BULLETIN DE LA S. M. F.

P. COLLIN
R. KRUST

Le problème de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales sur des domaines non bornés

Bulletin de la S. M. F., tome 119, nº 4 (1991), p. 443-462
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_4_443_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 443–462.

LE PROBLÈME DE DIRICHLET POUR L'ÉQUATION DES SURFACES MINIMALES SUR DES DOMAINES NON BORNÉS

PAR

P. COLLIN ET R. KRUST (*)

RÉSUMÉ. — Cet article traite du problème de Dirichlet associé à l'équation des surfaces minimales sur un domaine non borné du plan. Le théorème principal fournit, dans le cas plus général de l'équation des surfaces à courbure moyenne prescrite, une estimation de la différence de deux solutions distinctes au voisinage de l'infini. Il en est déduit d'une part un théorème général d'unicité des solutions, et d'autre part un principe du maximum à l'infini. Une étude plus spécifique est menée dans le cas de l'équation des surfaces minimales sur des domaines particuliers tels que la bande ou le demi-plan.

ABSTRACT. — This paper deals with the Dirichlet problem for the minimal surface equation in an unbounded domain of the plane. In the more general case of the prescribed mean curvature equation, the main theorem gives an estimate for the difference between two solutions in a neighbourhood of infinity. A general theorem of unicity of solution, and a maximum principle at infinity are deduced from it. A more specific study is done in the case of the minimal surface equation on some particular domains such as the strip or the half-plane.

0. Introduction

Dans cet article, nous étudions l'équation des surfaces minimales :

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0 \tag{E}$$

sur des domaines Ω non bornés. Le problème de Dirichlet consiste à déterminer les solutions qui prennent des valeurs données sur $\partial\Omega$. Nous

(*) Texte reçu le 27 avril 1989, révisé le 16 avril 1991.
P. COLLIN, 22 av. Pierre Dupont, 95400 Villiers-Le-Bel.
R. KRUST, 15 rue des Martyrs, 93130 Noisy-Le-Sec.
Classification AMS : 53 A 10

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1991/443/$ 5.00

considérerons pour notre part plus particulièrement le problème de l'unicité.

Lorsque Ω est l'extérieur d'un disque, BERS [9] a montré que le problème admet au plus une solution bornée. Le même cas a ensuite été considéré par H. ROSENBERG et R. LANGEVIN [7] qui ont montré un principe du maximum à l'infini permettant de classifier les solutions, puis par l'un d'entre nous [5] qui a étudié certains problèmes d'existence.

Dans [11], R. SA EARP et H. ROSENBERG étudient le problème lorsque Ω est convexe. Ils obtiennent en particulier d'intéressants résultats d'existence et un principe du maximum qui seront rappelés dans la troisième partie.

Notre papier trouve son origine dans le problème de l'hélicoïde : il s'agit de déterminer les solutions du problème de Dirichlet sur une bande, pour des données linéaires au bord. Ce problème a été abordé par H. ROSENBERG, R. LANGEVIN et G. LEVITT dans [6] où ils ont prouvé, sous certaines hypothèses, que la seule solution est une portion d'hélicoïde. Dans la première partie de cet article, nous démontrons ce résultat en toute généralité.

Dans une deuxième partie, nous prouverons notre principal théorème qui étudie le comportement relatif à l'infini de deux solutions distinctes (ce théorème s'appliquera en fait à une classe plus vaste d'équations, celle des surfaces à courbure moyenne prescrite). Après la rédaction de cet article, nous avons eu connaissance d'un travail de J.F. HWANG [3] dans lequel il obtient des résultats de même nature (l'estimation obtenue ici est cependant un peu plus précise).

Enfin, nous utiliserons ces résultats dans la troisième partie, d'une part pour généraliser le théorème de Bers et le principe du maximum de Langevin-Rosenberg cités précédemment au cas d'un domaine quelconque; d'autre part, pour résoudre le problème de Dirichlet dans le cas d'un domaine convexe, pour certaines données au bord.

Nous remercions le professeur H. ROSENBERG pour l'aide et les conseils qu'il nous a apportés au cours de ce travail.

1. L'hélicoïde

Soit B la bande $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,;\; x_1 = 0,\; 0 < x_3 < a\}$. Soient L_0 et L_1 deux droites de $\mathbb{R}^3$ appartenant respectivement aux plans $x_3 = 0$ et $x_3 = a$.

Dans cette première partie, nous déterminerons toutes les surfaces minimales bordées par ces deux droites, et dont l'intérieur est un graphe au dessus de B.

En faisant tourner régulièrement une droite le long d'un axe perpendiculaire à L_0 et L_1, il est toujours possible de construire un hélicoïde — ou un plan — solution de ce problème. C'est en fait la seule solution.

THÉORÈME 1. — *Soit M_0 une surface minimale bordée par deux droites L_0 et L_1, dont l'intérieur est un graphe au-dessus de la bande $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x_1 = 0,\ 0 < x_3 < a\}$. Alors M_0 est une partie d'hélicoïde ou de plan.*

En usant du principe de réflexion, on construit, par des réflexions successives par rapport aux droites L_0 et L_1, une surface minimale M complète et simplement connexe. Sa structure conforme est donc celle du plan ou du disque de Poincaré. Nous allons voir que dans le premier cas, M est un hélicoïde ou un plan, et que le second cas ne se produit pas.

$A - M$ **est conformément un plan.**

On suppose qu'il existe un paramétrage conforme de M par le plan complexe $\Psi : \mathbb{C} \to M$. Du fait de l'hypothèse de graphe, Ψ peut être choisie de façon à ce que, sur M_0, la normale pointe dans le demi-espace $\{x_1 \geq 0\}$.

Par construction, les droites L_0 et L_1 sont des axes de symétrie de M. Elles se relèvent donc par Ψ en deux droites $D_0 = \Psi^{-1}(L_0)$ et $D_1 = \Psi^{-1}(L_1)$ (la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à L_0 par exemple, induit par Ψ^{-1} un difféomorphisme conforme de $\mathbb{C}$ ayant $D_0 = \Psi^{-1}(L_0)$ pour ensemble de points fixes). Il est alors clair que $\Psi^{-1}(M_0)$ est la bande de $\mathbb{C}$ bordée par D_0 et D_1.

Soit (g, ω) la représentation de Weierstrass de Ψ. Rappelons que $g(z)$, qui est la projection stéréographique de la normale à M au point $\Psi(z)$ sur le plan $(x_1, x_2) \approx \mathbb{C}$, est une fonction méromorphe et que ω est une forme différentielle holomorphe. Les fonctions coordonnées de M sont alors données par :

$$\begin{cases} x_1(z) = \operatorname{Re} \displaystyle\int^z \tfrac{1}{2}(1 - g^2)\,\omega, \\ x_2(z) = \operatorname{Re} \displaystyle\int^z \tfrac{1}{2} i(1 + g^2)\,\omega, \\ x_3(z) = \operatorname{Re} \displaystyle\int^z g\,\omega, \end{cases}$$

la métrique étant donnée par $\mathrm{d}s = \frac{1}{2}(1 + |g|^2)|\omega|$.

Compte tenu de l'hypothèse de graphe et de l'orientation choisie, on a $\operatorname{Re} g > 0$ sur $M_0 \backslash \partial M_0$. De plus, g est à valeur dans $\mathbb{C} - \{0\}$. En effet, si g admet un pôle ou un zéro sur M_0 — c'est-à-dire si la normale est parallèle à l'axe Ox_3 — c'est nécessairement sur L_0 ou L_1. En considérant le plan $x_3 = 0$ (ou $x_3 = a$), on constate en appliquant le principe du maximum à bord que cela contredit l'hypothèse de graphe.

Le long de L_j ($j = 0, 1$), la normale à M est orthogonale à L_j. Donc $g(D_j)$ est inclus dans une demi-droite Δ_j d'origine O et d'argument θ_j (où $\theta_j \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$). L'argument θ_j, qui est aussi l'angle — orienté par l'axe Ox_3 — formé par l'axe Ox_2 et la droite L_j, est déterminé de manière unique, sauf si L_j est parallèle à Ox_1. Dans ce dernier cas, deux valeurs sont possibles : $\theta_j = \pm\frac{1}{2}\pi$ (Fig. 1 et 2).

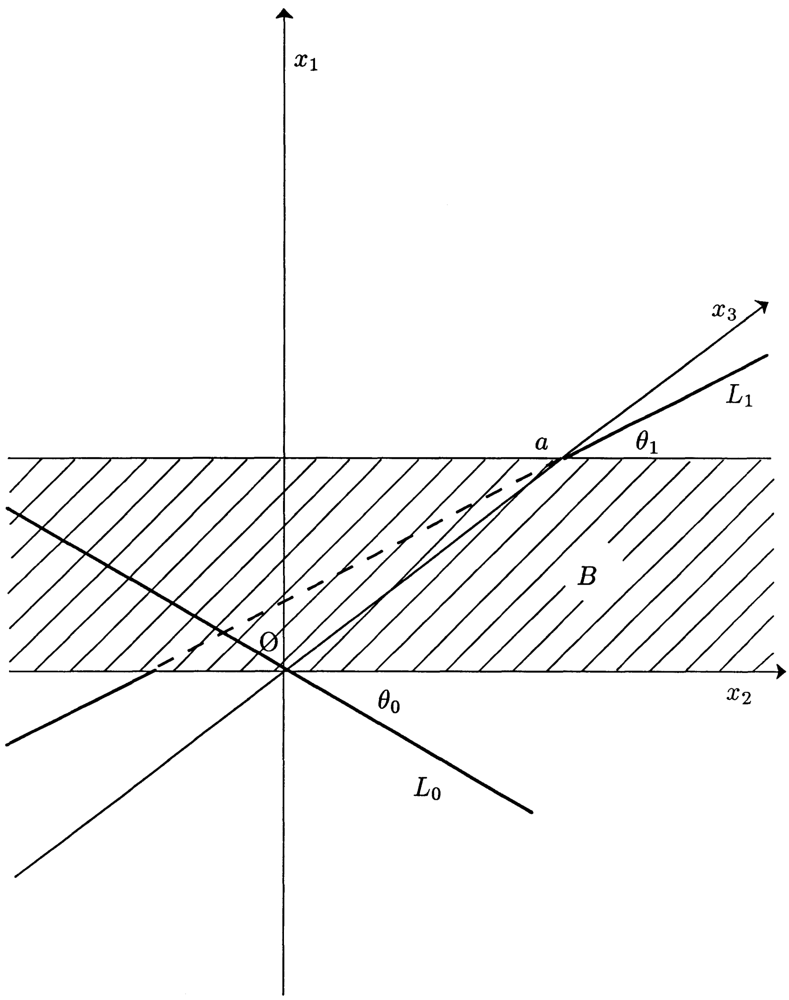

Figure 1.

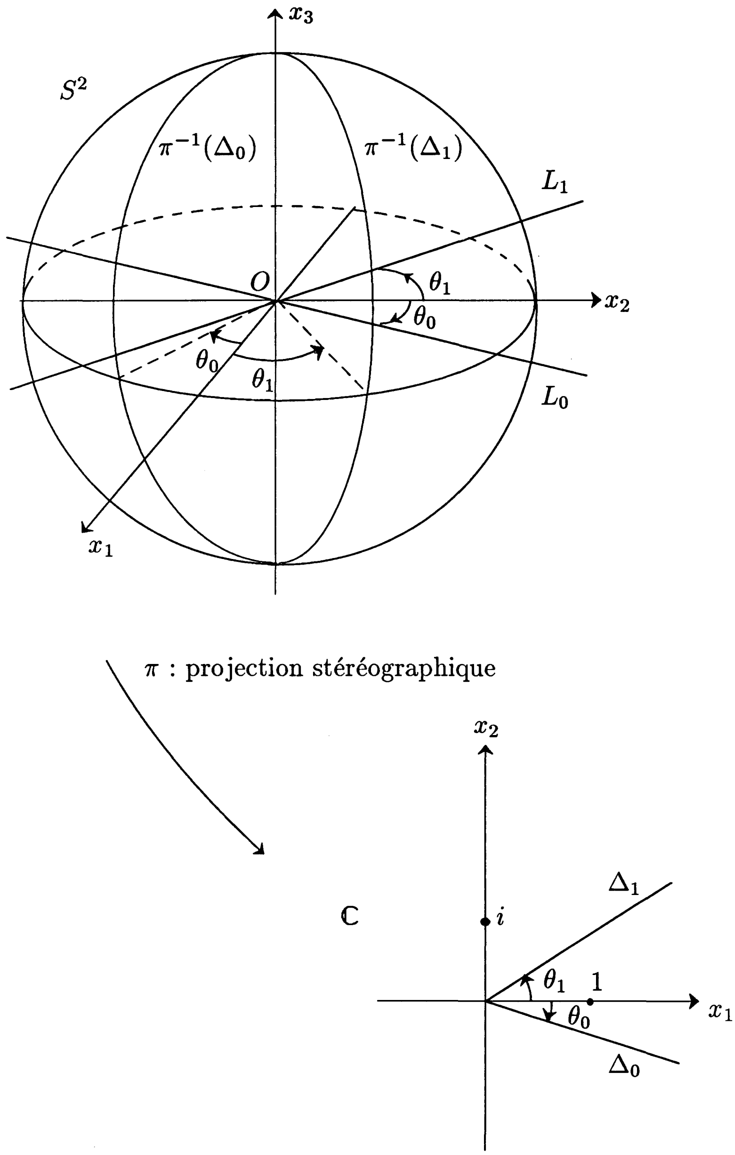

Figure 2. L'application de Gauss.

Remarquons enfin que si $P \in M$, et si P' désigne son symétrique par rapport à L_j, alors $g(P')$ est le symétrique de $g(P)$ par rapport à Δ_j.

Étudions tout d'abord le cas $\theta_0 = \theta_1$. Comme $\operatorname{Arg} g \in \,]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ sur $\Psi^{-1}(M_0 \backslash \partial M_0)$ et que $\Delta_0 = \Delta_1$, on a, compte tenu de la remarque précédente, $\operatorname{Arg} g(z) \neq \theta_0 + \pi \;\; [2\pi]$ pour $z \in \mathbb{C}$. Par le théorème de Picard, g est une application constante, et M est un plan.

Supposons maintenant $\theta_0 \neq \theta_1$. L'angle $\theta = \theta_1 - \theta_0$ est alors défini de manière unique, sauf si l'une au moins des droites L_0 et L_1 est verticale. Par un changement de paramètre, on peut supposer que les droites D_0 et D_1 sont parallèles à l'axe réel et d'ordonnées respectives $i\theta_0$ et $i\theta_1$. Soit $\tilde{g} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un relèvement de g par l'exponentielle, tel que $\tilde{g}(D_0) \subset D_0$:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\
\mathbb{C} \arrow[ur, "\tilde{g}"] \arrow[r, "g"'] & \mathbb{C} - \{0\}
\end{tikzcd}$$

On a alors $\tilde{g}(D_1) \subset D_1$ et $|\operatorname{Im} \tilde{g}| < \frac{1}{2}\pi$ sur la bande bordée par D_0 et D_1. La fonction $\tilde{g}(z) - z$ est donc une fonction entière et périodique de période $2i\theta$, dont la partie imaginaire est bornée. Par le théorème de Liouville, elle est constante. Cette constante est réelle puisque $\tilde{g}(D_0) \subset D_0$. Par une translation réelle dans l'espace des paramètres, on peut la rendre nulle, de sorte que $g(z) = \mathrm{e}^z$.

Déterminons maintenant ω. On a $x_3(z) = \operatorname{Re} \int^z g\omega$, $x_3 = 0$ sur D_0, $x_3 = a$ sur D_1 et $0 \leq x_3 \leq a$ entre D_0 et D_1. Soit h la fonction harmonique définie sur $\mathbb{C}$ par : $h(z) = x_3(z) - \operatorname{Im}[(a/\theta)z]$. La fonction h est périodique de période $2i\theta$, et par conséquent bornée. On en déduit qu'elle est constante, d'où :

$$x_3(z) = \operatorname{Im}\big[(a/\theta)z\big] + \mu = \operatorname{Re}\big[(-ia/\theta)z\big] + \mu$$

et

$$g\omega = (-ia/\theta)\,\mathrm{d}z, \quad \omega = (-ia/\theta)\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z.$$

La représentation de Weierstrass ($g = \mathrm{e}^z$, $\omega = (-ia/\theta)\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z$) définit bien un hélicoïde.

La solution est donc unique, sauf si l'une au moins des droites L_0 et L_1 est verticale. Dans ce cas, deux types d'hélicoïde, correspondant aux deux valeurs possibles de θ, sont solutions. Enfin, si les deux droites sont verticales, les solutions ne sont déterminées qu'à une translation verticale près.

$B - M$ **est conformément un disque de Poincaré.**

Nous utiliserons ici un résultat dû à OSSERMANN [9] : la normale à une surface minimale complète de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas un plan atteint tous les points de la sphère S^2, à l'exception peut-être d'un ensemble de capacité logarithmique nulle.

Soit $\Psi : D \to M$ un paramétrage conforme orientant M de façon à ce que, sur M_0, la normale pointe dans le demi-espace $x_1 \geq 0$. Comme dans le cas précédent, on démontre que L_0 et L_1 se relèvent par Ψ en des géodésiques de Poincaré D_0 et D_1 du disque D ; (g, ω) désignant la représentation de Weierstrass de M, g est à valeur dans $\mathbb{C} - \{0\}$, et $g(D_j)$, $(j = 1, 2)$, est inclus dans la demi-droite Δ_j d'argument θ_j (qui a la même valeur qu'en A).

Dans le cas $\theta_0 = \theta_1$, nous avons vu précédemment que g vérifie $\operatorname{Arg} g(z) \neq \theta_0 + \pi \ [2\pi]$. Donc g omet une demi-droite de $\mathbb{C}$, qui forme un ensemble de capacité logarithmique non nulle. Comme M est complète par construction, et n'est pas un plan (M aurait le type conforme de $\mathbb{C}$), ceci est impossible.

Supposons $\theta_0 \neq \theta_1$. Les géodésiques D_0 et D_1 étant non sécantes, deux cas sont à envisager selon qu'elles sont ou non asymptotes à l'infini (Fig. 3 et 4).

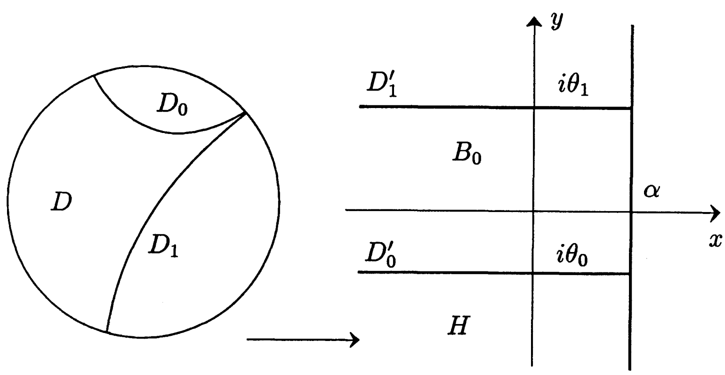

Figure 3.

Dans le premier cas, les deux géodésiques D_0 et D_1 ont un point commun P sur le cercle à l'infini ∂D. On peut alors, à l'aide d'une

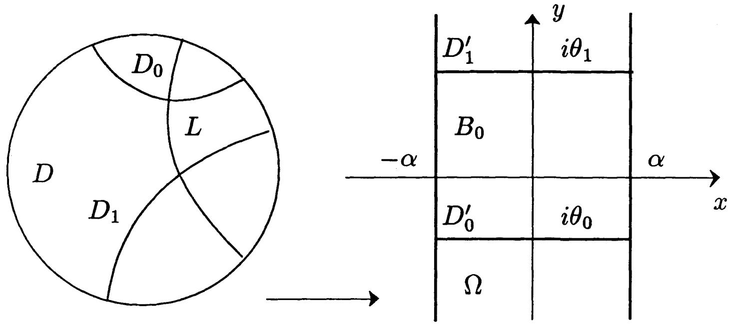

Figure 4.

transformation conforme du disque sur le demi-plan de Poincaré

$$H = \{z \in C\,;\ \operatorname{Re} z < \alpha\},$$

reparamétrer M par $\Psi' : H \to \mathbb{R}^3$ de façon à ce que P corresponde au point ∞ de H, et

$$(\Psi')^{-1}(L_j) = D'_j = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Im} z = \theta_j\} \cap H, \qquad (j = 1, 2).$$

(α peut être pris ici égal à zéro et n'est introduit que pour traiter conjointement les deux cas.)

Dans le second cas, les deux géodésiques D_0 et D_1 admettent une perpendiculaire commune L. Soit Φ une transformation conforme de D sur une bande de $\mathbb{C}$ telle que $\Phi(L)$ soit l'axe de cette bande. $\Phi(D_0)$ et $\Phi(D_1)$ sont deux géodésiques de Poincaré orthogonales à l'axe. Ce sont donc des segments de droites perpendiculaires à cet axe. On peut alors, en composant Φ avec une transformation affine de $\mathbb{C}$, paramétrer M par une bande $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |\operatorname{Re} z| < \alpha\}$, $\Psi' : \Omega \to \mathbb{R}^3$, de façon à ce que

$$(\Psi')^{-1}(L_j) = D'_j = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Im} z = \theta_j\} \cap \Omega, \quad j = 1, 2.$$

L'application de Gauss g définie sur H (ou Ω) admet un relèvement par l'exponentielle $\tilde g$ tel que $\operatorname{Im} \tilde g(z) = \theta_0$ pour $z \in D'_0$ et $\operatorname{Im} g(z) = \theta_1$ pour $z \in D'_1$. Sur le domaine B_0 de H (ou de Ω) délimité par D'_0 et D'_1, on a $|\operatorname{Im} \tilde g(z)| < \frac{1}{2}\pi$, d'après l'hypothèse de graphe. Posons $\tilde g_1(z) = \tilde g(z) - z$. Sur B_0, $|\operatorname{Im} \tilde g(z)| < \frac{1}{2}\pi$ et $|\operatorname{Im} z| \leq \frac{1}{2}\pi$. Ce qui entraîne $|\operatorname{Im} \tilde g_1(z)| < \pi$. Comme $\operatorname{Im} \tilde g_1(z) = 0$ sur D'_0 et D'_1, par symétrie, l'inégalité $|\operatorname{Im} \tilde g_1(z)| < \pi$ reste valable dans le domaine fermé compris entre D'_0 et D'_2, D'_2 étant le symétrique de D_0' par rapport à D_1'. Toujours par symétrie, $\tilde{g}_1$ est périodique de période $2i(\theta_1 - \theta_0)$. L'inégalité est donc valable sur tout H (ou Ω).

Considérons maintenant la surface minimale M_1 définie sur H (ou Ω) par le couple de Weierstrass (g_1, ω), ou $g_1(z) = \exp \tilde{g}_1(z)$. Puisque $|\operatorname{Im} \tilde{g}_1(z)| < \pi$, g_1 omet la demi-droite des réels négatifs. Comme M_1 n'est pas un plan (M_1 aurait le type conforme de $\mathbb{C}$), par le théorème d'Osserman, M_1 n'est pas complète. Or sa métrique est donnée par :

$$\mathrm{d}s_1 = (1 + |g_1|^2)(\tfrac{1}{2}|\omega|).$$

Puisque $|g_1(z)|^2 = |g(z)\mathrm{e}^{-z}|^2 = |g(z)|^2\mathrm{e}^{-2x}$ où $z = x + iy$. On a pour $z \in H$ (ou Ω), $x < a$ et $|g_1(z)|^2 \geq \mathrm{e}^{-2\alpha}|g(z)|^2$. On en déduit alors que

$$\mathrm{d}s_1 \geq (1 + \mathrm{e}^{-2\alpha}|g|^2)(\tfrac{1}{2}|\omega|) \geq \mathrm{e}^{-2\alpha}\,\mathrm{d}s$$

où $\mathrm{d}s = (1 + |g|^2)(\frac{1}{2}|\omega|)$ représente la métrique de M qui est complète. Donc M_1 est aussi complète, ce qui contredit le résultat précédent.

2. Théorème fondamental

Dans cette partie, nous allons démontrer un théorème concernant le comportement relatif à l'infini de deux solutions du problème de Dirichlet sur un domaine Ω non borné, pour l'équation des surfaces à courbure moyenne prescrite.

Introduisons tout d'abord quelques notations : soient u et u' deux fonctions de classe C^2 sur Ω, continues par morceaux sur $\partial\Omega$ et vérifiant :

$$u = u' \text{ sur } \partial\Omega - E, \quad H_u(x_1, x_2) = H_{u'}(x_1, x_2) \text{ sur } \Omega,$$

E désignant un ensemble discret de points de $\partial\Omega$ et H_u la courbure moyenne du graphe M de u au point $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$ (de même pour $H_{u'}$).

En notant H la fonction commune $H_u = H_{u'}$, u et u' sont des solutions de l'équation :

$$(\mathrm{E_H}) \qquad (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 2Hw^3$$

où

$$w = \left(1 + |\nabla u|^2\right)^{1/2}, \quad p = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Soient ω et ω' les formes différentielles :

$$\omega = \frac{p}{w}\,\mathrm{d}x_2 - \frac{q}{w}\,\mathrm{d}x_1, \quad \omega' = \frac{p'}{w'}\,\mathrm{d}x_2 - \frac{q'}{w'}\,\mathrm{d}x_1.$$

On vérifie facilement que $d\omega = d\omega' = 2H\,dx_1 \wedge dx_2$. La forme différentielle $\omega'-\omega$ est donc fermée, et il existe une fonction $\widetilde{\Psi}$ (multivaluée si Ω n'est pas simplement connexe) telle que $d\widetilde{\Psi} = \omega'-\omega$. La fonction $\widetilde{\Psi}$ est clairement lipschitzienne de rapport 2. (Dans le cas des surfaces minimales où $H = 0$, les formes ω et ω' sont elles-mêmes fermées ; ce sont en fait les différentielles des conjuguées harmoniques des fonctions hauteurs définies sur les graphes M et M'.)

Enfin, n et n' désignent les normales à M et M', et $\tilde{u} = u' - u$.

LEMME 1. — *Soit D un domaine borné tel que $\overline{D}$ soit contenu dans Ω. On a :*

$$\int_{\partial D} \tilde{u}\, d\widetilde{\Psi} \geq \iint_D |\nabla\widetilde{\Psi}|^2$$

Démonstration du Lemme 1. — Par le théorème de Stokes on a :

$$\int_{\partial D} \tilde{u}\, d\widetilde{\Psi} = \iint_D \Big[(p'-p)\Big(\frac{p'}{w'} - \frac{p}{w}\Big) + (q'-q)\Big(\frac{q'}{w'} - \frac{q}{w}\Big)\Big].$$

Comme $n = (-p/w, -q/w, 1/w)$, l'intégrant de droite s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}(wn - w'n')\cdot(n-n') &= (w+w')(1 - n\cdot n')\\ &= \tfrac{1}{2}(w+w')(n-n')^2.\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2}(w+w') \geq 1$ et

$$(n-n')^2 = \Big(\frac{p}{w} - \frac{p'}{w'}\Big)^2 + \Big(\frac{q}{w} - \frac{q'}{w'}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{w} - \frac{1}{w'}\Big)^2 \geq |\nabla\widetilde{\Psi}|^2$$

d'où le résultat.

LEMME 2. — *Soit $C \subset \Omega$ une courbe de niveau de $\tilde{u}$ et C' un sous-arc de C sur lequel $\nabla\tilde{u}$ ne s'annule pas. Alors $\widetilde{\Psi}$ est strictement croissante le long de C' orientée par le vecteur directement orthogonal à $\nabla\tilde{u}$.*

Démonstration du Lemme 2. — C' est une courbe de classe C^2 dans Ω puisque $\nabla\tilde{u}$ ne s'annule pas sur celle-ci. Soit $v(P) = (\nabla\tilde{u})^{\perp}$ le vecteur directement orthogonal à $\nabla\tilde{u}$ en un point P de C'. On a alors :

$$d\widetilde{\Psi}\cdot v(P) = (q'-q)\Big(\frac{q'}{w'} - \frac{q}{w}\Big) + (p'-p)\Big(\frac{p'}{w'} - \frac{p}{w}\Big)$$

D'après ce qui précède, cette quantité vaut $\frac{1}{2}(w+w')(n-n')^2$. Elle est donc strictement positive puisque P est un point régulier de C.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème principal de cette partie.

THÉORÈME 2. — *Soit Ω un domaine non borné du plan $\mathbb{R}^2$, soient u et u' deux fonctions distinctes, de classe C^2 sur Ω, telles que $H_u(x_1,x_2) = H_{u'}(x_1,x_2)$ sur Ω, et telles que $u_{|\partial\Omega}$ et $u'_{|\partial\Omega}$ soient continues par morceaux et coïncident en leurs points de continuité. Soit*

$$M(r) = \sup_{C_r} |u' - u| \quad où \quad C_r = \Omega \cap \{X \in \mathbb{R}^2\,;\ |X| = r\}\cdot$$

Alors $\liminf\limits_{r\to\infty}\Big(\dfrac{M(r)}{\log r}\Big) > 0$. *Si de plus la longueur des arcs C_r est uniformément bornée alors* $\liminf\limits_{r\to\infty}\Big(\dfrac{M(r)}{r}\Big) > 0$.

Il suffit de montrer le théorème lorsque les solutions u et u' vérifient $u' \geq u$ sur Ω et se prolongent à un domaine Ω' contenant $\overline{\Omega}$. En effet, quitte à échanger u et u', on peut trouver un point P tel que $\tilde{u}(P) = a > 0$. On considère alors v et v' les restrictions de u et $u' - a$ à une composante connexe de $\{\tilde{u} > a\}$. Le résultat pour u et u' découle immédiatement de celui sur v et v'.

Ces hypothèses supplémentaires nous permettront en particulier d'appliquer, au cours de la démonstration, d'une part le LEMME 1 aux domaines D bornés contenus dans $\overline{\Omega}$ et d'autre part le LEMME 2 aux courbes de niveau C de $\overline{\Omega}$.

Démonstration du Théorème 2. — Soient $\Omega_r = \{X \in \Omega\,;\ |X| < r\}$ et $C_r = \{X \in \Omega\,;\ |X| = r\}$. On note $\ell(C_r)$ la longueur de C_r. Soit R_0 tel que $\mu = \iint_{\Omega_{R_0}} |\nabla\widetilde{\Psi}|^2 > 0$. (Ce qui est réalisé dès que $\Omega_{R_0} \neq \emptyset$.)

Par le LEMME1 appliqué à Ω_R $(R > R_0)$:

$$\mu + \iint_{\Omega_R - \Omega_{R_0}} |\nabla\widetilde{\Psi}|^2 \leq \int_{\partial\Omega_R} \tilde{u}\,\mathrm{d}\widetilde{\Psi}.$$

Comme $\tilde{u} = 0$ sur $\partial\Omega_R \setminus C_R$, le terme de droite de cette inégalité vaut :

$$\int_{C_R} \tilde{u}\,\mathrm{d}\widetilde{\Psi} \leq M(R) \int_{C_R} |\mathrm{d}\widetilde{\Psi}| \leq M(R)\eta(R)$$

où $\eta(R) = \int_{C_R} |\mathrm{d}\widetilde{\Psi}|$ et on a

$$\mu + \iint_{\Omega_R - \Omega_{R_0}} |\nabla\widetilde{\Psi}|^2 \leq M(R)\,\eta(R). \tag{1}$$

Par le lemme de Schwartz, on obtient pour tout $r \in [R_0, R]$:

$$\eta(r)^2 \leq \ell(C_r) \int_{C_r} |\nabla\widetilde{\Psi}|^2 \leq 2\pi r \int_{C_r} |\nabla\widetilde{\Psi}|^2,$$

d'où $\displaystyle\int_{C_r} |\nabla\widetilde{\Psi}|^2 \geq \frac{\eta(r)^2}{2\pi r}$ et

$$\iint_{\Omega_R - \Omega_{R_0}} |\nabla\widetilde{\Psi}|^2 \geq \int_{R_0}^{R} \frac{\eta(r)^2}{2\pi r}\, \mathrm{d}r. \tag{2}$$

En combinant cette inégalité avec (1), on obtient :

$$\mu + \int_{R_0}^{R} \frac{\eta(r)^2}{2\pi r}\, \mathrm{d}r \leq M(R)\eta(R). \tag{3}$$

$\tilde{u}$ vérifie le principe du maximum en tant que différence de deux solutions de ($\mathrm{E_H}$) [10]. Appliqué aux domaines Ω_R, ceci montre que $M(R)$ est une fonction croissante de R. Soit R_1 fixé et $A = M(R_1)$. Pour $R_0 < R < R_1$, on a d'après (3) :

$$\mu + \int_{R_0}^{R} \frac{\eta(r)^2}{2\pi r}\, \mathrm{d}r \leq A\eta(R). \tag{4}$$

Nous allons montrer que (4) n'admet pas de solutions η définies sur un intervalle arbitrairement grand, ce qui donnera une majoration de R_1. Pour cela considérons ζ la fonction définie sur $J = [R_0, R_0\,\mathrm{e}^{4\pi A^2/\mu}[$ par

$$\frac{2A}{\mu} - \frac{1}{\zeta(r)} = \frac{1}{2\pi A}\log\Big(\frac{R}{R_0}\Big)\cdot$$

Elle vérifie l'équation différentielle :

$$\zeta'(r) = \frac{\zeta(r)^2}{2\pi A r} \quad \text{et} \quad \zeta(R_0) = \frac{\mu}{2A}\cdot \tag{e}$$

Par conséquent, en comparant avec l'équation intégrale (4) obtenue pour η : $\zeta(R) < \eta(R)$ sur $J \cap [R_0, R_1]$. En effet, par construction

$$\{R \geq R_0\,;\ \forall\, R',\ R_0 \leq R' \leq R,\ \zeta(R') < \eta(R')\}$$

est un ouvert de $J \cap [R_0, R_1]$ contenant R_0. Comme

$$A\zeta(R) = \tfrac{1}{2}\mu + \int_{R_0}^{R} \frac{\zeta(r)^2}{2\pi r}\, \mathrm{d}r,$$

on montre facilement en utilisant (4) que cet ensemble est aussi fermé. L'inégalité ci-dessus résulte alors d'un argument de connexité.

Or $\zeta(R)$ tend vers $+\infty$ lorsque R tend vers $R_0\,\mathrm{e}^{4\pi A^2/\mu}$. On en déduit, η étant définie sur $[R_0, R_1]$, que $R_1 < R_0\,\mathrm{e}^{4\pi A^2/\mu}$. En récrivant différemment cette dernière inégalité, on obtient une première minoration de $M(R)$:

$$(5)\qquad A = M(R_1) \geq \Big(\frac{\mu}{4\pi}\log\frac{R_1}{R_0}\Big)^{1/2} \qquad \text{où}\quad \mu = \iint_{\Omega_{R_0}} |\nabla\widetilde{\Psi}|^2.$$

Dans ce qui suit nous allons affiner ce résultat à l'aide du LEMME 2 et d'un choix judicieux de R_0 et R_1. Montrons pour cela que η est uniformément minorée à l'infini par un nombre strictement positif.

Soit Λ un arc connexe borné de $\partial\Omega$ non réduit à un point. Il existe $r_0 > 0$ tel que $\Lambda \subset \Omega_{r_0}$. On a alors pour tout $r > r_0$:

$$\eta(r) = \int_{C_r} |\mathrm{d}\widetilde{\Psi}| \geq \Big|\int_{C_r} \mathrm{d}\widetilde{\Psi}\Big| = \Big|\int_{\partial\Omega_r} \mathrm{d}\widetilde{\Psi} - \int_{\partial\Omega_r - C_r} \mathrm{d}\widetilde{\Psi}\Big|.$$

Or par le théorème de Stokes $\int_{\partial\Omega_r} \mathrm{d}\widetilde{\Psi} = 0$. De plus $\partial\Omega_r - C_r \subset \partial\Omega$ est une courbe de niveau de $\tilde{u}$. Comme on a supposé $u' \geq u$ dans Ω, $\nabla\tilde{u}$ est toujours dirigé vers l'intérieur de Ω (sauf en des points isolés où $\nabla\tilde{u} = 0$). L'orientation de $\partial\Omega$ par le vecteur directement orthogonal à $\nabla\tilde{u}$ est donc inverse de celle issue de l'orientation de $\mathbb{R}^2$. On en déduit ainsi par le LEMME 2 que $\int d\widetilde{\Psi} < 0$ sur tout sous-arc de $\partial\Omega$. Ce qui entraîne $\big|\int_{\partial\Omega_r - C_r} \mathrm{d}\widetilde{\Psi}\big| > \big|\int_\Lambda \mathrm{d}\widetilde{\Psi}\big|$ et en notant $c = \big|\int_\Lambda \mathrm{d}\widetilde{\Psi}\big|$ on obtient :

$$\eta(r) \geq c > 0 \qquad \forall\, r \geq r_0.$$

Choisissons maintenant $R_0 > r_0$. Alors

$$\mu(R_0) = \iint_{\Omega_{R_0}} |\nabla\widetilde{\Psi}|^2 \geq \int_{r_0}^{R_0} \frac{\eta(r)^2}{2\pi r}\,\mathrm{d}r$$

d'après (2) et, en utilisant (6), $\mu(R_0) \geq (c^2/2\pi)\log(R_0/r_0)$.

En combinant cette dernière inégalité avec la première minoration obtenue (5) et en prenant $R_1 = R_0^2/r_0$ (qui est bien supérieur à R_0) on obtient :

$$M(R_1) \geq \Big[\frac{c^2}{8\pi^2}\log\frac{\sqrt{R_1 r_0}}{r_0}\log\frac{R_1}{\sqrt{R_1 r_0}}\Big]^{1/2} = \frac{c}{4\pi\sqrt{2}}\log\frac{R_1}{r_0}.$$

Le théorème est ainsi démontré dans le cas le plus général.

Supposons maintenant que la longueur des C_r soit bornée par b. On a toujours (6) $\eta(r) \geq c > 0$ pour tout r supérieur à un r_0. Mais puisque $\widetilde{\Psi}$ est lipschitzienne de rapport 2 :

$$\eta(r) = \int_{C_r} |\mathrm{d}\widetilde{\Psi}| \leq 2\ell(C_r) \leq 2b.$$

L'inégalité (1) devient alors

$$(1') \qquad \mu + \iint_{\Omega_R - \Omega_{r_0}} |\nabla\widetilde{\Psi}|^2 \leq 2bM(R).$$

Par le lemme de Schwartz, pour tout $r \geq r_0$

$$c^2 < \eta(r)^2 \leq \ell(C_r) \int_{C_r} |\nabla\widetilde{\Psi}|^2,$$

d'où $\int_{C_r} |\nabla\widetilde{\Psi}|^2 \geq c^2/b$. En introduisant cette inégalité dans (1′), on obtient directement

$$M(R) \geq \frac{\mu}{2b} + \int_{r_0}^{R} \frac{c^2}{2b^2}\,\mathrm{d}r \geq \frac{\mu}{2b} + (R - r_0)\,\frac{c^2}{2b^2}\cdot$$

Ce qui assure le résultat.

Remarque. — Ceci est la meilleure estimation possible dans le cas général, comme le montre l'exemple des surfaces minimales :

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^2 \,;\ |X| > 1\},$$
$$u(X) = \mathrm{ch}^{-1}(|X|) \quad \text{(caténoïde)} \quad \text{et} \quad u'(X) = 0.$$

Nous donnons maintenant une généralisation du théorème de Bers cité en introduction.

COROLLAIRE 2.1. — *Soit Ω un domaine non borné du plan, soient $f \in C_m(\partial\Omega)$ (fonctions continues par morceaux), H une fonction définie sur Ω. Le problème de Dirichlet pour l'équation* ($\mathrm{E_H}$) *admet au plus une solution bornée de classe C^2.*

Preuve du Corollaire 2.1 : c'est une conséquence immédiate du théorème principal (THÉORÈME 2).

COROLLAIRE 2.2 (Principe du maximum à l'infini). — *Soient* Ω *un domaine non borné du plan et* u, v *deux solutions de* $(\mathrm{E_H})$ *sur* Ω *telles que* $\limsup(u-v) \leq 0$ *pour toute suite de points tendant vers* $\partial\Omega - E$, *E désignant un ensemble discret de points de* $\partial\Omega$. *Soit* $N(R) = \sup_{C_R}(u-v)$. *Si* $N(R)/\log(R)$ *tend vers* 0 *quand* $R \to \infty$, *alors* $u \leq v$ *sur* Ω.

Preuve du Corollaire 2.2. — Soit P un point de $\partial\Omega$ tel que

$$u(P) > v(P) + 2a, \quad a > 0.$$

Notons Ω' la composante connexe de $\{Q \in \mathbb{R}^2\,;\ u(Q) > v(Q) + a\}$ contenant P. Clairement, $\partial\Omega' \subset \Omega$ et $u = v + a$ sur $\partial\Omega'$. La composante Ω' n'est pas bornée car dans le cas contraire, on aurait, par le principe du maximum, $u = v + a$, contredisant $u(P) > v(P) + 2a$. Appliquons le THÉORÈME 2 aux fonctions $u_{|\Omega'}$ et $u' = (v+a)_{|\Omega'}$. Par construction, $M(R) \leq N(R) - a$ (égalité si $\{Q \in \mathbb{R}^2\,;\ u(Q) > v(Q) + a\}$ est connexe), d'où $u = u' = v + a$ sur Ω' ce qui est de nouveau contradictoire.

Note. — Ceci généralise le principe du maximum de LANGEVIN et ROSENBERG [7]. En effet, soient u et v deux solutions de $(\mathrm{E_H})$ sur un domaine non borné Ω, telles que $u \leq v$. Si $(v-u) \geq a$ sur $\partial\Omega$, alors $(v-u) \geq a$ sur Ω. (Appliquer le COROLLAIRE 2.2 à $u + a$ et v.)

Supposons maintenant $\partial\Omega$ compact (domaine extérieur) et $u \leq v$. Si il existe une suite de point $X_i \to \infty$ telle que $\lim u(X_i) - v(X_i) = 0$, alors $u = v$ (sinon, il existe une courbe C dans Ω qui encercle $\partial\Omega$ sur laquelle $u < v$, ce qui entraîne qu'il existe $a > 0$ tel que $u + a < v$ sur l'extérieur de C).

3. Le problème de Dirichlet.

Dans cette partie, nous résolvons le problème de de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales (E) dans un certain nombre de cas particuliers. Nous noterons $C_m(\partial\Omega)$ l'ensemble des fonctions réelles continues par morceaux sur $\partial\Omega$.

A. Résultats généraux.

Tout d'abord, rappelons quelques résultats obtenus par R. SA EARP et H. ROSENBERG [11] dans le cas de domaines convexes.

THÉORÈME 3.1 (Existence de solutions). — *Soient* Ω *un domaine convexe distinct du demi-plan et* $f \in C_m(\partial\Omega)$. *Il existe un prolongement minimal de* f *à* Ω.

THÉORÈME 3.2 (Principe du maximum). — *Soient* Ω *un domaine convexe distinct du demi-plan,* f *et* $g \in C_m(\partial\Omega)$. *Soient* u *et* v *deux* *prolongements minimaux de f et g à Ω. Si v est l'unique prolongement minimal de g à Ω et si $f \leq g$, alors $u \leq v$.*

COROLLAIRE 3.1. — *Soient Ω un domaine convexe distinct du demi-plan, $f \in C_m(\partial\Omega)$ et u un prolongement minimal de f à Ω. Si $f \leq A$, alors $u \leq A$.*

Nous donnons maintenant un théorème général pour des données bornées sur le bord d'un domaine convexe.

THÉORÈME 3.3. — *Soient Ω un domaine convexe distinct du demi-plan et $f \in C_m(\partial\Omega)$ une fonction bornée. Il existe une unique solution au problème de Dirichlet.*

Preuve du Théorème 3.3. — C'est une conséquence du théorème d'existence (THÉORÈME 3.1), du principe du maximum (COROLLAIRE 3.1) et du COROLLAIRE 2.1.

B. Le problème de Dirichlet sur le demi-plan.

Le problème de Dirichlet pour un domaine convexe et des données bornées au bord est donc résolu, à l'exception du cas du demi-plan. On le résout dans le théorème suivant :

THÉORÈME 3.4. — *Soient $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_2 \,;\, x_1 > 0\}$ et $f \in C_m(\partial\Omega)$ une fonction bornée. Soient $m = \inf_{\partial\Omega} f$ et $M = \sup_{\partial\Omega} f$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un unique prolongement minimal u_λ de f à Ω vérifiant :*

$$(7) \qquad m + \lambda x_1 \leq u_\lambda \leq M + \lambda x_1.$$

Toutes les solutions sont ainsi décrites. De plus :

1) *Si $\lambda \leq \lambda'$, alors $u_\lambda \leq u_{\lambda'}$.*

2) *Le vecteur normal au graphe de u_λ admet pour limite uniforme en x_2 lorsque x_1 tend vers l'infini, le vecteur normal au plan $x_3 = \lambda x_1$.*

Preuve du Théorème 3.4. — Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous construisons u_λ de la manière suivante. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ et $\Omega_n = \Omega \cap \{|X| < n\}$. Considérons la fonction v_n définie sur $\partial\Omega_n$ par :

- $v_n = f$ sur $\partial\Omega_n \cap \partial\Omega$;
- $v_n(X) = m + \lambda x_1$ sur $\partial\Omega_n \cap \Omega$ (où $X = (x_1, x_2)$).

Ω_n étant convexe, v_n se prolonge en une solution de (E) sur Ω_n, que nous appellerons encore v_n. On a clairement sur Ω_n :

$$m + \lambda x_1 \leq v_n(X) \leq M + \lambda x_1.$$

Soit $n' > n$. On a donc $v_n \leq v_{n'} \leq M + \lambda x_1$ sur $\partial\Omega_n$ et, par le principe du maximum, sur Ω_n. Par les théorèmes classiques de convergence, v_n converge uniformément sur tout compact de Ω vers une solution u_λ de (E). Définissons de la même façon V_n sur Ω_n qui vaut f sur $\partial\Omega_n \cap \partial\Omega$ et $M+\lambda x_1$ sur $\partial\Omega_n \cap \Omega$. Comme $v_n \leq u_\lambda \leq V_n$ sur Ω_n, on a bien $u_{\lambda\,|\,\partial\Omega} = f$.

Il est clair par le théorème principal (THÉORÈME 2) que deux solutions vérifiant (7) sont identiques.

Soit $\lambda' \geq \lambda$. La fonction $u_{\lambda'}$ est la limite d'une suite v'_n qui, par construction, vérifie $v'_n \geq v_n$. Par conséquent $u_{\lambda'} \geq u_\lambda$.

Soit u une solution du problème. Nous allons montrer qu'il existe λ tel que $u = u_\lambda$. Soient w_n et W_n les fonctions définies sur $\partial\Omega_n$ par :

- $w_n = W_n = 0$ sur $\partial\Omega_n \cap \partial\Omega$,
- $w_n = u - m$, $W_n = u - M$ sur $\partial\Omega_n \cap \Omega$.

Remarquons que $f - m \geq w_n = W_n \geq f - M$. Comme précédemment, w_n et W_n se prolongent sur Ω_n en deux solutions de (E) vérifiant, par le principe du maximum :

$$u - m \geq w_n \geq W_n \geq u - M. \tag{8}$$

Pour tout $n' > n$, on a donc, sur $\partial\Omega_n \cap \Omega$:

$$w_n = u - m \geq w_{n'} \geq W_{n'} \geq u - M = W_n.$$

On en déduit aisément que w_n et W_n convergent vers deux solutions w et W de (E) sur Ω, vérifiant $w_{|\,\partial\Omega} = W_{|\,\partial\Omega} = 0$. Comme

$$0 \leq w_n - W_n \leq M - m,$$

$w - W$ est bornée et, par le théorème principal (THÉORÈME 2), $w = W$. Par une symétrie par rapport à l'axe Ox_2, on construit alors un prolongement de w à $\mathbb{R}^2$ qui, par le théorème de Bernstein (voir [9]), est linéaire $w(X) = \lambda x_1$. Par (8), on a donc $m + \lambda x_1 \leq u \leq M + \lambda x_1$.

Pour prouver 2), nous allons dans un premier temps borner le gradient de u_λ sur $\Omega^1 = \{(x_1, x_2)\,;\ x_1 > 1\}$. Observons pour cela que si $P \in \Omega^1$, la fonction $u_\lambda - u_\lambda(P)$ est une solution de l'équation des surfaces minimales (E) qui est, d'après (7), bornée par $(M - m) + \lambda$ sur le disque de centre P de rayon 1. Son gradient en P est donc borné par une constante γ qui ne dépend que de $(M - m) + \lambda$ (voir [12]).

On associe maintenant à u_λ l'opérateur différentiel L_λ défini par

$$L_\lambda v = \big(1 + (u_y)^2\big)v_{xx} - 2u_x u_y v_{xy} + \big(1 + (u_y)^2\big)\, v_{yy}.$$

D'après ce qui précède, cet opérateur est uniformément elliptique et à coefficients bornés (par $\gamma^2 + 1$) sur Ω^1. Il existe donc ([2], th. 12-4) une constante $C = C(\gamma)$ telle que si $v \in C^2(\Omega^1)$ est une solution bornée par A de $L_\lambda v = 0$ sur Ω^1, on ait, pour tout $P \in \Omega^1$:

$$\left|\nabla v(P)\right| \cdot d(P; \partial\Omega^1) \leq CA.$$

En prenant $v = u_\lambda - \lambda x_1 - m$, on a d'après (7) :

$$0 \leq v \leq M - m \quad \text{et} \quad \left|\nabla v(P)\right| \leq C \, \frac{(M-m)}{d(P\,;\, \partial\Omega^1)}$$

ce qui prouve 2).

C. Le problème sur la bande.

Le théorème démontré dans la première partie permet d'obtenir un résultat plus fort que dans le cas général (THÉORÈME 3.3) :

THÉORÈME 3.5. — *Soient $B = \{(x_1, x_2)\,;\ 0 < x_1 < 1\}$ et $f \in C_m(\partial\Omega)$ telle qu'existent et soient finies les limites* :

$$\lim_{x_2 \to +\infty} \frac{f(0, x_2)}{x_2}, \qquad \lim_{x_2 \to -\infty} \frac{f(0, x_2)}{x_2},$$
$$\lim_{x_2 \to +\infty} \frac{f(1, x_2)}{x_2}, \qquad \lim_{x_2 \to -\infty} \frac{f(1, x_2)}{x_2}.$$

Alors f admet une unique extension minimale à B.

Preuve du Théorème 3.5. — L'existence est de nouveau assurée par le THÉORÈME 3.1. Il est facile de voir que si l'on remplace dans l'énoncé du théorème principal (THÉORÈME 2)

$$M(r) = \sup_{C_r} |u' - u| \quad \text{par} \quad M(R) = \sup_{I_r} |u' - u|,$$

où $I_r = \{(x_1, x_2)\,;\ |x_2| = r\}$, celui-ci reste valable. Nous allons montrer, ce qui le contredira, que :

$$\lim_{r \to \infty} \frac{M(r)}{r} = 0.$$

Soient B^+ la demi-bande $\{x_2 > 0\} \cap B$ et v la fonction définie sur B^+ par

$$v(x_1, x_2) = x_2 \mathrm{tg}\big(\alpha(1 - x_1) + \alpha' x_1\big)$$

où $\alpha, \alpha' \in \left]-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi\right[$ vérifient :

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{x_2\to+\infty} \frac{f(0,x_2)}{x_2}, \quad \operatorname{tg}\alpha' = \lim_{x_2\to+\infty} \frac{f(1,x_2)}{x_2}.$$

Le graphe de v est bien sur une portion d'hélicoïde H. La portion d'hélicoïde H_ε obtenue par une rotation d'angle ε autour de l'axe orienté Ox_1 est le graphe, pour ε assez petit, d'une fonction v_ε sur B^+. Remarquons que, d'après le THÉORÈME 1 et via le principe de symétrie, v_ε est l'unique prolongement minimal à B^+ de $v_{\varepsilon\,|\,\partial B^+}$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe b_ε tel que sur ∂B^+ :

$$v_{-\varepsilon} - b_\varepsilon \le u \le v_\varepsilon + b_\varepsilon, \quad v_{-\varepsilon} - b_\varepsilon \le u' \le v_\varepsilon + b_\varepsilon.$$

Par le principe du maximum (THÉORÈME III.2), ces inégalités se prolongent à la demi-bande B^+. D'où $|u-u'| \le |v_\varepsilon - v_{-\varepsilon}| + 2b_\varepsilon$. En remarquant que $v_\varepsilon(x_1,x_2) = x_2 v_\varepsilon(x_1,1)$:

$$\frac{|u-u'|}{x_2} \le \frac{2b_\varepsilon}{x_2} + \sup_{\{x_2=1\}} |v_\varepsilon - v_{-\varepsilon}|.$$

En passant à la limite pour $x_2 \to \infty$, et ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{r\to\infty}\Big(\sup_{\{x_2=r\}} \frac{|u-u'|}{r}\Big) = 0.$$

Tenant compte de ce que le même raisonnement peut être tenu sur $B^- = \{x_2 < 0\} \cap B$, on obtient bien :

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r} = 0.$$

Remarque. — Il n'y a pas toujours unicité dans le problème de Dirichlet sur la bande. Un exemple en sera donné dans [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] COLLIN (P.). — *Compléments sur les graphes de courbure moyenne constante*, à paraître.

[2] GILBARG (D.) and TRUDINGER (N.S.). — *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag 1983.

[3] HWANG (J.F.). — *Comparison principles and Liouville theorems for prescribed mean curvature equation in unbounded domains*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), t. **15**, 1988, p. 341–355.

[4] JENKINS (H.) and SERRIN (J.). — *Variational problems of minimal surfaces type, II. Boundary value problem for the minimal surface equation*, Arch. Rational Mech. Anal., t. **21**, 1963, p. 321–342.

[5] KRUST (R.). — *Remarques sur le problème extérieur de Plateau*, Duke Math. J., t. **59**, 1989, p. 161–173.

[6] LANGEVIN (R.), LEVITT (G.) and ROSENBERG (H.). — *Complete minimal surfaces with long line boundaries*, Duke Math. J., t. **55**, **4**, 1987, p. 1–11.

[7] LANGEVIN (R.) and ROSENBERG (H.). — *A maximal principle at infinity for minimal surfaces and applications*, à paraître dans Duke Math. J., t. **57**, 1988, p. 819–828.

[8] BLAINE LAWSON (H.). — *Lectures on minimal submanifolds*, Vol. 1, Math. Lecture Series 9, Publish or Perish.

[9] OSSERMAN (R.). — *A survey of minimal surfaces*, Van Nostrand Reinhold Math. Studies 25, 1969.

[10] PROTTER (M.) and WEINBERGER (H.). — *Maximum principles in differential equations*. — Prentice Hall, 1967.

[11] SA EARP (R.) and ROSENBERG (H.). — *The Dirichlet problem for the minimal surface equation on unbounded planar domains*, J. Math. Pures Appl., t. **68**, 1989, p. 163–183.

[12] SERRIN (J.). — *A priori estimates for solutions of the minimal surface equation*, Arch. Rationnal Mech. Anal., t. **14**, 1963, p. 376–383.