

BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS LABOURIE

Problème de Minkowski et surfaces à courbure constante dans les variétés hyperboliques

Bulletin de la S. M. F., tome 119, n° 3 (1991), p. 307-325

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_3_307_0

© Bulletin de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**PROBLÈME DE MINKOWSKI ET
SURFACES A COURBURE CONSTANTE
DANS LES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES**

PAR

FRANÇOIS LABOURIE (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on montre que le problème de Minkowski admet une solution dans les 3-variétés hyperboliques lorsque l'on prescrit une courbure comprise entre -1 et 0 . En particulier, on obtient ainsi un feuilletage par des surfaces à courbure de Gauss constante du complémentaire du coeur de Nielsen dans une variété hyperbolique. Ceci permet de réaliser toute surface à courbure constante comme bord convexe de variété hyperbolique.

ABSTRACT. — In this paper, we show that Minkowski's problem admits a solution in hyperbolic 3-manifolds when one prescribes the curvature to be between -1 and 0 . As a consequence we exhibit a foliation by surfaces of constant Gaussian curvature of the complementary of the convex hull in any hyperbolic manifold. This allows us to realise any metric of constant Gaussian curvature as the convex boundary of some hyperbolic manifold.

Dans le cas d'une surface convexe compacte dans \mathbb{R}^3 , l'application de Gauss est un homéomorphisme entre cette surface convexe et la sphère unité. A une surface convexe dans l'espace euclidien, on peut alors associer une fonction sur la sphère unité, à savoir la fonction induite de la fonction courbure sur la surface par l'application de Gauss.

Le problème de Minkowski dans l'espace euclidien s'énonce ainsi : *quelles sont les fonctions sur la sphère obtenues ainsi ?* La surface associée sera alors appelée solution du problème de Minkowski.

Ce problème a une solution dont l'énoncé est simple et élégant ([N] et dans un autre cadre [Po]) :

THÉORÈME (NIRENBERG, ALEXANDROV, POGORELOV). — *Il existe une surface convexe solution du problème de Minkowski pour une fonction*

(*) Texte reçu le 20 juin 1990.

F. LABOURIE, Centre de Mathématiques, URA au CNRS D.0169, École Polytechnique, Palaiseau Cedex 91128, France.

k positive définie sur la sphère S^2 , si et seulement si

$$\int_{S^2} \frac{u}{k} ds = 0,$$

où u est le vecteur position sur la sphère et ds l'élément d'aire. De plus, une telle surface est unique à translation près.

Nous nous intéresserons à un problème analogue dans le cadre des variétés hyperboliques. La solution de ce problème nous permettra d'étudier les surfaces à courbure de Gauss constante plongée dans ces variétés. Énonçons notre nouveau problème :

Soit M une variété hyperbolique géométriquement finie et sans cusp, (c'est-à-dire à cœur de Nielsen N compact) et différente du tore plein. La variété $M \setminus N$ est alors la réunion finie de variétés B_i (voir 1.1). Chaque B_i est homéomorphe à $S_i \times \mathbb{R}$, où les S_i sont les surfaces de Riemann compactes de genre g plus grand que 2 qui sont les composantes connexes du bord M_∞ de M à l'infini.

Dans une telle variété où plus généralement dans un bout géométriquement fini B (voir 1.2), associé à une lamination géodésique mesurée, dont le bord à l'infini est B_∞ , se pose naturellement un problème de Minkowski.

Soit en effet S , une surface convexe lisse et incompressible dans B . On définit l'application de Gauss, ϕ , de S dans B_∞ en associant à tout point de S la géodésique normale extérieure en ce point. On associe donc à toute telle surface convexe S une fonction $F(S)$ sur B_∞ , donnée par

$$(*) \quad F(S) = g \circ \phi^{-1}$$

où g est la fonction courbure de S . Comme dans le cas euclidien, nous nous intéresserons aux fonctions ainsi définies sur le bord à l'infini.

Notre premier résultat est le suivant :

THÉORÈME 1. — Soit k une fonction C^∞ définie de B_∞ dans $] -1, 0[$. Il existe alors une unique surface convexe S incompressible dans B , telle que

$$k = F(S).$$

Ce résultat est, pour le problème de Minkowski, l'analogue du résultat de M. S. BERGER ([B]) pour le problème de Nirenberg :

THÉORÈME (M.S. BERGER). — Toute fonction négative sur une surface de Riemann de genre au moins 2 est la courbure d'une unique métrique conforme.

En appliquant notre résultat à une fonction constante, on en déduit l'existence et l'unicité d'une surface S_k à courbure constante k pour tout k dans $] -1, 0[$. Un exemple bien connu de cette situation est le cas où M est le quotient de l'espace hyperbolique par un groupe fuchsien : les surfaces équidistantes de l'hyperplan de symétrie sont alors à courbure constante et de plus forment un feuilletage. Cette situation est en fait le cas général :

THÉORÈME 2. — *Chaque bout géométriquement fini de dimension 3 est feuilleté par une famille de surfaces (S_k) à courbure constante k appartenant à $] -1, 0[$.*

Remarquons que ceci nous fournit une nouvelle manière de nous promener dans l'espace de Teichmüller à partir d'un point et d'une lamination géodésique mesurée.

Le THÉORÈME 1 nous permet également de définir, pour tout réel k , une application f_k de $H(M)$, l'espace des structures hyperboliques géométriquement finies et sans cusp d'une 3-variété M , dans l'espace de Teichmüller de son bord à l'infini.

Cette application associe à tout point de $H(M)$, la structure conforme de l'unique surface à courbure constante k , bordant un convexe contenant le coeur de Nielsen. Ceci est bien sûr lié à la paramétrisation de $H(M)$ par la structure conforme induite sur le bord à l'infini ($[T]$, $[M]$) comme nous le verrons en 4.1. On en est conduit naturellement à se demander si ces applications sont également des paramétrisations. Notre réponse est partielle et montre simplement que ces applications sont surjectives, ce que l'on peut énoncer comme un théorème d'existence de métriques.

THÉORÈME 3. — *Soit M une variété hyperbolique de dimension 3, convexe compacte et différente du tore plein, et soit g une métrique à courbure constante strictement supérieure à -1 , sur ∂M , le bord de M . Il existe alors une métrique hyperbolique complète h sur M dont la restriction à ∂M est g .*

La question qui reste posée est donc celle de l'unicité de la structure hyperbolique sur M avec notre donnée au bord.

Les résultats obtenus ici permettront dans [L2] d'obtenir de nouvelles paramétrisations de l'espace des \mathbb{CP}^1 -structures sur une surface de Riemann compacte.

Remarquons pour finir, que la démonstration du THÉORÈME 1 utilise les résultats et la terminologie de la théorie des courbes pseudo-holomorphes à la Gromov. Nous montrerons en particulier que tout problème à courbure de Gauss prescrite peut se traduire dans ce langage.

1. Rappels et définitions

1.1. Variétés hyperboliques. — Nous rappelons ici quelques définitions et propriétés concernant les variétés hyperboliques. Pour une introduction plus complète, nous renvoyons à [T]. Soit M une variété hyperbolique complète et de dimension 3 que nous voyons comme le quotient de l'espace hyperbolique par un groupe discret Γ . Son groupe fondamental Γ agit naturellement sur la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique. On dit que ce groupe est *kleinien* si son ensemble limite n'est pas toute la sphère. L'enveloppe convexe de cet ensemble limite dans le modèle projectif de l'espace hyperbolique est lui aussi invariant par Γ . On appelle *cœur de Nielsen*, le quotient de cette enveloppe convexe par le groupe fondamental. Le cœur de Nielsen N est un ensemble convexe qui a comme propriété d'être l'intersection de tous les sous-ensembles convexes homotopiquement équivalents à M . On dit enfin que M est *géométriquement finie et sans cusps* (g.f.s.c) si son cœur de Nielsen est compact. Dans ce cas, le bord à l'infini M_∞ de M est une réunion finie de surfaces de Riemann compactes S_i . La variété $M \setminus N$ est alors la réunion finie de composantes connexes B_i homéomorphes à $S_i \times \mathbb{R}$. Les variétés B_i sont des *bouts géométriquement finis* au sens de la définition suivante :

1.2. Définition. — Une variété hyperbolique complète B de dimension 3 est un *bout géométriquement fini* (Figure 1) si

(i) B est homéomorphe à $S \times]0, 8[$, où S est une surface de Riemann compacte.

(ii) Si \bar{B} est le complété métrique de B , et $B_0 = \bar{B} \setminus B$ est le bord de B , alors B_0 est isométrique à une surface compacte à courbure -1 .

(iii) Le bord de B est concave, c'est-à-dire il n'existe pas de géodésique tracée dans B reliant deux points du bord.

(iv) B_0 est une surface plissée au sens de Thurston.

Remarquons donc que le bord B_0 (qui n'est en général pas lisse) de B est alors muni d'une métrique à courbure -1 , et d'une lamination géodesique mesurée. Réciproquement, deux telles données permettent de construire un bout géométriquement fini. ([C-E-G])

On définit ensuite le *bord à l'infini* B_∞ de B comme en [B-G-S], en le considérant comme l'espace des demi-géodésiques complètes divergentes et minimisantes, quotienté par la relation d'équivalence : être asymptotique. Il est facile de vérifier que c'est une surface de Riemann compacte.

Il va enfin clair que dans un bout géométriquement fini le rayon d'injectivité tend vers l'infini lorsque l'on s'approche du bord à l'infini.

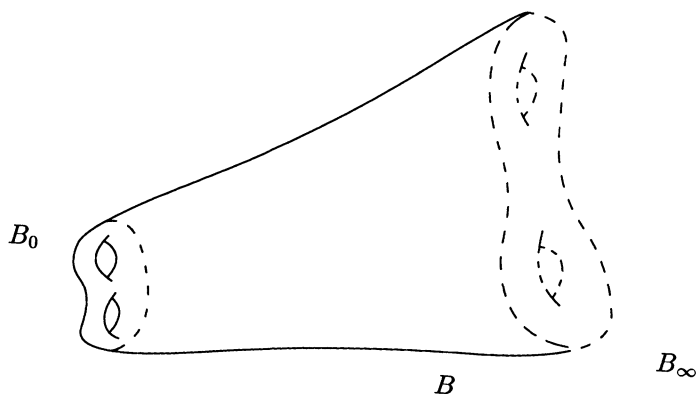


Figure 1.

1.3. Application de Gauss. — Soit maintenant S une surface convexe incompressible dans un bout géométriquement fini. Ceci est une manière pédante de dire que S sépare B en deux composantes connexes; l'une convexe contenant B_0 , l'autre contenant B_∞ (Figure 2).

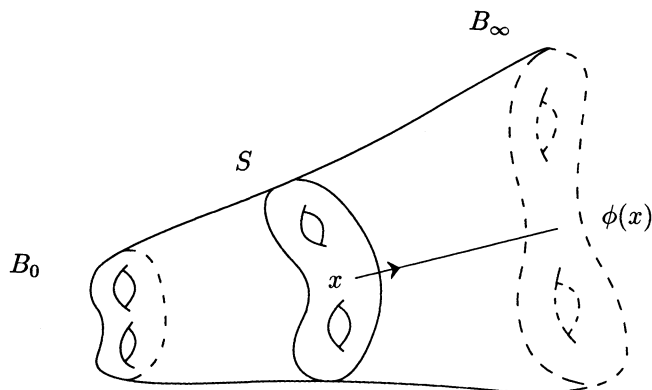


Figure 2.

Dès lors par convexité, chaque géodésique partant de S vers l'extérieur tend vers le bord à l'infini. On peut donc définir une *application de Gauss* ϕ de S dans B_∞ en associant à tout point de S la géodésique normale extérieure en ce point (Figure 2).

Enfin et c'est une remarque que nous utiliserons souvent, il est facile de montrer que si J est la structure complexe induite sur S de celle de B_∞ par l'application de Gauss, elle s'obtient de la manière suivante : si J_0 est la structure complexe naturelle de S et A l'opérateur deuxième forme

fondamentale nous avons

$$J = (1 + A)^{-1} J_0 (1 + A).$$

2. Preuve du Théorème 1

Ce théorème se démontre par la méthode de continuité. Nous avons défini une application F de l'espace C des surfaces convexes incompressibles à courbure strictement négative dans l'espace K des fonctions de B_∞ dans $] -1, 0[$. Il nous suffit de démontrer que

- (i) F est un homéomorphisme local;
- (ii) F est propre;
- (iii) C est connexe et non vide.

En effet F sera alors un revêtement ((i), (ii)) de C sur K . Le résultat découlera alors du fait que C est connexe et K simplement connexe.

2.1. F est un homéomorphisme local. — Occupons-nous tout d'abord du linéarisé DF de F . L'espace tangent à C en S s'identifie aux fonctions sur S , en associant à une telle fonction f la section fN du fibré normal, où N est la normale extérieure unitaire de S . Pour démontrer (i), il nous suffit de démontrer le lemme suivant et d'appliquer un théorème d'inversion locale, comme le théorème de Nash-Moser (cf. [H]).

LEMME 2.2. — DF est un opérateur linéaire elliptique du second ordre inversible.

Preuve. — Soit S une surface convexe et fN une section du fibré normal. Soit maintenant (ψ_t) une famille d'immersions de S dans M , telle que ψ_0 soit l'identité et,

$$\frac{d}{dt} \psi_t(x) \Big|_{t=0} = f(x)N.$$

On notera ψ_t , l'application de Gauss de la surface $\psi_t(S)$. Nous voulons tout d'abord calculer

$$(1) \quad DF(f) = \frac{d}{dt} (k_t \circ h_t) \Big|_{t=0},$$

ici k_t est la fonction courbure de la métrique g_t induite sur S par ψ_t , et h_t désigne l'application $(\phi_t \circ \phi_t)^{-1}$. Remarquons tout d'abord que la variation infinitésimale de métrique induite par ϕ_t est donnée par

$$\frac{d}{dt} g_t(u, v) \Big|_{t=0} = 2g_0(Au, v),$$

où A est l'opérateur deuxième forme fondamentale associé à la normale extérieure. D'après nos hypothèses sur la courbure de S , cet opérateur est symétrique et positif. Un bref calcul nous donne alors que la variation de courbure infinitésimale est

$$(2) \quad \frac{d}{dt} k_t \Big|_{t=0} = f(-k_0 \cdot \text{tr}(A)) - \text{tr}(D^2 f \circ A^{-1})(1 + k_0),$$

ici $D^2(f)$ désigne l'opérateur qui à un vecteur tangent u à S associe la dérivée covariante du gradient de f le long de u . Par ailleurs, la variation de vecteur normal associée à f est

$$\frac{d}{dt} n_t \Big|_{t=0} = -\text{grad}(f).$$

Nous en déduisons donc que

$$(3) \quad \frac{d}{dt} (h_t(y)) \Big|_{t=0} = B(\text{grad}(f)),$$

où B est un endomorphisme de l'espace tangent à S . On obtient donc en réunissant (1), (2) et (3), l'équation suivante :

$$(**) \quad DF(f) \circ \phi_0 = f(-k_0 \cdot \text{tr}(A)) - \text{tr}(D^2 f \circ A^{-1})(1 + k_0) + C(\text{grad}(f)),$$

où C est un endomorphisme de l'espace tangent à S .

L'opérateur A étant symétrique positif, on vérifie aisément que l'opérateur différentiel défini par l'équation (**) est elliptique du second ordre et d'indice nul puisque homotope au laplacien classique. Pour finir de démontrer le lemme, il nous suffit maintenant de montrer que son noyau est nul. Soit donc f telle que

$$(4) \quad f \cdot \text{tr}(A) \left(\frac{-k_0}{1 + k_0} \right) - \text{tr}(D^2 f \circ A^{-1}) + C(\text{grad}(f)) = 0.$$

Maintenant d'après nos conditions sur la courbure de S , la fonction $-k_0 \text{tr}(A)/(1 + k_0)$ est positive, par ailleurs l'opérateur A étant positif, une application simple du principe du maximum montre que f est nulle. \square

2.3. F est propre. — Pour démontrer la propriété de F , nous allons utiliser la théorie des courbes pseudo-holomorphes à la Gromov (voir [G], [P] ou [L1]) que nous présentons en appendice (5).

Les solutions d'un grand nombre de problèmes de type elliptique sur les surfaces s'interprètent comme des courbes pseudo-holomorphes dans un espace de jets. L'intérêt de cette notion provient de l'existence d'un théorème de compacité de ces courbes pseudo-holomorphes et d'un lemme de Schwarz généralisé dû à Gromov.

Nous allons commencer par montrer que de nombreux problèmes à courbure de Gauss prescrite sur les surfaces, en particulier le problème de Minkowski qui nous intéresse, mais aussi le problème de Monge-Ampère et celui des plongements radiaux (cf. [O], [D]), s'interprètent ainsi. On s'intéressera ici au problème suivant qui contient les cas cités :

PROBLÈME (A). — *Soient M une variété riemannienne orientée de dimension 3 et g une fonction définie sur $U(M)$, le fibré unitaire de M , et strictement supérieure à la fonction courbure sectionnelle k . Une solution de notre problème est une surface orientée, dont la courbure en tout point x vaille $g(n)$, n étant la normale orientée en ce point.*

On remarquera que de telles surfaces sont nécessairement localement convexes, grâce à nos hypothèses sur g . Notre lemme est le suivant :

LEMME 2.4. — *Il existe une structure presque complexe sur un sous-fibré W du fibré tangent à $U(M)$, telle que les courbes pseudo-holomorphes tangentes à W soient exactement les champs de vecteurs normaux unitaires $N(S)$, aux surfaces S solutions de (A). La structure conforme induite est alors celle donnée par la deuxième forme fondamentale. Enfin, il existe une métrique hermitienne sur W telle que l'aire d'une courbe pseudo-holomorphe est l'intégrale de la courbure moyenne de la surface sous-jacente.*

Preuve. — $U(M)$ est un fibré sur M muni d'une connexion qui se déduit de la connexion de Levi-Civita sur M . Grâce à cette connexion le fibré tangent à $U(M)$ en un point n se décompose en

$$T_n U(M) = P \otimes TM,$$

où P est le plan orthogonal à n . Remarquons que P étant orienté, il est muni naturellement d'une structure complexe J_0 . Le sous-fibré W est alors en tout point n de $U(M)$ donné à l'aide de cette décomposition par

$$W(n) = P \otimes P.$$

Il est facile de vérifier qu'une surface tangente à W dont la projection sur M est régulière, est un champ de vecteur normal $N(S)$ à une surface S de M .

Dans cette décomposition, l'espace tangent à une telle surface $N(S)$, est constitué des vecteurs de la forme $(u, A(u))$, où A est l'opérateur deuxième forme fondamentale. Soit maintenant c la fonction telle que

$$c^2 = g - k.$$

On munit alors W de la structure complexe J , telle que

$$J(u, v) = (c^{-1} J_0 v, c J_0 u).$$

On vérifie maintenant aisément que dire que $N(S)$ est une courbe pseudoholomorphe entraîne

$$\det(A) = c^2,$$

c'est-à-dire que S est solution de (A). Enfin, si g_0 est la métrique de M , si l'on munit W de la métrique donnée par

$$g((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = c g_0(u_1, u_2) + c^{-1} g_0(v_1, v_2),$$

la métrique induite sur S , solution de (A), est alors la métrique

$$g_1(u, v) = \det(A)^{-1/2} \operatorname{tr}(A) g_0(A(u), v).$$

Ceci finit de démontrer notre lemme. \square

Revenons maintenant à notre problème. Une première étape pour démontrer la propriété de F , est le :

LEMME 2.5. — *Soit S une surface convexe plongée de B dont la courbure k vérifie*

$$(1) \quad a \leq k \leq b, \quad a, b \in]-1, 0[.$$

Il existe alors des constantes c, d et h ne dépendant que de B, a et b , telles que pour tout point s de S on ait

$$(2) \quad 0 \leq c \leq d(s, B_0) \leq d.$$

En particulier, l'ensemble des surfaces convexes vérifiant (1) est compact pour la topologie C^1 . Enfin l'intégrale de la courbure moyenne de S est bornée par h .

Preuve. — Nous utiliserons dans ce lemme la terminologie et les résultats de la théorie des surfaces convexes à la Alexandrov (voir [Po])

pour une introduction). En particulier, l'équation (1) est comprise comme une inégalité au sens des mesures.

Soit donc S vérifiant (1). D'après Gauss-Bonnet, son aire est majorée uniformément. De plus, la projection convexe de S sur B_0 est contractante puisque nous sommes en courbure négative (voir [B-G-S]) ce qui entraîne que le rayon d'injectivité de S est minoré par celui de B_0 . Dès lors, le diamètre de S est majoré.

Raisonnons maintenant par l'absurde; soit (S_n) une suite de surfaces convexes vérifiant (1) et telle que $\sup(d(s, B_0), s \in S_n)$ tende vers l'infini. D'après ce que nous venons de remarquer, $r_n = d(S_n, B_0)$ tend également vers l'infini.

L'aire de S_n étant uniformément majorée, et la projection convexe étant contractante, nous en déduisons que l'aire des surfaces convexes B_n , à distance constante r_n de B_0 est uniformément majorée. Ceci nous fournit notre contradiction et prouve la partie droite de (2).

Raisonnons à nouveau par l'absurde et supposons l'existence d'une suite S_n de surfaces vérifiant (1) et telles que $d(S_n, B_0)$ tende vers 0. D'après ce qui précède et par compacité des surfaces convexes, nous en déduisons l'existence d'une surface convexe S_0 , d'intersection non vide avec B_0 et vérifiant (1), (en considérant cette inégalité comme une inégalité entre mesure). Or B_0 est une surface convexe à courbure -1 , dès lors par tout point de B_0 passe un petit segment géodésique de B . Ce petit segment est alors tracé sur S_0 , et un résultat classique d'Alexandrov (voir [Po]) nous fournit la contradiction recherchée. Nous venons de prouver (2). La compacité pour la topologie C^1 est alors un résultat classique de la théorie des surfaces convexes.

Il existe donc un réel r , et un entier n , telle que toute surface convexe plongée S vérifiant (1), puisse être recouverte par au plus n boules convexes de B de rayon r et centrée sur S . La proposition 5.4 (iii) de [L1] permet donc de démontrer la dernière partie de notre lemme, pour les surfaces C^∞ . Le reste suit aisément. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la propriété de F .

LEMME 2.6. — *Soit B un bout géométriquement fini et (k_n) , une suite de fonctions C^∞ sur B_∞ , convergeant C^∞ vers une fonction k , à valeur dans $]-1, 0[$. Soit également (S_n) une suite de surfaces convexes, solutions des problèmes de Minkowski pour (k_n) . Il existe alors une sous-suite de (S_n) convergeant C^∞ .*

Preuve. — D'après le lemme précédent, on peut extraire une sous-suite convergeant C^1 vers une surface S_0 . Ceci entraîne que la suite associée $(N(S_n))$ converge C^0 vers $N(S_0)$.

Soient a et b des nombres réels tels que

$$-1 < a < k < b < 0.$$

Choisissons maintenant ε suffisamment petit et plus précisément inférieur au c du lemme précédent de façon à ce que si S_ε est la surface à distance ε de B_0 , alors S_ε soit entre S_n et B_0 pour n grand.

Soit enfin B_ε la partie de B comprise entre S_ε et B_∞ . La projection convexe définit une projection de B_ε sur S_ε . On en déduit finalement une projection π de $U(B_\varepsilon)$, le fibré unitaire de B_ε sur S_ε .

Il est facile de vérifier que par convexité, π de $N(S_n)$ dans S_ε est injective.

Les LEMMES 2.4 et 2.5, ainsi que le théorème de compacité de Gromov (cf. [G], [P]) énoncés dans l'appendice 5, entraînent que l'on peut extraire de la suite de courbes pseudo-holomorphes $(N(S_n))$, une sous-suite convergeant au sens de la topologie des courbes nodales, c'est-à-dire, modulo l'apparition de bulles.

Les bulles apparaissant dans la convergence des $N(S_n)$ sont alors nécessairement des sphères incluses dans les fibres de la projection π .

Il est maintenant facile de montrer qu'il n'y a pas d'applications pseudoholomorphes non constantes de la sphère dans la fibre de cette projection. En effet, la fibre F de cette projection est le fibré unitaire restreint à une géodésique. Les seuls plans complexes inclus dans $TF \cap W$ sont tangents à la surface pseudoholomorphe qui est l'ensemble des vecteurs unitaires normaux au vecteur tangent à la géodésique. Le fait que cette surface soit conforme à un anneau entraîne notre résultat.

On en déduit qu'il n'y a pas d'apparition de bulles. En particulier, ceci entraîne que $(N(S_n))$ converge C^∞ vers $N(S_0)$. \square

2.7. C est connexe et non vide. — Nous avons tout d'abord besoin du :

LEMME 2.8. — *L'espace des bouts géométriquement finis est connexe.*

Preuve. — D'après [C-E-G], que nous avons cité en (1.1), l'espace des bouts géométriquement finis s'identifie à l'espace des laminations mesurées sur les surfaces hyperboliques. Cet espace est connexe : il suffit d'homotoper la mesure transverse à zéro. \square

Nous avons montré dans les sections précédentes que F était un homéomorphisme local et propre. Autrement dit, F est un homéomorphisme de chaque composante connexe de C dans K . De plus, le nombre $n(B)$ de composantes connexes de C est fini.

Pour finir, nous voulons montrer

LEMME 2.9. — $n(B)$ vaut toujours 1.

Preuve. — Remarquons que le lemme précédent entraîne aisément que n est toujours supérieur ou égal à 1. Supposons donc maintenant qu'il existe deux surfaces plongées à courbure constante k_0 S_1 et S_2 . Ces deux surfaces ont nécessairement une intersection non vide.

En effet, sinon on pourrait projeter convexement l'une sur l'autre, ce qui est impossible puisque cette projection convexe est contractante et que ces surfaces ont la même aire par Gauss-Bonnet. Maintenant à S_2 , par exemple, correspond une famille $C_\infty, (S_k)$, de surfaces à courbure constante : les solutions des problèmes de Minkowski à courbure constante k dans la composante connexe de S_2 . Quand k tend vers -1 , la surface S_k converge vers B_0 , à nouveau pour une question d'aire.

Dès lors pour un certain k_1 inférieur ou égal à k_0 , la surface S_{k_1} est tangente intérieurement à S_1 . Or ceci entraîne que k_1 est supérieur à k_0 , et la contradiction. \square

Preuve du Théorème 2

En reprenant les notations du THÉORÈME 1, une première étape de la démonstration de ce théorème est la suivante :

PROPOSITION 3.1. — Soit S une surface à courbure constante, et f une fonction telle que $DF(f)$ soit constante, alors f garde un signe constant.

Preuve. — Rappelons l'équation (**) de 2.2.

$$DF(f) \circ \phi_0 = f \cdot \text{tr}(A) \left(\frac{-k_0}{1+k_0} \right) - \text{tr}(D^2 f \circ A^{-1}) + C(\text{grad}(f)).$$

Supposons que $DF(f)$ soit constante et positive, nous allons montrer que f est elle même positive. Nous allons utiliser comme en 2.2, le principe du maximum.

Plaçons-nous au point où f est minimum, nous obtenons alors

$$DF(f) \circ \phi_0 + \text{tr}(D^2 f \circ A^{-1}) = f \cdot \text{tr}(A) \left(\frac{-k_0}{1+k_0} \right).$$

Le premier terme de cette égalité est positif et comme $\text{tr}(A)(-k_0/(1+k_0))$ est également positif, f est positive en ce point. \square

Remarquons que nous aurions pu utiliser la même idée de démonstration qu'en 2.9, mais ceci ne nous aurait fourni qu'un feuilletage seulement C^0 .

Nous avons donc démontré que la famille (S_k) feuillette un ouvert de B , pour conclure il nous faut démontrer que la famille (S_k) feuillette bien B entièrement. C'est ce que nous permet d'affirmer la proposition suivante

PROPOSITION 3.2. — *Soit (S_k) la suite de surfaces à courbure constante k donnée par le Théorème 1, alors*

$$\lim d(S_k, B_0) = \infty.$$

Preuve. — Chaque surface convexe S_k borde un convexe C_k . Considérons $C_0 = \bigcup C_k$. Le bord de C_0 est constitué de la réunion de surfaces convexes plongées localement isométriques au plan euclidien. Notre but est de démontrer que ce bord est vide.

Pour ce faire, remarquons tout d'abord que l'application de Gauss définie de ce bord dans le bord à l'infini de B est une immersion. En particulier nous aurons démontré notre résultat, si nous montrons que cette application de Gauss est K -quasi conforme : il n'existe pas d'immersion quasi-conforme d'une surface complète plate dans une surface de Riemann de genre g .

Soit S une surface convexe dans l'espace hyperbolique, dont la structure complexe est J_0 et l'opérateur deuxième forme fondamentale est A . La structure complexe J induite par l'application de Gauss, de celle du bord à l'infini est

$$J = (1 + A)^{-1} J_0 (1 + A).$$

En particulier notre proposition se réduit au lemme suivant

LEMME 3.3. — *Soit S une surface convexe plongée complète et plate, dans B , telle que $d(B_0, S)$ est strictement positif. Il existe alors une constante K telle que la courbure moyenne de S , H est uniformément majorée par K .*

Preuve. — D'après nos hypothèses et puisque nous sommes dans un bout, il existe un réel r positif, telle que toute boule de rayon r dans B , centrée en un point de S , soit isométrique à une boule de l'espace hyperbolique.

Par ailleurs, il existe r_0 inférieur à r , telle que toute boule b_0 de rayon r_0 de S soit isométrique à une boule du plan euclidien. Chaque boule b_0 est alors plongée dans le bord d'un convexe d'une boule de l'espace hyperbolique. D'après la proposition 5.4 (iii) de [L1], nous en déduisons qu'il existe une constante A telle que, pour toute boule b_0

$$\int_{b_0} H \, ds \leq A.$$

Maintenant en utilisant le théorème D de [L1], on en déduit que la courbure moyenne de S est uniformément majorée. \square

4. Preuve du Théorème 3

Soit $H(M)$ l'espace des structures hyperboliques géométriquement finies et sans cusps de M . Plus précisément, $H(M)$ est l'ensemble des classes d'équivalence des paires (M_0, ψ_0) , où M_0 est une variété hyperbolique complète géométriquement finie et sans cusp et

$$\psi_0 : M_0 \longrightarrow M$$

est une quasi-isométrie. La paire (M_0, ψ_0) est équivalente à (M_1, ψ_1) s'il existe une isométrie

$$F : M_0 \longrightarrow M_1$$

telle que $\psi_1 \circ F$ est homotope à ψ_0 par une homotopie propre qui s'étend en une homotopie de $(\bar{M}_0, M_{0,\infty} \times [0, 1] \rightarrow (\bar{M}, M_\infty)$. Ici \bar{M} désigne la compactification de M obtenu en ajoutant M_∞ .

Les résultats précédents nous permettent de définir une application f de $H(M) \times]-1, 0[$ dans $T(M_\infty)$, l'espace de Teichmüller du bord de M à l'infini.

On associe en effet à (h, k) la structure conforme induite (grâce à l'application de Gauss) sur M_∞ de celle de la surface à courbure constante k dans M muni de la métrique h .

Nous allons tout d'abord préciser le lien de cette application avec l'application canonique f_0 qui à une métrique h de $H(M)$ associe la structure conforme naturelle sur M_∞ . Rappelons que, d'après un célèbre théorème de Bers (voir [M], page 82), cette application f_0 est une bijection.

4.1. Lien avec la structure conforme à l'infini. — Nous voulons montrer que nous pouvons prolonger par continuité f à $] -1, 0]$, grâce à f_0 . Plus généralement, nous allons démontrer :

PROPOSITION 4.2. — *Soit (B^n) une famille de bouts géométriquement finis convergeant vers un bout géométriquement fini B et soit (k_n) une suite de réels tendant vers 0. Alors la suite de structures conformes des surfaces S_n à courbure constante k_n dans B^n converge vers la structure conforme de B_∞ .*

Preuve. — Soit A_n l'opérateur deuxième forme fondamentale de S_n , nous voulons démontrer que A_n converge uniformément vers l'identité.

En effet, rappelons que si S est une surface convexe dans un bout géométriquement fini, dont la structure complexe est J_0 et l'opérateur deuxième forme fondamentale est A , la structure complexe J induite par l'application de Gauss de celle du bord à l'infini est

$$J = (1 + A)^{-1} J_0 (1 + A).$$

Soit donc s_n une famille de points de S_n , nous savons que $d(s_n, B_0^n)$ converge vers l'infini (3.2). Nous en déduisons qu'il existe une suite (r_n) de réels tendant vers l'infini tels que

(i) les boules b'_n de B_n centrées sur s_n et de rayon r_n sont isométriques à des boules de l'espace hyperbolique. Soit G_n l'isométrie correspondante envoyant s_n sur un point fixé de l'espace hyperbolique.

(ii) Les boules b_n de S_n centrés sur s_n et de rayon r_n sont homéomorphes au disque et plongées dans b'_n dans le bord d'un convexe C_n .

Nous pouvons maintenant extraire une sous-suite de façon à ce que $G_n(C_n)$ converge vers un convexe C_0 . Nous allons montrer que ce convexe est une horoboule.

D'après notre construction, le bord S_0 de ce convexe est isométrique au plan euclidien. Or (cf. [S]) les seules surfaces plates plongées dans l'espace hyperbolique sont les horosphères et les surfaces équidistantes d'une géodésique.

Le bord de $G_n(C_n)$ converge donc vers une horosphère, de plus s'agissant de surfaces plongées, et en utilisant la même remarque que à la fin de la démonstration de 3.3, cette convergence est C^∞ . En particulier, l'opérateur deuxième forme fondamentale en x_n converge vers l'opérateur deuxième forme fondamentale d'une horosphère, c'est-à-dire l'identité. \square

4.3. Démonstration du Théorème 3. — Nous pouvons donc d'après le paragraphe précédent étendre par continuité f à $] -1, 0]$, grâce à f_0 . Appelons encore f l'application prolongée et g l'application qui à (h, k) associe $(f(h, k), k)$, le lemme crucial permettant de démontrer le théorème est alors le suivant :

LEMME 4.4. — *L'application g est propre.*

Preuve. — On se donne donc (k_n) une suite de réels convergeant vers un réel k_0 et (h_n) une suite de métriques hyperboliques géométriquement finies et sans cusp telles que la suite de structures conforme (J_n) des surfaces S_{k_n} , définies grâce au THÉORÈME 1 converge. Notons alors A_n l'opérateur deuxième forme fondamentale sur S_{k_n} .

Nous voulons donc démontrer que la suite (h_n) possède une sous-suite convergente, c'est-à-dire que la suite de structures conformes sur le bord à l'infini,

$$J_n^0 = f_0(h_n)$$

possède elle aussi une sous-suite convergente.

Il nous suffit pour cela de montrer que le rapport de conformalité entre J_n et J_n^0 est uniformément majoré. D'après la formule

$$J_n^0 = (1 + A_n)^{-1} J_n (1 + A_n),$$

il nous suffit de majorer la trace de A_n , c'est-à-dire la courbure moyenne. Pour démontrer notre résultat, il nous suffit donc de démontrer que la courbure moyenne des S_{k_n} est uniformément majorée.

Soit donc (x_n) une suite de points de S_{k_n} . La suite des structures conformes des S_{k_n} convergeant, il existe r telle que la boule B_n de S_{k_n} , centrée sur x_n et de rayon r , soit topologiquement un disque.

En relevant ces disques au revêtement universel, nous obtenons une famille d'immersions isométriques de B_n dans l'espace hyperbolique, dont les images sont incluses dans le bord d'un convexe. La famille des métriques sur B_n convergeant, nous pouvons utiliser la même remarque que à la fin de la démonstration de 3.3 et conclure que la courbure moyenne est uniformément majorée sur tout compact de B_n . \square

Notons f_k l'application de $T(M_\infty)$ dans lui-même qui à un point t associe $f(f_0^{-1}(t), k)$. Le lemme suivant entraîne alors notre théorème

LEMME 4.5. — *L'application f_k de $T(M_\infty)$ dans lui-même, est propre et de degré 1. En particulier, elle est surjective.*

Preuve. — Compactifions $T(M_\infty)$ qui topologiquement est une boule ne rajoutant un point à l'infini pour obtenir une sphère S . La propriété de g nous permet d'une part d'étendre f_k en une application de S dans elle-même, et d'autre part de réaliser une homotopie entre f_k et f_0 qui par construction est l'identité. \square

5. Appendice : courbes pseudo-holomorphes

Cet appendice ne prétend être qu'une introduction aux résultats de Gromov. Pour les démonstrations et la discussion des principales idées, nous renvoyons à [G], [P].

Rappelons qu'une structure presque complexe sur une variété M , est la donnée d'un champ d'endomorphismes du fibré tangent, J , de carré -1 . Une courbe pseudo-holomorphe dans une telle variété, est alors une surface réelle dont l'espace tangent est stable par J .

Le théorème de Gromov est alors un théorème de compacité pour les courbes pseudo-holomorphes d'aire bornée et qui convergent modulo l'apparition de "bulles". Pour donner une formulation plus précise à ce résultat, nous avons besoin de la

5.1. Définition. — Une J -courbe nodale dans (M, J) est la donnée d'une réunion disjointe de surfaces de Riemann Σ_i , d'une identification d'un nombre fini de points (appelés *noeuds*) et d'une application pseudo-holomorphe $f : \bigcup_i \Sigma_i \rightarrow (M, J)$ qui respecte les noeuds.

Il nous faut également munir l'ensemble des courbes nodales d'une topologie.

5.2. Définition. — Soit $f : \bigcup_i \Sigma_i \rightarrow M$ une J -courbe nodale. Un élément d'une base d'ouverts de la topologie C^∞ sur les courbes nodales est déterminé par le choix

- (a) d'un voisinage U des nœuds;
- (b) d'un réel ε positif;
- (c) d'un voisinage W de f pour la topologie C^∞ sur les applications de $\bigcup_i \Sigma_i \setminus U$ dans M ;
- (d) d'un voisinage V de J_Σ pour la topologie C^∞ sur structures presque complexes de $\bigcup_i \Sigma_i \setminus U$.

C'est l'ensemble des courbes nodales $g : \bigcup_j S_j \rightarrow M$ telles qu'il existe une application continue

$$\sigma : \bigcup_j S_j \longrightarrow \bigcup_i \Sigma_i$$

qui est un difféomorphisme sauf au-dessus des nœuds, pour lesquels, si x est un nœud, $\sigma^{-1}(x)$ est une courbe fermée simple ou un nœud. Cette application doit de plus vérifier :

- (i) $|\text{aire}(f) - \text{aire}(g)| < \varepsilon$;
- (ii) $g \circ \sigma^{-1}$ appartient à W ;
- (iii) $\sigma_*^{-1} J_S$ appartient à V ;
- (iv) enfin, $g(\bigcup_j S_j)$ est ε proche de $f(\bigcup_i \Sigma_i)$ pour la distance de Hausdorff.

Autrement dit au voisinage de deux sphères attachées en un point on peut trouver une sphère étranglée. Soulignons que, d'une part, la convergence pour cette topologie implique la convergence de Hausdorff des images, d'autre part, au voisinage d'une vraie courbe pseudo-holomorphe, on ne trouve que des vraies courbes pseudo-holomorphes, et la convergence est alors la convergence C^∞ des paramétrisations.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de compacité de Gromov :

THÉORÈME 5.3 (Gromov). — Soit M une variété riemannienne munie d'une suite de structures presque complexes J_n convergeant C^∞ vers J_0 . De toute suite de courbes J_n -pseudo-holomorphes $f_n : S \rightarrow M$, on peut extraire une sous-suite convergeant dans C^∞ vers une J_0 -courbe nodale $f : \bigcup_\ell \Sigma_\ell \rightarrow M$.

Topologiquement $S = \bigcup_{\ell} \Sigma_{\ell}$ *modulo un nombre fini de courbes simples écrasées sur un point. En particulier le genre ne peut que décroître :*

$$\sum_{\ell} g(\Sigma_{\ell}) \leq g(S).$$

Le théorème reste vrai si l'on demande simplement que les structures presque complexes soient définies sur un sous-fibré tangent à M et que les courbes pseudo-holomorphes soient tangentes à ce sous-fibré.

Enfin, une topologie C^k est définie également pour les courbes nodales et un théorème de compacité s'énonce aussi pour cette topologie.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] BERGER (M.S.). — *Riemaniannian Structure of prescribed Gaussian Curvature for compact 2-Manifolds*, J. Differential Geometry, t. **5**, 1971, p. 325–332.
- [C-E-G] CANARY (R.D.), EPSTEIN (D.B.A.) and GREEN (P.). — *Notes on notes of Thurston*, in *Analytical and geometric aspects of hyperbolic spaces*, London Mathematical Society Lecture Notes **111**, (D.B.A. Epstein Ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 1987, p. 3–92.
- [D] DELANOË (P.). — *Plongements radiaux à courbure de Gauss positive prescrite*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), t. **18**, 1985, p. 635–649.
- [G] GROMOV (M.). — *Pseudo-holomorphic curves in almost complex manifolds*, Invent. Math., t. **82**, 1985, p. 307–347.
- [B-G-S] BALLMAN (W.), GROMOV (M.) and SCHROEDER (V.). — *Manifolds of non-positive-curvature*. — Birkhauser studies, 1985.
- [H] HAMILTON (R.S.). — *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), t. **7**, 1, 1982, p. 65–222.
- [L1] LABOURIE (F.). — *Immersions isométriques elliptiques et courbes pseudo-holomorphes*, J. Diff. Geom., t. **30**, 1989, p. 395–424.
- [L2] LABOURIE (F.). — *Surfaces convexes dans l'espace hyperbolique et \mathbb{CP}^1 -structures*, à paraître dans J. London Math. Soc..
- [M] MORGAN (J.W.). — *Uniformization theorem for 3-dimensional manifolds*, chapter 5 in *Proceedings on the Smith Conjecture Symposium*, Ed. J.W. Morgan and H. Bass, Academic Press, 1984.

- [N] NIRENBERG (L.). — *The Weyl and Minkowski problem in differential geometry in the large*, Comm. Pure Appl. Math., t. **6**, **3**, 1953, p. 337–394.
- [O] OLIKER (V.I.). — *Hypersurfaces in \mathbb{R}^{n+1} with prescribed Gaussian curvature and related equations of Monge-Ampère type*, Comm. Partial Differential Equations, t. **9**, **8**, 1984, p. 807–838.
- [P] PANSU (P.). — *Notes sur la démonstration du théorème de compacité des courbes cusps de Gromov*, preprint à paraître.
- [Po] POGORELOV (A.V.). — *Extrinsic geometry of convex surfaces*. — Israel program for scientific translation, Jerusalem, 1973.
- [S] SPIVAK (M.). — *A comprehensive introduction to differential geometry*. — Publish or Perish, Boston, 1975.
- [T] THURSTON (T.). — *Geometry and topology of 3-manifolds*, chapter 8, Mimeographic notes.