BULLETIN DE LA S. M. F.

YVES LASZLO

La dimension de l'espace des sections du diviseur thêta généralisé

Bulletin de la S. M. F., tome 119, n° 3 (1991), p. 293-306

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_3_293_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 293–306.

LA DIMENSION DE L'ESPACE DES SECTIONS DU DIVISEUR THÊTA GÉNÉRALISÉ

PAR

YVES LASZLO (*)

RÉSUMÉ. — Soit $\mathcal{M}$ l'espace des modules de fibrés stables de rang 2 et de déterminant fixé de degré impair sur une courbe C de genre ≥ 2. Le groupe de Picard de $\mathcal{M}$ est $\mathbb{Z}$. Soit $\mathcal{O}(\Theta)$ son générateur ample. On prouve ici que la dimension de $H^0(\mathcal{M}, \mathcal{O}(\Theta))$ est la dimension attendue : le nombre de thêta-caractéristiques impaires sur C. Utilisant des résultats de Beauville, ceci donne une base explicite de cet espace.

ABSTRACT. — Let $\mathcal{M}$ be the moduli space of rank 2 stable vector bundles of fixed determinant of odd degree on a curve C of genus ≥ 2. The Picard group of $\mathcal{M}$ is $\mathbb{Z}$. Let $\mathcal{O}(\Theta)$ be its ample generator. We prove that the dimension of $H^0(\mathcal{M}, \mathcal{O}(\Theta))$ is the expected dimension : the number of odd theta-characteristics on C. Using some of Beauville's results, this give an explicit basis of this space.

0. Introduction

Divers auteurs étudient activement les espaces de modules de fibrés stables sur les courbes. Soit C une courbe algébrique lisse projective sur un corps K algébriquement clos de caractéristique nulle, de genre $g \geq 2$. On sait d'après [D–N] que le groupe de Picard des espaces de modules de fibrés stables $SU(r, D)$ de rang r et de déterminant fixé D sur C est égal à $\mathbb{Z}$. Notons Θ le générateur ample de ce groupe de Picard. Il est clair que la connaissance de l'espace des sections de Θ est intéressante pour l'étude de $\mathrm{SU}(r, D)$.

Si D est le fibré trivial, il est prouvé dans [B–N–R] que la dimension de cet espace de sections est r^g, le nombre g désignant le genre de la courbe.

Dans la suite $\mathcal{M}$ désigne l'espace des modules $SU(2, D)$.

En genre g, rang 2 et déterminant D de degré impair, on s'attend

(*) Texte reçu le 17 octobre 1990, révisé le 21 mars 1991.
Y. LASZLO, URA D.0752 du CNRS, Université Paris-Sud, Bât. 425 Mathématiques, 91405 Orsay Cedex, France.

(cf. [Bel]) à ce que la dimension de l'espace des sections de Θ soit :

$$\dim H^0(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\Theta)) = 2^{g-1} \cdot (2^g - 1).$$

On montre (cf. THÉORÈME 5.7) cette formule dans ce cas. Cette formule jointe à des résultats de BEAUVILLE (cf. [Bel]) donne une base explicite de $H^0(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\Theta))$.

La méthode est très simple : si C est une courbe hyperelliptique, on a une description très maniable de l'espace des modules en question (cf. [D–R]) comme schéma des zéros d'une section régulière d'un faisceau homogène sur une grassmannienne. On fait le calcul dans ce cas, et on conclut en remarquant que la dimension de $H^0(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\Theta))$ est indépendante de la courbe de genre g.

En déterminant trivial et rang 2, on attend la formule :

$$\dim H^0(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(2\Theta)) = 2^{g-1} \cdot (2^g + 1).$$

Malheureusement, la méthode précédente ne semble pas convenir : si on utilise la description de $SU(2, \mathcal{O})$ de [D–R] dans le cas hyperelliptique, on obtient une formule analogue à (3.1) au sens qu'elle ne fait intervenir que des caractéristiques d'Euler-Poincaré de fibrés homogènes sur une grassmannienne. Toutefois la lourdeur des calculs nécessaires a découragé l'auteur.

Je tiens à remercier M. BRION qui m'a appris la théorie de la décomposition des Gl_n-modules et qui m'a donné la référence miracle [MD].

Je remercie également A. BEAUVILLE d'avoir attiré mon attention sur ce sujet.

1. Rappels sur les représentations des groupes réductifs

Soit G un groupe réductif connexe sur un corps K algébriquement clos de caractéristique 0.

Choisissons un sous-groupe de Borel B de G contenant un tore maximal T de G. On dira que les racines de B sont positives.

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}_n$ une représentation *irréductible* de G. Il existe une unique droite de K^n stable par $\rho(B)$; la restriction de ρ à B agit sur cette droite par multiplication par un caractère $\chi : B \to G_m$. Si on note encore χ la restriction de ce caractère à T, on dit que χ est le *poids dominant* de ρ. On sait alors que pour toute racine positive α, on a l'inégalité :

$$(1) \qquad \langle \alpha^*, \chi \rangle \geq 0,$$

α^* désignant la racine duale.

DÉFINITION. — *Un caractère ϕ de T vérifiant pour toute racine positive α de G l'inégalité :*

$$\langle \alpha^*, \phi \rangle \geq 0,$$

est dit positif.

REMARQUE. — Tout caractère de T se prolongeant canoniquement en un caractère de B en assignant la valeur 1 à la partie unipotente de B, on parlera aussi bien de poids dominant pour le prolongement de χ à B.

Si G est semi-simple, on sait alors (cf. [H]) que χ détermine ρ ; de plus, tout caractère positif de T

$$\phi : T \longrightarrow G_m$$

détermine une unique représentation linéaire de dimension finie de poids dominant ϕ.

La proposition suivante est bien connue : si G est semi-simple, on la trouve dans [H] ; le cas où G est réductif en résulte immédiatement.

PROPOSITION 1.1. — *Soient G un groupe réductif connexe, soit*

$$\rho : G \to \mathrm{GL}_n$$

une représentation irréductible de G de poids dominant χ. Alors, on a :

(i) *la représentation ρ est déterminée à équivalence près par χ.*

(ii) *pour tout caractère positif χ de T, il existe une unique classe d'équivalence de représentations linéaires de G de poids dominant χ.*

Notons R l'ensemble des racines de G et $X(T)$ le groupe des caractères de T, groupe qui sera noté additivement. Soit Γ le groupe des poids de G :

$$\Gamma = \{\phi \in X(T) \otimes \mathbb{Q} \mid \forall \alpha \in R,\ \langle \alpha^*, \phi \rangle \in \mathbb{Z}\}\cdot$$

Soit ρ^0 dans Γ un élément vérifiant pour toute racine positive simple α de G l'égalité :

$$\langle \alpha^*, \rho^0 \rangle = 1. \tag{1.2}$$

Par exemple, si G est semi-simple, ρ^0 est uniquement déterminé et est égal à la demi-somme des racines positives.

Comme dans le cas semi-simple, on a évidemment la formule de Weyl : si χ est le poids fondamental de la représentation irréductible de dimension finie π de G et si R_+ désigne l'ensemble des racines positives de G, on a la formule

$$\deg(\pi) \cdot \prod_{\alpha \in R_+} \langle \alpha^*, \rho^0 \rangle = \prod_{\alpha \in R_+} \langle \alpha^*, \rho^0 + \chi \rangle \cdot \tag{3}$$

2. Cohomologie des fibrés homogènes

Le but de cette partie est de rappeler comment on calcule la cohomologie des faisceaux homogènes sur un espace homogène G/P, quotient d'un groupe réductif connexe G par un sous-groupe parabolique connexe P.

On conserve les notations du § 1 excepté le fait que les racines de B sont les racines *négatives* de G.

Soit ρ une représentation de P dans Gl_n ; on note E_ρ le fibré vectoriel sur G/P quotient du fibré trivial $G \times K^n$ par l'action suivante de P :

$$p \cdot (g, x) = \big(g \cdot p^{-1}, \rho(p) \cdot x\big).$$

Par abus, on note encore E_ρ le faisceau des sections de E_ρ.

Si P est un sous groupe B de Borel et ρ un *caractère* χ de T, on a la version algébrique suivante du théorème de Bott (cf. [D]) :

THÉORÈME 2.1. — *Soit χ un caractère de T. Alors, on a :*

(i) *Si χ est positif, alors : $H^i(G/B, E_\chi) = 0$ pour tout $i > 0$.*

(ii) *S'il existe une racine α de G telle que : $\langle \alpha^*, \rho + \chi\rangle = 0$, alors $H^i(G/B, E_\chi) = 0$ pour tout i.*

(iii) *Sinon, si w est l'unique élément du groupe de Weyl de G tel qu'on ait l'égalité : $\chi = w(\mu + \rho) - \rho$ pour un caractère positif μ, on a, en notant $\ell(w)$ la longueur de w*

- *$H^i(G/B, E_\chi) = 0$ pour tout $i \neq \ell(w)$ et*
- *$H^i(G/B, E_\chi)$ est le G-module irréductible de poids dominant μ pour $i = \ell(w)$.*

Si P est un sous-groupe parabolique connexe de G contenant B, désignons par P_r son plus grand quotient réductif, quotient de P par son radical unipotent. Notons que le tore maximal T de G se plonge dans P_r et que l'image B^r de B dans P_r est un sous-groupe de Borel de P_r dont les racines seront les racines négatives de P_r.

On a alors la proposition suivante qui permet de calculer les espaces de cohomologie des faisceaux homogènes qui nous intéresseront par la suite :

PROPOSITION 2.2. — *Si ρ est une représentation linéaire de P qui se factorise à travers P_r en une représentation irréductible ρ_r et si χ est le poids dominant de ρ_r, on a l'égalité :*

$$H^i(G/B, E_\chi) = H^i(G/P, E_\rho) \quad \textit{pour tout } i.$$

Preuve : On considère la suite spectrale de Leray de la projection canonique $p : G/B \to G/P$. Les fibres géométriques étant isomorphes à P_{r/B^r}, il suffit de remarquer pour conclure que, d'après le théorème de Bott et le théorème de changement de base, les images directes supérieures $R^i p * E_\chi$ sont nulles pour $i > 0$ et que $p * E_\chi = E_\rho$: pour la dernière égalité, observer que le théorème de Bott donne l'égalité fibre à fibre mais également l'action de P sur une fibre. $\square$

3. Description de $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\Theta)$ dans le cas hyperelliptique

Soit $C \to \mathbb{P}^1$ une courbe hyperellptique de genre $g \geq 2$; on peut supposer que les images $(\omega_i)_{1\leq i\leq 2g+2}$ dans $\mathbb{P}^1$ des points de Weierstrass de C sont distinctes du point à l'infini de $\mathbb{P}^1$.

Soient Q_0 (resp. Q_1) les quadriques de $\mathbb{P}^{2g+2}$ d'équation homogène

$$q_0 = \sum_{1\leq i\leq 2g+2} X_i^2 \quad \Big(\text{resp. } q_1 = \sum_{1\leq i\leq 2g+2} \omega_i \cdot X_i^2\Big).$$

On sait alors d'après [D–R] que l'espace des modules des fibrés stables de degré impair sur C s'identifie au schéma de Hilbert des $(g-2)$-plans de $\mathbb{P}^{2g+1}$ contenus dans l'intersection $Q_0 \cap Q_1$; si on désigne par U le sous-fibré universel sur la grassmannienne isotrope Gr paramétrant les $(g-2)$-plans contenus dans Q_0, le polynôme q_1 définit une section s_1 de $S^2U^\vee$ et $\mathcal{M}$ s'identifie donc au schéma des zéros de la section s_1 de $S^2U^\vee$. La section s_1 étant régulière, le complexe de Koszul :

$$K^* = \big(\Lambda^* S^2 U\big)$$

est une résolution localement libre de $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$.

Si $\mathcal{O}(1)$ désigne le fibré déterminant de $U^\vee$, c'est-à-dire le fibré inversible des sections hyperplanes de Gr dans le plongement de Plücker, on sait (cf. [D–R] , 5.10 II, page 177) que la restriction $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(1)$ de $\mathcal{O}(1)$ à $\mathcal{M}$ est le générateur ample $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\Theta)$ de $\mathrm{Pic}^0(\mathcal{M})$.

Le complexe de Koszul tensorisé $K^* \otimes \mathcal{O}(1)$ est donc une résolution de $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\Theta)$.

On déduit l'égalité entre caractéristiques d'Euler-Poincaré :

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^i \chi\big(\mathrm{Gr}, \Lambda^i(S^2U)\otimes \mathcal{O}(1)\big) = \chi\big(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(1)\big).$$

Le théorème d'annulation de Kodaira donne l'égalité :

$$H^i\big(\mathcal{M}, K_{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(n)\big) = 0 \quad \text{pour tout } i > 0 \text{ et tout } n > 0.$$

D'après [D–N], le faisceau dualisant $K_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ est égal à $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(-2)$. On en déduit la :

PROPOSITION 3.1. — *On a l'égalité suivante :*

$$H^0(\mathcal{M},\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\Theta)) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i\chi(\mathrm{Gr},\Lambda^i(S^2U)\otimes\mathcal{O}(1)).$$

REMARQUE 3.2. — Si C est une courbe quelconque sur K qui est lisse et complète, le théorème d'annulation de Kodaira et l'égalité $K_{\mathcal{M}} = \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(-2)$ donnent encore l'égalité :

$$H^i(\mathcal{M},\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(n\Theta)) = 0 \quad \text{pour tout } i > 0 \text{ et tout } n \geq 0.$$

D'après le théorème de Witt, le groupe spécial orthogonal $G = \mathrm{SO}(2g+2)$ de Q_0 agit transitivement sur Gr : le schéma Gr s'identifie donc au quotient de $\mathrm{SO}(2g+2)$ par le stabilisateur P d'un point fermé Π de Gr. Après un changement de coordonnées convenable, q_0 s'écrit :

$$q_0 = \sum_{1\leq i\leq g+1} X_i \cdot X_{2g+3-i}\,.$$

Soit Π le $(g-2)$-plan de $\mathbb{P}^{2g+1}$ d'équation $X_g = \cdots = X_{2g+2} = 0$. Une matrice M dans le stabilisateur de Π dans G a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A_{g-1} & B_{g-1,4} & C_{g-1} \\ 0 & A'_4 & F_4 \\ 0 & 0 & J\cdot {}^tA_{g-1}^{-1}\cdot J \end{pmatrix},$$

où $J = (\delta_{i,g-j})_{1\leq i,j\leq g-1}$, les matrices A_{g-1} (resp. A'_4) décrivant Gl_{g-1} (resp. Sl_4) et les autres matrices étant assujetties à certaines relations qui ne nous intéressent pas ici.

Le morphisme qui à une matrice M de P écrite sous la forme précédente associe (A_{g-1}, D_4) identifie le plus grand quotient réductif P_r de P au produit $\mathrm{Gl}_{g-1}\times\mathrm{Sl}_4$.

Le fibré universel U est le fibré homogène associé à la représentation $\rho = p\circ\pi$, le morphisme p étant la projection canonique $P\to P_r$ et $\pi : P_r = \mathrm{Gl}_{g-1}\times\mathrm{Sl}_4\to\mathrm{Gl}_{g-1}$ étant la première projection .

Avec les notations de [B], l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2g+2)$ est de type D_{g+1}. Pour pouvoir appliquer les résultats du II, on choisit le sous-groupe de Borel B de $\mathrm{SO}(2g+2)$ constitué des matrices de $\mathrm{SO}(2g+2)$ qui sont triangulaires supérieures comme ayant ses racines négatives.

Pour pouvoir utiliser la formule de la PROPOSITION 3.1, on va décomposer les représentations $\Lambda^*\rho$ en sommes de représentations irréductibles et utiliser le § 2 ; il revient bien sûr au même de décomposer en sommes de représentations irréductibles les représentations $\Lambda^*\sigma$, où σ est la représentation identique de Gl_{g-1}.

4. Décomposition de $\Lambda^*\sigma$

Les notations sont celles de [MD].

DÉFINITION. — *Une* partition λ *est une suite presque nulle et décroissante d'entiers* $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq \cdots \geq 0$. *Le* poids *de* λ *est* $|\lambda| = \sum \lambda_i$. *La partition conjuguée de* λ *est* λ' *définie par* $\lambda'_j = \mathrm{card}\{j/\lambda_j \geq i\}$.

Pour les calculs, il est utile de visualiser une partition par un diagramme où la longueur de la i-ème ligne représente λ_i. La partition λ' s'obtient alors par symétrie par rapport à la diagonale principale. (On identifie deux partitions qui ont les mêmes termes non nuls.)

EXEMPLE. — Le diagramme de la partition $(5,4,4,1)$ est :

$$\begin{array}{lllll} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \\ \circ & & & & \end{array}$$

et la partition conjuguée est $(4,3,3,3,1)$.

Pour ce qui suit, on utilisera la notation de Frobenius : posons $\alpha_i = \lambda_i - i$ et $\beta_i = \lambda'_i - i$; il existe un unique entier r, à savoir la longueur de la diagonale, tel que :

$$\alpha_1 > \cdots > \alpha_r \geq 0 \quad \text{et} \quad \beta_1 > \cdots > \beta_r \geq 0.$$

On note alors la partition λ comme suit :

$$\big(\alpha_1, \ldots, \alpha_r \mid \beta_1, \ldots, \beta_r\big).$$

EXEMPLE. — On a $(5,4,4,1) = (4,2,1|3,1,0)$.

Notons $\ell(\lambda)$ la longueur de λ, c'est-à-dire le nombre d'éléments non nuls de la suite. On a alors deux formules :

$$\ell(\lambda) = \alpha_1 \quad \text{et} \quad |\lambda| = \Sigma\alpha_i + \Sigma\beta_i + r.$$

Si on identifie une partition λ de longueur $\leq g-1$ avec la racine $\sum \lambda_i e_{g-i}$ de Gl_{g-1}, on a alors d'après la PROPOSITION 1.1 une bijection entre Gl_{g-1}-modules irréductibles et ces partitions.

Notons s_λ le caractère du module irréductible de poids dominant λ.

Si on note X_i la classe d'équivalence de la représentation de plus haut poids $-\lambda_i$, on sait que l'anneau des représentations de Gl_{g-1} s'identifie à $\mathbb{Z}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_{g-1}, X_{g-1}^{-1}]$.

Le caractère de $S^2\sigma$ est :

$$\sum_{1 \leq i \leq g-1} X_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq g-1} X_i X_j.$$

D'après [B, b) de l'exercice 11 page 231], le caractère de $\Lambda^p(S^2\sigma)$ est $(-1)^p \times$ le terme homogène de degré total p du produit :

$$\prod_{1 \leq i \leq g-1} (1 - X_i^2) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq g-1} (1 - X_i X_j).$$

D'après [MD, chapitre I, § 5, exercices 9 et 10], on a la formule :

$$\prod_{1 \leq i \leq g-1} (1 - X_i^2) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq g-1} (1 - X_i X_j) = \sum_{\lambda} (-1)^{|\lambda|}/2 \cdot s_\lambda,$$

la somme étant étendue à toutes les partitions λ qui s'écrivent en notation de Frobenius :

$$\lambda = \big(\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_r + 1 \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_r\big)$$

telles que $\alpha_1 \leq g - 2$. On a donc montré la :

PROPOSITION 4.1. — *La décomposition de $\Lambda^p(S^2\sigma)$ en représentations irréductibles :*

$$\Lambda^p(S^2\sigma) = \bigoplus \rho_\lambda,$$

où ρ_λ est la représentation de poids dominant λ et où on somme sur toutes les partitions λ qui s'écrivent en notation de Frobenius :

$$\lambda = \big(\alpha_1, \ldots, \alpha_r \mid \alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_r - 1\big) \quad \text{avec} \quad \alpha_1 \leq g - 1 \text{ et } \sum \alpha_i = p.$$

En effet, $2p = |\lambda| = \sum \alpha_i + \sum(\alpha_i - 1) + r = 2 \cdot \sum \alpha_i$.

On note encore E_λ le fibré vectoriel sur G/P défini par la représentation :

$$P \longrightarrow P_r = \mathrm{Gl}_{g-1} \times \mathrm{Sl}_4 \longrightarrow \mathrm{Gl}_{g-1} \xrightarrow{\rho_\lambda} \mathrm{Gl}_\lambda,$$

$\mathrm{Gl}_{g-1} \xrightarrow{\rho_\lambda} \mathrm{Gl}_\lambda$ désignant la représentation de poids dominant λ.

5. Calcul de la cohomologie des $E_\lambda \otimes \mathcal{O}(1)$

On utilise les résultats du § 2 pour ce calcul.

Une base de racines positives de $\mathrm{SO}(2g+2)$ est :

$$-e_{g+1} - e_g,\ e_{g+1} - e_g,\ e_g - e_{g-1}, \dots, e_2 - e_1$$

et on a $\rho = -\sum_0^{g-1}(i+1)e_{g-i}$.

On conserve les notations du § 3; en particulier ρ est la représentation de P définissant le sous-fibré universel de la grassmannienne isotrope Gr.

Le poids fondamental de ρ est e_{g-1} et celui de $\Lambda^{g-1}\rho^{-1}$, qui correspond au fibré $\mathcal{O}(1)$, est $-\sum_1^{g-1} e_{g-i}$.

Le poids dominant p de la représentation associée à $E_\lambda \otimes \mathcal{O}(1)$ est :

$$p = \sum_{1 \le i \le g-1} (\lambda_i - 1) \cdot e_{g-i}$$

et la demi-somme ρ^0 des racines positives de $\mathrm{SO}(2g+2)$ est :

$$\rho^0 = -\sum_{0 \le i \le g-1} (i+1) \cdot e_{g-i}.$$

On pose $\alpha_{r+1} = 0$. On a de plus :

$$\begin{aligned} &\text{si } 1 \le i \le r && \text{alors} \quad \lambda_i = \alpha_i + i, \\ &\text{si } \alpha_1 + 1 \le i && \text{alors} \quad \lambda_i = 0. \end{aligned}$$

On obtient les formules suivantes en considérant le diagramme de λ :

$$\text{si } i \in [\alpha_{j+1} + j + 1,\ \alpha_j + j - 1] = I(j) \quad \text{alors} \quad \lambda_i = j.$$

Le poids $p + \rho^0$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p + \rho^0 = -e_g &+ \sum_{1 \le i \le r} (\alpha_i - 2) \cdot e_{g-i} \\ &- \sum_{0 \le j \le r} \sum_{i \in I(j)} (i + 2 - j) \cdot e_{g-i} - \sum_{\alpha_1 + 1 \le i} (i+2) \cdot e_{g-i}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Comme les racines de $\mathrm{SO}(2g+2)$ sont les $\pm e_i \pm e_j$, le THÉORÈME 2.1 et la PROPOSITION 2.2 assurent si l'un des coefficients de $p + \rho^0$ est égal à ± 1 ou si deux de ses coefficients sont égaux en valeur absolue, toute la cohomologie de $E_\lambda \otimes \mathcal{O}(1)$ est nulle.

Supposons que cette cohomologie ne soit pas identiquement nulle.

On a alors en particulier :

$$\alpha_r - 2 \notin \{-1, 0, 1\}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha_r \geq 4.$$

Or, lorsque i décrit $I(j)$, le coefficient $(i + 2 - j)$ de $-e_{g-i}$ décrit $I'(j) = [3 + \alpha_{j+1}, 1 + \alpha_j]$; on a donc :

$$\Big\{\bigcup_i \{\alpha_i - 2\}\Big\} \cap \Big\{\bigcup_{1 \leq j \leq r} [3 + \alpha_{j+1}, 1 + \alpha_j]\Big\} = \emptyset.$$

On a deux inclusions :

$$\Big\{\bigcup_{1 \leq j \leq r} [3 + \alpha_{j+1}, 1 + \alpha_j]\Big\} \subset [3, 1 + \alpha_1]$$

et

$$\Big\{\bigcup_{i \leq r-1} \{\alpha_i - 2\}\Big\} \subset [3, 1 + \alpha_1].$$

Les r intervalles $I(j)$ sont disjoints et de cardinal $\alpha_j - \alpha_{j+1} - 1$; on en déduit que le complémentaire C de $\{\bigcup_{1 \leq j \leq r} [3 + \alpha_{j+1}, 1 + \alpha_j]\}$ dans $[3, 1 + \alpha_1]$ est de cardinal $(r - 1)$. On a donc les égalités :

$$\alpha_r = 4 \quad \text{et} \quad C = \{\alpha_{r-1} - 2, \ldots, \alpha_1 - 2\}\cdot$$

On a alors deux cas :

1) Soit on a l'inégalité $\alpha_i - \alpha_{i+1} \geq 2$ pour tout i. Dans ce cas, deux intervalles consécutifs $I'(j + 1)$ et $I'(j)$ sont séparés par l'unique entier $2 + \alpha_{j+1}$. Il s'en suit l'égalité suivante :

$$C = \{2 + \alpha_r, \ldots, 2 + \alpha_2\}\cdot$$

On a donc les formules :

$$\alpha_i = 4 \cdot (r + 1 - i) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq r + 1.$$

2) Soit il existe au moins un indice i tel que $\alpha_i - \alpha_{i+1} = 1$. Soit j le plus grand des tels indices. De même que dans le cas 1), on a les égalités suivantes :

$$\forall i \in [j + 1, r + 1], \quad \alpha_i - 2 = 2 + \alpha_{i+1}.$$

Par définition de j, les deux intervalles $I'(j+1)$ et $I'(j)$ sont consécutifs et l'entier $\alpha_j - 2$ est nécessairement "à droite" de la réunion $I'(j+1) \cup I'(j)$. On a donc l'inégalité suivante :

$$\alpha_j - 2 > 1 + \alpha_j = \operatorname{Sup}\{I'(j + 1) \cup I'(j)\},$$

ce qui est bien sûr impossible.

On déduit la :

PROPOSITION 5.2. — *Les seules partitions*

$$\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_r \mid \alpha_1 - 1, \dots, \alpha_r - 1)$$

telles que la cohomologie de $E_\lambda \otimes \mathcal{O}(1)$ *n'est pas nulle vérifient :*

$$\alpha_i = 4 \cdot (r + 1 - i) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq r + 1 \quad \text{et} \quad 4r \leq g - 1.$$

Le faisceau $E_\lambda \otimes \mathcal{O}(1)$ *est alors un sous-fibré de* $\Lambda^p(S^2U) \otimes \mathcal{O}(1)$, *l'entier* p *étant égal à :*

$$p = \sum \alpha_i = 2r(r+1).$$

Notons λ_r la partition associée à l'entier r dans la PROPOSITION 5.2, et soit E_r le fibré associé à cette représentation et $\chi_r(1)$ le caractère de la représentation que définit le fibré $E_r \otimes \mathcal{O}(1)$.

(5.3). — D'après [B], le groupe de Weyl de $\mathrm{SO}(2g+2)$ est le produit semi-direct de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g+1}$ par le groupe symétrique S_{g+1} ; le premier facteur est le sous-groupe de $\{-1, +1\}^{2g+2}$ d'équation $\prod_i x_i = 1$, les x_i étant les fonctions coordonnées ; il opère sur les racines par :

$$(x_i) \cdot \sum \lambda_i e_{g-i} = \sum x_i \cdot \lambda_i e_{g-i}.$$

Le second facteur, c'est-à-dire le groupe symétrique opère par :

$$\sigma \cdot \sum \lambda_i e_{g-i} = \sum \lambda_i e_{\sigma(g-i)},$$

où σ est une permutation de S_{g+1}.

D'après (5.1) on a la formule :

$$\begin{aligned}\chi_r(1) + \rho^0 = -\lambda_g &+ \sum_{1 \leq i \leq g-1} (4r+2) \cdot e_{g-i} \\ &- \sum_{0 \leq j \leq r} \sum_{i \in I(j)} (i + 2 - j) \cdot e_{g-i} \\ &- \sum_{i \leq \alpha_1 + 1} (i+2) \cdot e_{g-i},\end{aligned}$$

l'intervalle $I(j)$ étant égal à $I(j) = [4r - 3j + 1, 4r - 3j + 3]$.

Il existe donc un élément w_r du groupe de Weyl tel que :

$$w\big(\chi_r(1) + \rho^0\big) = -\sum_{0 \leq i \leq 4r} (i+1) \cdot e_{g-i} - \sum_{i \leq 4r+1} (i+2) \cdot e_{g-i},$$

de sorte qu'on a :

$$w\big(\chi_r(1)+\rho^0\big)-\rho^0=-\sum_{i\leq 4r+1} e_{g-i}=\omega_{g-4r-1}.$$

Le poids ω_{g-4r-1} est le $(g-4r-1)$-poids fondamental de $\mathrm{SO}(2g+2)$; d'après [B], c'est le poids dominant de la représentation associée au $\mathrm{SO}(2g+2,K)$-module $\Lambda^{g-4r-1}K^{2g+2}$, le groupe $\mathrm{SO}(2g+2)$ opérant naturellement sur $\Lambda^{g-4r-1}K^{2g+2}$. On a montré la :

PROPOSITION 5.4. — *Pour tout entier $r\geq 1$, les espaces de cohomologie $H^i(\mathrm{Gr},E_r)$ sont nuls pour tout $i\neq \ell(w_r)$ et on a l'égalité :*

$$\dim_K H^i(\mathrm{Gr},E_r)=\binom{2g+2}{g-4r-1}\quad \text{pour } i=\ell(w_r).$$

L'entier $\ell(w_r)$ se calcule comme suit : la longueur de w_r est égale au nombre de racines positives α telles qu'on ait l'inégalité $(\chi_r(1)+\rho^0,\alpha)<0$. On trouve sans difficulté :

$$\ell(w_r)=2r. \tag{5.5}$$

On a déjà utilisé que la représentation associée à $\mathcal{O}(1)$ est ω_{g-1} ; on a donc la formule :

$$\dim_K H^0\big(\mathrm{Gr},\mathcal{O}(1)\big)=\binom{2g+2}{g-1}.$$

(Les groupes $H^i(\mathrm{Gr},\mathcal{O}(1))$ sont évidemment nuls pour $i>0$.)

De la PROPOSITION 3.1, de (5.2), (5.4), (5.5) et (5.6), on déduit facilement la formule :

$$\dim_K H^0\big(\mathcal{M},\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\Theta)\big)=\sum_{r\geq 0}\binom{2g+2}{g-4r+1}.$$

D'après les PROPOSITIONS 6.1 et 6.3 de [M], la quantité :

$$\sum_{r\geq 0}\binom{2g+2}{g-4r-1}$$

est le nombre de thêta-caractéristiques impaires sur une courbe de genre g.

REMARQUE. — Comme le suggère le rapporteur, il est très facile de prouver directement l'égalité

$$\sum_{r\geq 0}\binom{2g+2}{g-4r-1} = 2^{g-1}\cdot(2^g-1).$$

On a donc prouvé la :

PROPOSITION 5.6. — *Soit $\mathcal{M}$ l'espace des modules des fibrés stables de rang 2 et de déterminant fixé impair sur une courbe hyperelliptique lisse et complète sur K de genre g; alors, on a l'égalité :*

$$\dim_K H^0\big(\mathcal{M},\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\Theta)\big) = 2^{g-1}\cdot(2^g-1).$$

On obtient alors le :

THÉORÈME 5.7. — *Soit $\mathcal{M}_C$ l'espace des modules des fibrés stables de rang 2 et de déterminant fixé impair sur une courbe C sur K quelconque, lisse et complète, de genre g; alors, on a l'égalité :*

$$\dim_K H^0\big(\mathcal{M}_C,\mathcal{O}_{\mathcal{M}_C}(\Theta)\big) = 2^{g-1}\cdot(2^g-1).$$

Esquisse de preuve : D'après la *Remarque* 3.2, les groupe

$$H^1\big(\mathcal{M}_C,\mathcal{O}_{\mathcal{M}_C}(\Theta)\big)$$

sont nuls pour toute courbe C. On déduit du théorème de changement de base (cf. [Ha]) que la famille des espaces vectoriels $H^0(\mathcal{M}_C,\mathcal{O}_{\mathcal{M}_C}(\Theta))$ s'organise en un *fibré vectoriel* $\mathcal{E}_g$ sur un revêtement connexe étale de l'espace des modules $\mathcal{M}_g$ des courbes de genre g. La dimension de $H^0(\mathcal{M}_C,\mathcal{O}_{\mathcal{M}_C}(\Theta))$ est donc indépendante de la courbe C de genre g.

Remarques :

1) Soit κ une theta-caractéristique *impaire* sur C, c'est-à-dire un faisceau inversible sur C tel que :

$$\kappa^{\otimes 2} = K_C \quad \text{et} \quad \dim H^0(C,\kappa)\equiv 1 \pmod 2.$$

On associe classiquement à κ la sous-variété *réduite* Θ_κ de $\mathcal{M}_C$ telle qu'on ait l'égalité ensembliste :

$$\Theta_\kappa = \big\{E\in\mathcal{M}_C \mid H^0\big(C,\kappa\otimes\mathrm{sl}(E)\big)\neq 0\big\}.$$

D'après [Be], les variétés Θ_κ sont des diviseurs linéairement équivalents à Θ. Soit s_κ une section non nulle $\mathcal{O}(\Theta)$ qui s'annule sur Θ_κ. Lorsque κ décrit l'ensemble T_1 des theta-caractéristiques impaires sur C, les sections s_κ de Θ sont *indépendantes.*

Comme T_1 est de cardinal $N = 2^{g-1}\cdot(2^g-1)$, on a la :

PROPOSITION 6.1. — *Les sections $(s_\kappa)_{\kappa\in T_1}$ forment une base du groupe $H^0(\mathcal{M}_C, \mathcal{O}_{\mathcal{M}_C}(\Theta))$.*

2) Si on cherche à obtenir une formule “agréable” pour la dimension de $H^0(\mathcal{M}_C, \mathcal{O}_{\mathcal{M}_C}(n\Theta))$, l'entier n étant > 1, les contributions non nulles du complexe de Koszul dans le calcul sont plus nombreuses. Même pour $n = 2$, la complexité des formules obtenues m'a dissuadé de poursuivre mes investigations dans cette voie.

BIBLIOGRAPHIE

[B] BOURBAKI (N.). — *Groupe et algèbre de Lie, Chapitre 7.* — Hermann, Paris, 1985.

[Be] BEAUVILLE (A.). — Fibrés de rang deux sur une courbe, fibré déterminant et fonctions thêta II, *Bull. Soc. Math. France*, t. **119**, 1991, p. 259–291.

[B–N–R] BEAUVILLE (A.), NARASIMHAN (M.S.), et RAMANAN (S.). — Spectral curves and the generalised theta divisor, *J. Reine Angew. Math*, t. **398**, 1989, p. 169–179.

[D–N] DREZET (J.M.) et NARSIMHAN (M.S.). — Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques, *Invent. Math.*, t. **97**, 1989, p. 53–94.

[D–R] DESALE (U.V.) et RAMANAN (S.). — Classification of vector bundles of rank 2 on hyperelliptic curves, *Invent. Math.*, t. **38**, 1976, p. 161–185.

[Ha] HARTSORNE (R.). — *Principles of algebraic geometry, Graduate Text in Math.* **51**. — Springer Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1977.

[H] HUMPHREYS (J.E.). — *Linear Algebraic groups, Graduate Text in Math. 21.* — Springer Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1971.

[MD] MACDONALD (I.G.). — *Symmetric functions and Hall polynomials.* — Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, 1979.

[M] MUMFORD (D.). — *Tata lectures on theta II, Prog. in Math. 43.* — Birkhäuser, Boston Basel Stuttgart, 1984.