons de voir que  $\pi_*H^n$  est un foncteur exact ; montrons que  $\mathcal{M} = 0$  équivaut à  $\pi_*H^n(\mathcal{M}) = 0$ . En effet, si  $\mathcal{M} \neq 0$ , on peut trouver localement une injection  $0 \rightarrow \mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}\mathfrak{I} \rightarrow \mathcal{M}$  où  $\mathfrak{I}$  est un idéal strict de  $\mathcal{O}_X$ , d'où une injection  $0 \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathfrak{I} \rightarrow H^n(\mathcal{M})$  ce qui prouve que  $H^n(\mathcal{M}) \neq 0$ . Enfin, pour un foncteur  $\Phi = \pi_*H^n$  exact entre catégories abéliennes, possédant sur les objets la propriété précédente ( $\Phi(\mathcal{M}) = 0$  équivaut à  $\mathcal{M} = 0$ ), il est facile de déduire sur les flèches les propriétés suivantes : si  $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , alors on a  $h$  injectif  $\Leftrightarrow \Phi(h)$  injectif,  $h$  surjectif  $\Leftrightarrow \Phi(h)$  surjectif, d'où  $h = 0 \Leftrightarrow \Phi(h) = 0$ .

Nous terminons cet appendice par quelques exemples simples de  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -Modules à support fini au-dessus de  $Y$ , exemples qui apportent plus de questions que de réponses. La classification "directe", en général, nous paraît très compliquée. Nous nous plaçons dans "les fibres en 0" en conservant néanmoins les mêmes notations, pour simplifier.

**PROPOSITION A7.** — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -Module de type fini, à support fini au dessus de l'espace des paramètres. Alors  $\mathcal{M}$  est monogène.

*Preuve.* — Dans le cas des  $\mathcal{D}$ -modules absolus holonomes, c'est un théorème dû à J.T. STAFFORD ; nous avons adapté la preuve donnée par J.E. BJÖRK (cf. [Bj, théorème 8.18]) au cas relatif. Par récurrence sur le nombre de générateurs, nous pouvons nous ramener à  $\mathcal{M}$  engendré par

deux éléments non nuls  $\alpha$  et  $\beta$ ; comme  $\mathcal{M}$  est à support fini au-dessus de  $Y$ , on peut trouver, grâce au théorème de préparation de Wierstrass, un polynôme  $h \in \mathcal{O}_Y[x_1]$  distingué en  $x_1$  qui s'annule sur le support de  $\mathcal{M}$ ; et même, quitte à prendre une puissance de  $h$ , on peut supposer que  $h \in \text{Ann}(\alpha) \cap \text{Ann}(\beta)$ .

LEMME. — Soit  $h \in \mathcal{O}_Y[x_1]$  un polynôme distingué en  $x_1$  de degré  $m$ ; alors :

$$\mathcal{D}_{X/Y}h + \mathcal{D}_{X/Y}h\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^m = \mathcal{D}_{X/Y}.$$

Preuve du Lemme. — Soit  $\mathcal{D}_{X^1/Y} = \mathcal{O}_{X^1}\langle\partial/\partial x_1\rangle$  le module des opérateurs différentiels sur  $X^1 = \mathbb{C} \times Y$  engendré par le champ  $\partial/\partial x_1$  et soit  $\mathfrak{N}$  le  $\mathcal{D}_{X^1/Y}$ -module

$$\mathfrak{N} = \mathcal{D}_{X^1/Y}/(\mathcal{D}_{X^1/Y}h + \mathcal{D}_{X^1/Y}h(\partial/\partial x_1)^m);$$

$\mathfrak{N}$  est à support dans  $h^{-1}(0)$  fini au-dessus de  $Y$ . Le terme constant dans l'écriture "à droite" de  $x_1^k h(\partial/\partial x_1)^m$  est  $(-1)^m(\partial/\partial x_1)^m(x_1^k h)$ ; alors par récurrence sur  $k = 0, \dots, m-1$ , on montre que

$$\partial/\partial x_1 \mathcal{D}_{X^1/Y} + \mathcal{D}_{X^1/Y}h(\partial/\partial x_1)^m$$

contient le  $\mathcal{O}_Y$ -module engendré par  $1, x_1, \dots, x_1^{m-1}$ ; donc par division par  $h$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{D}_{X^1/Y} + \mathcal{D}_{X^1/Y}h + \mathcal{D}_{X^1/Y}h\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^m = \mathcal{D}_{X^1/Y}$$

ce qui signifie  $H^1(\mathfrak{N}) = 0$  d'où  $\mathfrak{N} = 0$  par le COROLLAIRE A6.

Revenons à la preuve de la PROPOSITION A7 : montrons que  $\gamma = \alpha + (\partial/\partial x_1)^m \beta$  engendre  $\mathcal{M}$ ; d'après le lemme il existe des opérateurs  $U$  et  $V$  tels que  $1 = Uh + Vh(\partial/\partial x_1)^m$ ; donc

$$\beta = Uh\beta + Vh(\partial/\partial x_1)^m \beta = Vh(\partial/\partial x_1)^m \beta = Vh\gamma$$

puisque  $h\alpha = h\beta = 0$ . Il en résulte que  $\beta$  est multiple de  $\gamma$ , et également  $\alpha = \gamma - (\partial/\partial x_1)^m \beta$ .

Exemple A8. —  $\dim Y = 1$ ,  $\text{Supp}(\mathcal{M}) = \{0\} \times Y$ .

Le fait que  $\mathcal{O}_Y = \mathbb{C}\{y\}$  soit principal permet, en copiant le cas absolu, de donner la classification des  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -modules de type fini à support l'axe des paramètres  $Y$  : voir F. GEANDIER (théorème 4.5 de [GE.2]).

Soit  $\mathfrak{N}_d = \mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x_1, \dots, x_n, y^d)$  pour  $d \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$  avec  $y^{+\infty} = 0$ ; on a la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Tout  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -module de type fini à support l'axe des paramètres est isomorphe à un et un seul module  $\mathfrak{N}_{d_1} \oplus \mathfrak{N}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{N}_{d_p}$  avec  $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_p$ .*

Remarque. — D'après la PROPOSITION A7, nous savons que ces  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -modules sont monogènes et on peut expliciter, si l'on veut, de la manière suivante : soit

$$\mathcal{R}_{(d_1, \dots, d_p)} = \mathcal{D}_{X/Y} / \mathcal{D}_{X/Y} (x_1^p, x_2, \dots, x_n, y^{d_1} x_1^{p-1}, y^{d_2} x_1^{p-2}, \dots, y^{d_p})$$

où  $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_p$  est une suite croissante de  $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ . On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathfrak{N}_{d_1} \xrightarrow{\phi} \mathcal{R}_{(d_1, \dots, d_p)} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{R}_{(d_2, \dots, d_p)} \rightarrow 0$$

où  $\phi$  est la multiplication à droite par  $x_1^{p-1}$  et  $\Psi$  le passage au quotient. Cette suite est scindée : une rétraction est donnée, à une constante multiplicative près, par la multiplication à droite par  $(\partial/\partial x_1)^{p-1}$ . On obtient ainsi par récurrence :

$$\mathcal{R}_{(d_1, \dots, d_p)} \cong \mathfrak{N}_{d_1} \oplus \mathfrak{N}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{N}_{d_p}.$$

Exemple A9. —  $\dim Y = 2$ ,  $\dim \Omega = 1$  et

$$\mathcal{M} = (\mathcal{D}_{X/Y} / \mathcal{D}_{X/Y} (x, y_1)) \oplus (\mathcal{D}_{X/Y} / \mathcal{D}_{X/Y} (x, y_2)).$$

Le support de  $\mathcal{M}$  est la réunion de deux droites de l'espace des paramètres  $Y$ . Montrons que  $\mathcal{M}$  n'est pas isomorphe à  $\mathcal{D}_{X/Y} / \mathcal{D}_{X/Y} J$  où  $J$  est un idéal de  $\mathcal{O}_X$  ; en effet on aurait alors un isomorphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -modules :

$$\phi : H^1(\mathcal{M}) = (\mathcal{O}_X / (x, y_1)) \oplus (\mathcal{O}_X / (x, y_2)) \rightarrow \mathcal{O}_X / J.$$

Posons  $\phi((1, 0)) = \alpha \bmod J$  et  $\phi((0, 1)) = \beta \bmod J$  : alors  $y_1 \alpha \in J$  et  $y_2 \beta \in J$  ; comme  $y_1 \notin J$  on en déduit que  $\alpha$  n'est pas inversible dans  $\mathcal{O}_X$ , de même pour  $\beta$ . D'autre part, il existe  $a(y)$  et  $b(y)$  dans  $\mathcal{O}_Y$  tels que :

$$a(y)\alpha + b(y)\beta = 1 \bmod J$$

donc  $1 \in (x, y_1, y_2)\mathcal{O}_X + J \subset (x, y_1, y_2)\mathcal{O}_X$ , ce qui est impossible.

On peut trouver un générateur de  $\mathcal{M}$ , par exemple  $u = (\partial/\partial x, 1)$  ; un calcul élémentaire donne l'annulateur

$$\text{Ann}(u) = \mathcal{D}_{X/Y} \left( x^2, \left( \frac{\partial}{\partial x} x + 1 \right) y_2, x y_1, y_1 y_2 \right).$$

*Exemple A10.* —  $\dim Y = \dim \Omega = 1$ . Le support de  $\mathcal{M}$  est la réunion de deux droites de  $X = \Omega \times Y$ , d'équation  $x^2 - y^2 = 0$ . Comparons :

$$\mathcal{M}_1 = (\mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x-y)) \oplus (\mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x+y)),$$

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x^2 - y^2),$$

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}\left[(x-y)^2(x+y), \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + (x+y)\right].$$

Nous allons montrer que ces trois modules ne sont pas isomorphes deux à deux, bien que leurs cohomologies de De Rham respectives soient isomorphes sur  $\mathcal{O}_Y$  (il s'agit, répétons-le, des fibres à l'origine et  $H^1(\mathcal{M}_i)$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , est un  $\mathcal{O}_Y$ -module libre de rang 2). On a en effet les suites exactes de  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x-y) \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\Psi_2} \mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x+y) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x-y) \xrightarrow{\phi_3} \mathcal{M}_3 \xrightarrow{\Psi_3} \mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x+y) \rightarrow 0,$$

où  $\phi_2$  et  $\phi_3$  sont les multiplications à droite par  $x+y$  et  $x^2 - y^2$  respectivement, et  $\Psi_2$  et  $\Psi_3$  les applications canoniques de passage au quotient.

$\mathcal{M}_2$  est indécomposable. — D'après le LEMME A2, un facteur direct de  $\mathcal{M}_2$  ne peut être que  $\mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x-y)$  ou  $\mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x+y)$  car il n'a pas de  $y$ -torsion. On montre sans difficulté que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X/Y}}(\mathcal{M}_2, \mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x+y))$$

s'identifie à  $\mathcal{O}_Y$ ; ainsi, pour prouver que  $\mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x+y)$  n'est pas facteur direct de  $\mathcal{M}_2$ , il suffit de montrer que  $\Psi_2$  n'admet pas de section.

Soit donc  $s : \mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x+y) \rightarrow \mathcal{M}_2$  un morphisme défini par l'image de la classe de 1 ;

$$s(1) = \sum_{\alpha=0}^N \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (a_\alpha(x-y) + b_\alpha)$$

où les coefficients sont dans  $\mathcal{O}_Y$ . Écrivons  $s((x+y) \cdot 1) = 0$  dans  $\mathcal{M}_2$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=0}^N \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (b_\alpha(x+y)) \\ & + \sum_{\alpha=1}^N (-\alpha) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha-1} (a_\alpha(x-y) + b_\alpha) \in \mathcal{D}_{X/Y}(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Cela fournit  $s(1) = a_1(x - y)$ ; alors  $\Psi_2 \circ s(1)$  est la classe de  $-2ya_1$  dans  $\mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}(x + y)$  qui ne peut être 1 :  $s$  ne peut donc être une section de  $\Psi_2$ .

$\mathcal{M}_3$  est indécomposable. — On fait un raisonnement analogue, les calculs étant légèrement plus compliqués.

$\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  ne sont pas isomorphes. — On peut montrer, par un calcul direct, qu'un morphisme  $h : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_3$  ne peut être que la multiplication à droite par la classe d'un élément  $a(x, y)(x - y)$ ; un tel morphisme ne peut être surjectif. En fait  $\mathcal{M}_3$  n'est pas isomorphe à  $\mathcal{D}_{X/Y}/\mathcal{D}_{X/Y}J$  où  $J$  est un idéal de  $\mathcal{O}_X$ .

$\mathcal{M}_1$  est monogène d'après la PROPOSITION A7, engendré par exemple par la classe de  $(\partial/\partial x, 1)$ . En calculant l'annulateur, on trouve que  $\mathcal{M}_1$  est isomorphe au quotient de  $\mathcal{D}_{X/Y}$  par l'idéal :

$$\mathcal{D}_{X/Y} \left[ (x - y)^2(x + y), \frac{\partial}{\partial x} 2y(x - y) + (3y - x)(x + y) \right]$$

et la contemplation des trois idéaux de  $\mathcal{D}_{X/Y}$  donnant  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  par passage au quotient nous laisse rêveurs!

En fait les faisceaux de cohomologie  $H^1(\mathcal{M}_i)$  pour  $i = 1, 2, 3$ , égaux respectivement à  $(\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(x - y)) \oplus (\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(x + y))$ ,  $\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(x^2 - y^2)$  et  $\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(x - y)^2(x + y) + \mathcal{O}_Y(x + y)$  ne sont pas  $\pi^{-1}\mathcal{O}_Y$ -isomorphes.

## Appendice B

### Variété caractéristique de $\mathcal{D}_{X/Y}[s]F^s$

Dans [Kas], M. KASHIWARA détermine la variété caractéristique du  $\mathcal{D}_X$ -Module  $\mathcal{D}_X[s]F^s$ . Nous donnons ici une version relative de ces résultats.

Soient  $U$  un ouvert de  $X$  et  $P \in \mathcal{D}_{X/Y}[s](U)$ ;  $P$  s'écrit de la manière suivante :

$$P = \sum c_{\alpha, k} s^k \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$$

où  $c_{\alpha, k} \in \mathcal{O}_X(U)$  et  $(\partial/\partial x)^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$ . L'ordre total de  $P$  est

$$d(P) = \text{Sup}\{|\alpha| + k; c_{\alpha, k} \neq 0\}$$

et le symbole total de  $P$  est

$$\sigma(P) = \sum_{|\alpha| + k = d(P)} c_{\alpha, k} s^k \xi^\alpha.$$



PROPOSITION B1. — Soit  $\sigma \in \mathcal{O}_{X,0}[\xi_1, \dots, \xi_n, s]$  homogène, de degré  $d$  en  $s$  et  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Supposons que  $\sigma(\partial F/\partial x_1, \dots, \partial F/\partial x_n, F) = 0$ . Alors il existe  $P \in \mathcal{D}_{X/Y,0}[s]$  tel que :

- $PF^s = 0$ ;
- $\sigma(P) = \sigma^k$  pour un certain entier  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Remarque. —  $\mathcal{D}_{X/Y}[s]F^s$  est un  $\mathcal{D}_{X/Y}[s]$ -Module cohérent d'après les critères classiques de cohérence. On démontrera en fait que la variété caractéristique de ce  $\mathcal{D}_{X/Y}[s]$ -Module (associé à la filtration par l'ordre total de  $\mathcal{D}_{X/Y}[s]$ ) est le sous-ensemble analytique de  $T^*X \times \mathbb{C}$  égal à l'adhérence de :

$$\left\{ \left( x, y, \lambda \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \lambda \frac{\partial F}{\partial x_n}, \lambda F \right); \right. \\ \left. \lambda \in \mathbb{C}^*, \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, F \right) \neq (0, \dots, 0) \right\}.$$

Preuve de la proposition B1. — Considérons les projections :

$$\begin{aligned} \pi' : X' = X \times \mathbb{C} &\rightarrow Y & \text{et} & & \pi'' : X'' = X \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow S = Y \times \mathbb{C} \\ (x, y, u) &\mapsto y & & & (x, y, u, t) &\mapsto (y, t) \end{aligned}$$

On pose d'autre part :

$$G = e^u F \quad \text{et} \quad M = \mathcal{O}_{X''} \left[ \frac{1}{t-G} \right] / \mathcal{O}_{X''}.$$

$M$  est en fait isomorphe à  $\mathcal{D}_{X''}G^s$  considéré comme un sous- $\mathcal{D}_{X''}$ -Module de  $\mathcal{O}_{X''}[1/G]G^s$ , où les actions de  $t$  et  $\partial/\partial t$  sont définies par :

- $ta(s)G^s = a(s+1)G^{s+1}$ ;
- $\partial/\partial t(a(s)G^s) = -sa(s-1)G^{s-1}$  (cf. [Ma]).

$M$  est un  $\mathcal{D}_{X''}$ -Module holonome de variété caractéristique  $T_{t-G=0}^*X''$  : le conormal à l'hypersurface  $t-G=0$ . De plus  $M$  est un  $\mathcal{D}_{X''}$ -Module régulier (cf. [Ma, § II]). D'autre part,  $\mathcal{D}_{X''/S}[s]G^s = \mathcal{D}_{X''/S}G^s$ , c'est donc un  $\mathcal{D}_{X''/S}$ -Module cohérent. On peut alors utiliser le théorème de C. SABBAH (cf. [Sa, théorème 3.2, p. 228]). Comme  $\text{car}(M)$  est irréductible, la variété caractéristique relative de  $\mathcal{D}_{X''/S}G^s$  est le conormal relatif à sa projection.  $T_{\pi'|t-G=0}^*(X''/S)$  égal à l'adhérence de :

$$\left\{ \left( x, y, u, t, \lambda \frac{\partial G}{\partial x_1}, \dots, \lambda \frac{\partial G}{\partial x_n}, \lambda \frac{\partial G}{\partial u} \right); \right. \\ \left. t = G, \lambda \in \mathbb{C}^*, \left( \frac{\partial G}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}, \frac{\partial G}{\partial u} \right) \neq 0 \right\}.$$

Soit maintenant  $\sigma$  comme dans la PROPOSITION B1, on a :

$$\sigma\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}, \frac{\partial G}{\partial u}\right) = 0.$$

D'après le résultat précédent, il existe  $Q$  dans  $\mathcal{D}_{X''/S,0}$  tel que

$$Q(x, y, u, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial u})G^s = 0$$

et  $\sigma(Q) = \sigma^k$  pour un certain entier  $k$  ( $\sigma(Q)$  désignant le symbole principal de  $Q$ ). Écrivons  $Q = \sum a_{\alpha,k}(x, y, u, t)(\partial/\partial x)^\alpha(\partial/\partial u)^k$ . Alors  $P = \sum a_{\alpha,k}(x, y, 0, F)(\partial/\partial x)^\alpha s^k$  vérifie les propriétés demandées dans la PROPOSITION B1.

*Remarque.* — Cette proposition permet de donner une autre démonstration de l'existence d'un bon opérateur en  $s$ , relatif, annulant  $F^s$ , lorsque  $F$  définit une déformation à  $\mu$ -constant (cf. § 4); comme  $F$  est entier sur l'idéal  $\mathfrak{J}(F) = (\partial F/\partial x_1, \dots, \partial F/\partial x_n)$ , il suffit d'appliquer la PROPOSITION B1 où  $\sigma$  est défini à partir d'une relation de dépendance intégrale de  $F$  sur  $\mathfrak{J}(F)$ .

PROPOSITION B2. — *Lorsque  $F$  définit une déformation à  $\mu$ -constant,  $\mathcal{D}_{X/Y}[s]F^s$  est un  $\mathcal{D}_{X/Y}$ -Module cohérent de variété caractéristique relative  $W_{F,r}$  égale à l'adhérence de*

$$\left\{ \left( x, y, \lambda \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \lambda \frac{\partial F}{\partial x_n} \right); \lambda \in \mathbb{C}^*, F \neq 0 \right\},$$

“conormal ambiant relatif à  $F$ ”.

*Preuve.* — La cohérence résulte de l'existence d'un bon opérateur en famille, unitaire en  $s$ , annulant  $F^s$ , existence assurée par la remarque précédente ou par la PROPOSITION 4.1. La variété caractéristique cherchée est alors la même que celle de  $\mathcal{D}_{X/Y}F^s$ . Or on a vu au § 1 que, la suite  $(\partial F/\partial x_1, \dots, \partial F/\partial x_n)$  étant une suite régulière, on a  $\mathcal{D}_{X/Y}F^s \cong \mathcal{D}_{X/Y}/J$ , où  $J$  est l'idéal à gauche de  $\mathcal{D}_{X/Y}$  engendré par  $\partial F/\partial x_i \partial/\partial x_j - \partial F/\partial x_j \partial/\partial x_i$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ;  $\text{Gr } J$  est alors engendré par les  $\partial F/\partial x_i \xi_j - \partial F/\partial x_j \xi_i$ . Il reste à remarquer que,  $F$  définissant une déformation à  $\mu$ -constant,  $W_{F,r}$  contient  $\{0\} \times Y \times \mathbb{C}^n$  pour obtenir  $W_{F,r} = V(\text{Gr } J)$ .

*Remarque.* — On pourrait également prouver cette proposition à l'aide du résultat de C. SABBABH (cf. preuve de B1).

## BIBLIOGRAPHIE

- [Bj] BJÖRK (J.E.). — *Rings of differential operators*. — North Holland Math. Library, 1979.
- [B-S] BRIANÇON (J.) et SPEDER (J.P.). — *Familles équisingulières d'hyper-surfaces à singularité isolée*, Thèse de Doctorat d'État, Université de Nice, 1976.
- [B-G-M] BRIANÇON (J.), GRANGER (M.) et MAISONOBE (Ph.). — *Sur le polynôme de Bernstein des singularités semi-quasi-homogènes*, Prépublication 138, Université de Nice, 1986.
- [B-G-M-M] BRIANÇON (J.), GRANGER (M.), MAISONOBE (Ph.) et MINICONI (M.). — Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein, cas non dégénéré, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, t. **39**, 3, 1989, p. 553–610.
- [Ga] GABBER (O.). — The integrability of the characteristic variety, *Amer. J. Math.*, t. **103**, 1981, p. 445–468.
- [Ge1] GEANDIER (F.). — Polynômes de Bernstein et déformations à  $\mu$ -constant, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, t. **309**, 1989, p. 831–834.
- [Ge2] GEANDIER (F.). — *Déformations à  $\mu$ -constant : quelques résultats sur les polynômes de Bernstein*, Prépublication 255, Université de Nice, 1989.
- [H-S] HOUZEL (C.) et SCHAPIRA (P.). — Images directes de modules différentiels, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, t. **298**, 1984, p. 461–464.
- [K] KASHIWARA (M.). — *B-Functions and Holonomic Systems*, *Invent. Math.*, t. **38**, 1976, p. 33–53.
- [Ka1] KATO (M.). — The  $b$ -function of  $\mu$ -constant deformation of  $x^7 + y^5$ , *Bull. College Sci. Univ. Ryukyus*, t. **32**, 1981, p. 5–10.
- [Ka2] KATO (M.). — The  $b$ -function of  $\mu$ -constant deformation of  $x^9 + y^4$ , *Bull. College Sci. Univ. Ryukyus*, t. **32**, 1982, p. 5–8.
- [La] LAZZERI (F.). — A theorem on the monodromy of isolated singularities, *Singularités à Cargèse, Astérisque*, t. **7–8**, 1973, p. 269–275.

- [L-T] LEJEUNE (M.) et TEISSIER (B.). — *Clôtures intégrales des idéaux et équisingularité*, Séminaire Lejeune–Teissier, Prépublication Université de Grenoble, 1976.
- [Ma] MALGRANGE (B.). — Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, *Lecture Notes in Math.*, t. **459**, 1975, p. 98–119.
- [Me] MEBKHOUT (Z.). — *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les  $\mathcal{D}_X$ -Modules cohérents*. — Travaux en cours 35, Hermann, 1989.
- [Sa] SABBAAH (C.). — Proximité évanescence. II Équations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques, *Compositio Math.*, t. **64**, 1987, p. 213–241.
- [Sc] SCHNEIDERS (J.P.). — *Dualité pour les modules différentiels*, Thèse, Université de Liège, 1987.
- [T1] TEISSIER (B.). — Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, paragraphe II, Singularités à Cargèse, *Astérisque*, t. **7–8**, 1973, p. 285–362.
- [T2] TEISSIER (B.). — *Sur diverses conditions numériques d'équisingularité des familles de courbes (et un principe de spécialisation de dépendance intégrale)*, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1975.
- [Y] YANO (T.). — On the theory of  $b$ -functions, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, t. **14**, 1978, p. 111–202.