BULLETIN DE LA S. M. F.

OLIVIER BIQUARD

Fibrés paraboliques stables et connexions singulières plates

Bulletin de la S. M. F., tome 119, nº 2 (1991), p. 231-257
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_2_231_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 231–257.

FIBRÉS PARABOLIQUES STABLES ET CONNEXIONS SINGULIÈRES PLATES

PAR

OLIVIER BIQUARD (*)

RÉSUMÉ. — Soit E un fibré holomorphe sur une surface de Riemann X, avec structure parabolique au-dessus des points $P_i \in X$; on construit des espaces de connexions sur E, singulières aux points P_i, qui sont "adaptées" à la structure parabolique ; on utilise la méthode de Donaldson pour donner une démonstration par la géométrie différentielle d'un théorème de Mehta et Seshadri sur les fibrés paraboliques stables.

ABSTRACT. — Let X be a Riemann surface, $E \to X$ a holomorphic vector bundle with parabolic structure over the points $P_i \in X$; we construct spaces of connections on E, singular at the points P_i, which "represent" the parabolic structure; we then use Donaldson's method to give a differential-geometric proof of a theorem of Mehta and Seshadri about stable parabolic vector bundles.

0. Introduction

En 1965, NARASIMHAN et SESHADRI [8] ont montré que tout fibré stable sur une surface de Riemann provient d'une représentation unitaire projective irréductible du groupe fondamental. DONALDSON, inspiré par [1], a montré dans [2] le résultat équivalent de géométrie différentielle, à savoir que tout fibré holomorphe hermitien stable sur une surface de Riemann admet une connexion unitaire à courbure centrale constante. La généralisation convenable de ce résultat sur une variété kählérienne compacte quelconque (existence d'une métrique d'Hermite-Einstein sur un fibré stable) a été démontrée par DONALDSON [3], [4] dans le cas projectif, UHLENBECK et YAU [13] dans le cas général. SIMPSON [10] a étendu ce résultat, d'une part à certaines variétés non compactes, en particulier les ouverts de Zariski d'une variété compacte, et d'autre part aux fibrés de Higgs introduits par HITCHIN [5] dans le cas des courbes. La méthode utilisée

(*) Texte reçu le 15 mars 1990, révisé le 27 mars 1991.
O. BIQUARD, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, 91128 Palaiseau Cedex.

par DONALDSON (et HITCHIN) en dimension 1, directement inspirée de la théorie de Yang-Mills, est plus simple que celle utilisée en dimension supérieure.

Le but de ce papier est de l'appliquer à la démonstration d'un théorème de MEHTA et SESHADRI [7], qui généralise le théorème de Narasimhan et Seshadri à un modèle de fibrés sur une courbe non compacte, les fibrés munis d'une *structure parabolique.* Cette méthode, plus simple donc, mais moins générale que celle de SIMPSON [11], a l'intérêt de fournir le cadre fonctionnel adéquat : à une structure parabolique sont associés de “bons” espaces de *connexions singulières* dans lesquels on peut appliquer les méthodes de la géométrie différentielle (moyennant une analyse un peu plus compliquée). En particulier, on peut obtenir dans ces espaces un théorème de compacité.

Dans une première partie, nous étudions le modèle local qui servira de base de travail. Après avoir donné les propriétés des espaces de Sobolev à poids dans la section 1.1, nous pouvons définir les espaces fonctionnels adéquats dans la section 1.2 pour terminer dans la section 1.3 par une théorie de jauge locale avec singularité et la démonstration dans notre cadre d'un “théorème local de compacité” (THÉORÈME 1.5) analogue à celui d'Uhlenbeck.

Dans la seconde partie, nous introduisons (section 2.1) les fibrés muni d'une structure parabolique et les outils pour les traiter, ce qui permet d'énoncer le théorème principal de ce papier (THÉORÈME 2.5). La section 2.2 comprend le problème de l'extension pour les fibrés paraboliques du point de vue différentiel, ce qui est un pas important en vue de la démonstration du théorème principal dans la section 2.3. Cette démonstration est inspirée, comme on l'aura compris, de celle de DONALDSON dans [2].

Remerciements. — Je tiens ici à remercier J.-P. BOURGUIGNON et P. PANSU pour leur aide et leurs encouragements.

1. Théorie de jauge dans $\mathbb{B}^n$, singulière en 0

1.1. Théorie de Sobolev à poids dans $\mathbb{B}^n$.

Soit $\mathbb{B}^n$ la boule unité ouverte dans $\mathbb{R}^n$, munie de la métrique usuelle $|dx|^n$. Soient k un entier positif, $p \in [1, +\infty[$, $\delta \in \mathbb{R}$, f une fonction dans $\mathbb{B}^n - \{0\}$, on définit les normes (en notant $r = |x|$)

$$\|f\|_{W^p_{k\,;\,\delta}} = \Big(\sum_{i=0}^{k} \big\|r^{i-\delta-\frac{n}{p}}\nabla^i f\big\|^p_{L^p}\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{i=0}^{k} \int \big|r^{i-\delta}\nabla^i f\big|^p \frac{|\mathrm{d}x|^n}{r^n}\Big)^{1/p},$$

$$\|f\|_{W^\infty_{k\,;\,\delta}} = \sum_{i=0}^{k} \big\|r^{i-\delta}\nabla^i f\big\|_\infty,$$

et les espaces

$$W^p_{k\,;\,\delta} = \big\{f \in L^p_{k\,;\,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{B}^n - \{0\}\big)\ ;\ \|f\|_{W^p_{k\,;\,\delta}} < \infty\big\}.$$

En posant $t = -\ln(r)$, on peut considérer la boule $\mathbb{B}^n - \{0\}$ comme le cylindre $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, +\infty[$: l'espace $W^p_{k\,;\,\delta}$ que nous avons défini est alors égal à l'espace

$$W^p_{k\,;\,\delta} = \big\{f\ ;\ \mathrm{e}^{\delta t} f \in L^p_k(\text{cylindre})\big\}$$

utilisé par LOCKART et MCOWEN dans [6].

En notant $s = n/p - k$, on a les injections de Sobolev suivantes [6, lemme 7.2].

THÉORÈME 1.1. — *Supposons $k_1 \geq k_2$, $s_1 \leq s_2$ et $\delta_2 < \delta_1$ (ou bien $\delta_2 = \delta_1$ et $p_2 \geq p_1$), alors on a une injection continue $W^{p_1}_{k_1\,;\,\delta_1} \subset W^{p_2}_{k_2\,;\,\delta_2}$.*

Remarque. — On peut montrer de plus que si $k_1 > k_2$, $s_1 < s_2$ et $\delta_2 < \delta_1$, alors l'injection est compacte. D'autre part, le théorème est encore valable pour $p_2 = \infty$: on peut obtenir que si $k > n/p$ et $f \in W^p_{k\,;\,\delta}$, alors la fonction $r^{-\delta} f$ est continue dans $\mathbb{B}^n$ et tend vers 0 quand x tend vers 0.

THÉORÈME 1.2. — *Supposons $\delta > 0$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in W^p_{1\,;\,\delta}$, on ait*

$$\|u\|_{W^p_{1\,;\,\delta}} \leq c\,\|\mathrm{d}u\|_{W^p_{0\,;\,\delta-1}}.$$

Démonstration. — On a toujours, pour toute fonction $u \in C^\infty$,

$$(*)\qquad (\alpha - n)\int_{|x|\leq 1} \frac{|u|^p}{r^\alpha} = \int_{|x|\leq 1} \frac{\mathrm{d}|u|^p \wedge *\mathrm{d}r}{r^{\alpha-1}} - \int_{|x|=1} |u|^p {*}\mathrm{d}r + \int_{|x|=\varepsilon} \frac{|u|^p * \mathrm{d}r}{r^{\alpha-1}}.$$

Supposons u nulle au voisinage de 0 et $\alpha > n$, on en déduit

$$(\alpha - n)\int_{|x|\le 1}\frac{|u|^p}{r^\alpha} \le \int_{|x|\le 1}\frac{|u|^{p-1}|\mathrm{d}u|}{r^{\alpha-1}}$$
$$\le \Big(\int_{|x|\le 1}\frac{|u|^p}{r^\alpha}\Big)^{(p-1)/p}\Big(\int_{|x|\le 1}\frac{|\mathrm{d}u|^p}{r^{\alpha-p}}\Big)^{1/p},$$

d'où finalement,

$$\int |u|^p\frac{|\mathrm{d}x|^n}{r^\alpha} \le c\int |\mathrm{d}u|^p\frac{|\mathrm{d}x|^n}{r^{\alpha-p}},$$

ce qui donne le résultat souhaité en posant $\alpha = n + p\delta$. $\square$

Nous serons particulièrement intéressés par l'espace $W_k^p = W_{k\,;\,k-n/p}^p$, dont la norme est

$$\|f\|_{W_k^p} = \Big(\int |\nabla^k f|^p + \Big|\frac{\nabla^{k-1}f}{r}\Big|^p + \cdots + \Big|\frac{f}{r^k}\Big|^p\Big)^{1/p}.$$

Il est clair que $W_k^p \subset L_k^p$. En fait, on peut en général (pour les valeurs non critiques de p) préciser simplement l'image exacte dans L_k^p.

THÉORÈME 1.3. — *Soit ℓ un entier positif ou nul; si $\ell-1 < k-n/p < \ell$, alors on a*

$$W_k^p = \{f \in L_k^p\,;\ f(0) = 0, \dots, \nabla^{\ell-1}f(0) = 0\},$$

et les normes W_k^p et L_k^p sont équivalentes dans W_k^p.

Démonstration. — Soit $u \in C^\infty(\mathbb{B}^n)$, $\tau = \tau(r)$ une fonction test C^∞, nulle au voisinage de $r = 1$ et valant 1 au voisinage de 0. Appliquons alors l'égalité (*) à la fonction τu en supposant $\alpha < n$; on va obtenir, par la même méthode que dans la proposition précédente,

$$\int_{|x|\le 1}\frac{|\tau u|^p}{r^\alpha} \le c\int_{|x|\le 1}\frac{|\mathrm{d}(\tau u)|^p}{r^{\alpha-p}},$$

d'où l'on déduit $\displaystyle\int_{|x|\le 1}\frac{|u|^p}{r^\alpha} \le c'\int_{|x|\le 1}\Big(\frac{|\mathrm{d}u|^p}{r^{\alpha-p}} + \frac{|u|^p}{r^{\alpha-p}}\Big).$

- Supposons $\ell = 0$. On obtient, puisque $n - p < kp < n$,

$$\|\nabla^{k-1}u/r\|_{L^p}^p \le c_1\big(\|\nabla^k u\|_{L^p}^p + \|\nabla^{k-1}u\|_{L^p}^p\big)\ ;$$

$$\|\nabla^{k-2}u/r^2\|_{L^p}^p \le c_2\big(\|\nabla^{k-1}u/r\|_{L^p}^p + \|\nabla^{k-2}u/r\|_{L^p}^p\big)$$
$$\le c_2c_1\big(\|\nabla^k u\|_{L^p}^p + 2\|\nabla^{k-1}u\|_{L^p}^p + \|\nabla^k u\|_{L^p}^p\big)$$

etc., et finalement $\|u\|_{W_k^p} \le C\|u\|_{L_k^p}$ pour $u \in C^\infty(\mathbb{B}^n)$. D'où $W_k^p = L_k^p$.

• Supposons $\ell = 1$. En appliquant le cas précédent, on sait que $du \in W^p_{k-1}$. On peut alors appliquer (*) avec $\alpha = kp > n$ à la fonction $u - u(0)$; comme $|u - u(0)|^p = \mathrm{O}(r^p)$ et $(k-1)p < n$,

$$\int_{|x|=\varepsilon} \frac{\left|u - u(0)\right|^p * \mathrm{d}r}{r^{\alpha-1}} \longrightarrow 0$$

quand $\varepsilon \to 0$, donc on obtient finalement

$$\int_{|x|\leq 1} \frac{\left|u - u(0)\right|^p}{r^{kp}} \leq \int_{|x|\leq 1} \frac{|\,\mathrm{d}u|^p}{r^{(k-1)p}} \leq C\|\,\mathrm{d}u\|_{L^p_{k-1}},$$

ce qui, compte tenu de $L^p_k \subset C^0$, achève la démonstration. Le cas général s'obtient par récurrence sur ℓ. ▯

1.2. Espaces fonctionnels.

Soit E un fibré au-dessus de $\mathbb{B}^n$, muni d'une décomposition $E = \bigoplus E_i$. On a alors une décomposition du fibré $\mathrm{End}(E) = E^D \oplus E^H$, où

$$\begin{cases} E^D = \bigoplus\limits_i \mathrm{Hom}(E_i, E_i), \\ E^H = \bigoplus\limits_{i\neq j} \mathrm{Hom}(E_i, E_j). \end{cases}$$

Il s'agit donc d'une décomposition par blocs : si $u \in \mathrm{End}(E)$, alors u^D est constitué des blocs diagonaux et u^H des blocs hors de la diagonale. Supposons les E_i trivialisés au-dessus de $\mathbb{B}^n$, on munit l'espace

$$D^p_k = \left\{u \in \mathrm{End}(E)\ ;\ u^D \in L^p_k,\ u^H \in W^p_k\right\}$$

de la norme $\|u\|_{D^p_k} = \|u^D\|_{L^p_k} + \|u^H\|_{W^p_k}$.

Par exemple, dans le cas $\frac{1}{2}n < p < n$, nous observons que par le THÉORÈME 1.3,

$$D^p_1 = L^p_1\ ; \qquad D^p_2 = \left\{u \in L^p_2\ ;\ u^H(0) = 0\right\}.$$

Nous aurons ainsi deux manières d'envisager les espaces D^p_k : pour étudier l'analyse d'opérateurs singuliers, nous considérerons l'aspect "espaces à poids" ; pour les autres questions, il sera plus facile en général de considérer D^p_k comme inclus dans L^p_k (les normes étant équivalentes), avec des conditions d'annulation en 0 sur la partie "H" (blocs non diagonaux). Par exemple, on a le théorème de multiplication suivant.

LEMME 1.4. — *Si $k > n/p$, alors D_k^p est une algèbre de Banach et D_{k-j}^p est un D_k^p-module topologique si $0 \leq j \leq k$.*

Démonstration. — Dans le cas où $k - n/p$ n'est pas entier et $k - n/p - j > -1$, on peut utiliser le THÉORÈME 1.3 pour conclure en constatant que dans le produit uv, $u \in D_k^p$, $v \in D_{k-j}^p$, la composante $(uv)^H$ constituée des blocs en dehors de la diagonale ne fait pas intervenir de composantes $u^D v^D$. Le cas général (dont nous n'aurons pas besoin) ferait intervenir une étude des propriétés multiplicatives des espaces $W_{k\,;\,\delta}^p$. □

Remarque. — La décomposition $E = \bigoplus E_i$ sera souvent induite par un endomorphisme semi-simple α de E, à valeurs propres constantes, les E_i étant alors les espaces propres E_{α_i} de α. Plus généralement, si on se donne (E, α) et (F, β), on peut définir un espace $D_k^p(\mathrm{Hom}(E, F))$ comme ci-dessus, en décomposant

$$\mathrm{Hom}(E,F) = \Big(\bigoplus_{\alpha_i=\beta_j} \mathrm{Hom}(E_{\alpha_i}, F_{\beta_j})\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha_i\neq\beta_j} \mathrm{Hom}(E_{\alpha_i}, F_{\beta_j})\Big)$$

et en demandant que la première composante de $u \in \mathrm{Hom}(E, F)$ soit dans L_k^p et la seconde dans W_k^p.

1.3. Un théorème de compacité pour des connexions singulières dans $\mathbb{B}^2$.

Dans cette partie, on se place dans $\mathbb{B}^2$. On utilisera souvent comme coordonnée $z = r e^{i\theta}$. Soit $E = \mathbb{B}^2 \times \mathbb{C}^\ell$ un fibré trivial (muni de la métrique standard), soit $0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_\ell < 1$ des réels fixés, soit α la matrice

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_\ell \end{pmatrix}.$$

Nous construisons les espaces à poids $W_{k\,;\,\delta}^p(\Omega^i \otimes \mathrm{End}\, E)$ et les espaces $D_k^p(\Omega^i \otimes \mathrm{End}\, E)$ de la section précédente relativement à la décomposition de E par les espaces propres E_{α_i} de α, en utilisant toujours sur la base la norme *euclidienne*.

Soit la connexion $D = \mathrm{d} + i\alpha\,\mathrm{d}\theta$ sur E. C'est une connexion plate unitaire sur E, mais singulière en 0. Le but de cette partie est de donner un analogue du théorème de compacité d'Uhlenbeck [12, théorème 2.1] pour l'opérateur D. Les bons espaces de Sobolev associés se trouvent être ceux que nous avons définis.

Nous commençons par définir les espaces de connexions et le groupe de jauge. Pour le justifier, nous regardons comment la connexion D agit sur le fibré $\mathrm{End}(E)$: pour u section de $\mathrm{End}(E)$, on a

$$Du = \mathrm{d}u + [i\alpha, u]\,\mathrm{d}\theta.$$

En coordonnées, $[\alpha, (u_{ij})] = \big((\alpha_i - \alpha_j)u_{ij}\big)$, on obtient donc

$$\begin{aligned}(Du)^D &= \mathrm{d}(u^D),\\ (Du)^H &= \mathrm{d}(u^H) + [i\alpha, u^H]\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Par conséquent, $D : D^p_k(\mathrm{End}\,E) \to D^p_{k-1}(\Omega^1 \otimes \mathrm{End}\,E)$ est continue.

Soit $G = U(\ell, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On définit un espace de connexions unitaires

$$\mathcal{A}^p_k = \{D + a\,;\ a \in D^p_k(\Omega^1 \otimes \mathfrak{g})\}$$

et un groupe de jauge

$$\mathcal{G}^p_k = \{g \in D^p_k(G)\}$$

et on notera $\mathcal{A}^p = \mathcal{A}^p_1$ et $\mathcal{G}^p = \mathcal{G}^p_2$.

Le groupe de Lie de dimension infinie $\mathcal{G}^p$ agit sur $\mathcal{A}^p$ par

$$g(D + a) = D + gag^{-1} - (Dg)g^{-1}.$$

La courbure d'une connexion $A = D + a \in \mathcal{A}^p$ est

$$F(A) = Da + \tfrac{1}{2}[a, a].$$

Il est clair que l'action de $\mathcal{G}^p$ sur $\mathcal{A}^p$ et la courbure $F : \mathcal{A}^p \to L^p$ sont bien définies.

Le théorème que nous démontrons dans cette partie est le suivant.

THÉORÈME 1.5 (Compacité locale). — *Soit $p \in]1, 2[$ vérifiant*

$$p < \begin{cases} \dfrac{2}{2 + \alpha_j - \alpha_i} & \text{si } \alpha_i > \alpha_j, \\[2mm] \dfrac{2}{1 + \alpha_j - \alpha_i} & \text{si } \alpha_i < \alpha_j. \end{cases} \tag{1}$$

Alors il existe $\eta > 0$, $c > 0$, tels que toute connexion $A \in \mathcal{A}^p$ vérifiant $\|F(A)\|_{L^p} \leq \eta$ soit équivalente sous l'action du groupe de jauge $\mathcal{G}^p$ à une connexion $D + a \in \mathcal{A}^p$ vérifiant

(i) $D^*a = 0$ *et* $a_{\partial/\partial r} = 0$ *pour* $|z| = 1$;

(ii) $\|a\|_{D^p_1} \leq c\|F(A)\|_{L^p}$.

Le principe de la preuve est bien connu [12]. Notons

$$\mathcal{A}^p_\eta = \{A \in \mathcal{A}^p\,;\ \|F(A)\|_{L^p} \leq \eta\}\,;$$

on montre que l'ensemble des $A \in \mathcal{A}^p_\eta$ vérifiant les conclusions du théorème est ouvert et fermé dans $\mathcal{A}^p_\eta$, après un choix convenable de η et de c.

LEMME 1.6. — *$\mathcal{A}^p_\eta$ est connexe.*

Démonstration. — C'est clair [12, lemme 2.3]. $\square$

LEMME 1.7. — *Pour tous η et c, l'ensemble des connexions vérifiant* (i) *et* (ii) *est fermé dans $\mathcal{A}^p_\eta$.*

Démonstration. — C'est identique à [12, lemme 2.4]. Rappelons brièvement l'argument : supposons que $B_i = D + b_i \to B = D + b$ dans $\mathcal{A}^p_\eta$ et qu'il existe $g_i \in \mathcal{G}^p$ telle que $g_i(B_i) = D + a_i$ vérifie (i) et (ii) ; on en déduit que (a_i) est uniformément bornée dans D^p_1, donc admet une sous-suite faiblement convergente $a_i \rightharpoonup a$ dans D^p_1. Choisissons $q > 2$ avec $q > p$ et $1/q > 1/p - 1/2$. Alors de $D^p_1 \subset L^q$ et de l'équation

$$(*) \qquad Dg_i = g_i b_i - a_i g_i$$

on déduit, puisque g_i est unitaire, que (Dg_i) est bornée dans L^q, et donc, par le THÉORÈME 1.2, (g_i) est bornée dans D^q_1. De la formule $(*)$ on déduit alors que Dg_i est bornée dans D^p_1 ; appliquant à nouveau le THÉORÈME 1.2, nous déduisons que (g_i) est bornée dans D^p_2. Il existe donc une sous-suite $g_i \rightharpoonup g$ qui converge faiblement dans D^p_2, et $(*)$ est conservée par passage à la limite faible :

$$Dg = gb - ag.$$

Le lemme en résulte. $\square$

LEMME 1.8. — *Supposons que $a \in W^2_{1;-1}(\Omega^1 \otimes \mathfrak{g})$ vérifie* (i). *Alors*

$$\int_{|z|\le 1} |\nabla^D_c a|^2_c \frac{|\mathrm{d}z|^2}{|z|^2} = \int_{|z|\le 1} |Da|^2_c \frac{|\mathrm{d}z|^2}{|z|^2},$$

où les indices c signifient que les normes ou les opérateurs sont construits avec la métrique cylindrique $|\mathrm{d}z|^2/|z|^2$.

Démonstration. — On raisonne par densité en supposant a de classe C^∞, nulle au voisinage de 0. Puisque D est plate, on a l'égalité

$$(\nabla^D_c)^* \nabla^D_c = DD^*_c + D^*_c D.$$

On remarquera que pour les 1-formes, $D^* a = r^2 D^*_c a$. Donc, si $D^* a = 0$,

$$\int_{|x|\le 1} \langle (\nabla^D_c)^* \nabla^D_c a, a\rangle_c \frac{|\mathrm{d}z|^2}{|z|^2} = \int_{|x|\le 1} \langle D^*_c Da, a\rangle_c \frac{|\mathrm{d}z|^2}{|z|^2}.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que les termes de bord sont égaux, soit

$$\int_{|x|=1} *_c\langle\nabla^D a, a\rangle = \int_{|x|=1} \langle *_c Da, a\rangle.$$

Notons i_r l'injection du cercle de rayon r dans le disque unité et posons $a = u\,\mathrm{d}r/r + v\,\mathrm{d}\theta$. On calcule facilement

$$i_r^*\langle *_c\nabla_c^D a, a\rangle = \Big[\Big\langle\frac{\partial u}{\partial r}, u\Big\rangle + \Big\langle\frac{\partial v}{\partial r}, v\Big\rangle\Big] r\,\mathrm{d}\theta,$$
$$i_r^*\langle *_c Da, a\rangle = \Big[\Big\langle r\frac{\partial v}{\partial r}, v\Big\rangle - \Big\langle (Du)_{\mathrm{d}\theta}, v\Big\rangle\Big]\,\mathrm{d}\theta,$$

où $(Du)_{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta = i_r^* Du$; si u est nulle sur le cercle unité, on déduit

$$i_1^*\langle *_c Da, a\rangle = i_1^*\langle *_c\nabla^D a, a\rangle\ ;$$

le lemme en résulte.

Arrivé à ce stade, nous voulons montrer que (ii) se déduit d'une estimée *a priori* de (i), comme dans [12, lemme 2.5]. Nous avons besoin d'estimées elliptiques pour nos opérateurs singuliers. Celles-ci sont fournies par l'article de LOCKART et MCOWEN [6] : la morale de cet article est que, sur une variété non compacte X, difféomorphe à un cône en dehors d'une partie compacte (le bord devant être disjoint de la partie conique), si on a un opérateur elliptique, avec condition à bord elliptique, invariant par homothétie sur la partie conique, la théorie habituelle des opérateurs elliptiques sur une variété compacte à bord se généralise dans les espaces de Sobolev à poids, sauf pour un ensemble discret de poids (et on a un contrôle du changement d'indice en passant par ces poids).

Écrivons précisément le résultat dans le cas sans bord (le cas avec bord étant analogue en rajoutant les termes de bord usuels). Soit A un opérateur elliptique d'ordre k qui dans certaines trivialisations (les normes se déduisant de ces trivialisations) s'écrit (en posant $D_r = -i\partial/\partial r, \dots$)

$$A = \frac{1}{r^k} A(rD_r, D_\theta, \theta). \tag{2}$$

L'opérateur A est donc continu

$$A : W^p_{s+k\,;\,\delta} \longrightarrow W^p_{s\,;\,\delta-k} \tag{3}$$

et on a pour $s \in W^p_{s+k\,;\,\delta}$ l'estimée elliptique (les constantes étant sous-entendues)

$$\|s\|_{W^p_{s+k\,;\,\delta}} \le \|As\|_{W^p_{s\,;\,\delta-k}} + \|s\|_{W^p_{s\,;\,\delta}}. \tag{4}$$

Supposons que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im}(\lambda) = \delta$,

$$\text{(5)} \qquad \text{si} \quad A(\lambda, D_\theta, \theta)u(\theta) = 0 \quad \text{alors} \quad u(\theta) = 0$$

(ce qui est vérifié pour δ en dehors d'une partie discrète de $\mathbb{R}$), alors (3) est Fredholm [6, théorème 1.3], son indice ne dépend que de δ et est une fonction localement constante de δ.

Cela nous permet de démontrer facilement le lemme suivant. Celui-ci donne la valeur de la constante c utilisée dans le théorème.

LEMME 1.9. — *Il existe $c > 0$, telle que si $D + a \in \mathcal{A}^p$ vérifie* (i) *et $\|a\|_{L^{2p}}$ est assez petite, on ait*

$$\|a\|_{D_1^p} \leq c\big\|F(D+a)\big\|_{L^p}.$$

Démonstration. — Commençons par vérifier que l'on peut appliquer la théorie de Lockart et McOwen pour l'opérateur $D \oplus D^* : D_1^p \to L^p$. Écrivons

$$a = u\,\mathrm{d}r + vr\,\mathrm{d}\theta.$$

Alors

$$Da = \Big(v + r\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} - [i\alpha, u]\Big)\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta,$$

$$D * a = \Big(u + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} + [i\alpha, v]\Big)\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta,$$

donc $(D \oplus D^*)$ est bien de la forme (2). La condition (5) nous amène à étudier, pour $\operatorname{Im}(\lambda) = 1 - 2/p$, le système d'équations

$$\begin{cases} (1 + i\lambda)v - \dfrac{\partial u}{\partial \theta} - i[\alpha, u] = 0, \\ (1 + i\lambda)u + \dfrac{\partial v}{\partial \theta} + i[\alpha, v] = 0, \end{cases}$$

soit

$$\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial \theta^2} + 2i(\alpha_i - \alpha_j)\frac{\partial u_{ij}}{\partial \theta} - \big((\lambda - i)^2 + (\alpha_i - \alpha_j)^2\big)u_{ij} = 0$$

et la même équation pour v. La solution est

$$\exp([i(\alpha_i - \alpha_j) \pm (\lambda - i)]\theta)$$

qui exige $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ et $\alpha_i - \alpha_j \pm \operatorname{Im}(\lambda) \in \mathbb{Z}$. Si p vérifie (1), cela ne peut pas se produire, donc la condition (5) est bien respectée.

Maintenant, la condition au bord $a_{\partial/\partial r}=0$ est elliptique pour l'opérateur $D \oplus D^*$. Si $a \in D_1^p = W^p_{1\,;\,1-2/p}$ vérifie (i) et $Da = 0$, alors $a \in W^2_{1\,;\,-1}$ et par le lemme précédent, $a = 0$; on obtient donc l'estimée, si a vérifie (i) :

$$\|a\|_{D_1^p} \le c_2 \|Da\|_{L^p}.$$

De la formule $Da = F - a \wedge a$, on déduit

$$\|Da\|_{L^p} \le \|F\|_{L^p} + \|a\|^2_{L^{2p}} \,;$$

mais $D_1^p \subset L^{2p}$, et donc $\|a\|_{L^{2p}} \le c_4 \|a\|_{D_1^p} \le c_3 c_4 \|Da\|_{L^p}$, d'où

$$\big(1 - c_3 c_4 \|a\|_{L^{2p}}\big) \|Da\|_{L^p} \le \|F\|_{L^p},$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 1.10. — *Supposons que $D + a \in \mathcal{A}^p$ vérifie la condition* (i), *$\|a\|_{L^{2p}}$ étant suffisamment petite. Alors, pour tout $W \in D_1^p(\mathfrak{g} \otimes \Omega^1)$ suffisamment petit, vérifiant $W_{\partial/\partial r} = 0$ sur $|x| = 1$, il existe $g \in \mathcal{G}^p$, $\partial g/\partial r = 0$ sur $|x| = 1$ et*

$$D^*\big(g(a + W)g^{-1} - (Dg)g^{-1}\big) = 0.$$

Démonstration. — Définissons les espaces

$$\mathcal{U} = \Big\{ U \in D_2^p(\mathfrak{g})\,;\ \int_{|x|\le 1} U^D = 0,\ \frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{|x|=1} = 0 \Big\}\,;$$

$$\mathcal{V} = \Big\{ V \in L^p(\mathfrak{g})\,;\ \int_{|x|\le 1} V^D = 0 \Big\}\,;$$

$$\mathcal{W} = \big\{ W \in D_1^p(\mathfrak{g} \otimes \Omega^1)\,;\ W_{\partial/\partial r}\big|_{|x|=1} = 0 \big\}.$$

Alors l'opérateur H

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \otimes \mathcal{W} &\longrightarrow \mathcal{V} \\ (U, W) &\longmapsto D^*\big(\mathrm{e}^U (a + W) \mathrm{e}^{-U} - (D\mathrm{e}^U)\mathrm{e}^{-U}\big) \end{aligned}$$

a pour différentielle partielle $\mathrm{d}_{\mathcal{U}} H$ en la première variable en $(0, 0)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{V} \\ u &\longmapsto D^*\big(Du - [a, u]\big) \end{aligned}$$

qui va s'avérer être un isomorphisme, ce qui achèvera la démonstration du lemme. Puisque $D(Du) = 0$ et $Du_{\partial/\partial r} = 0$, on obtient à nouveau une estimée

$$\|Du\|_{D_1^p} \leq c_1 \|D^* Du\|_{L^p},$$

donc, puisque $D^*[a, u] = [a, Du]$ (car $D^* a = 0$),

$$\big\|D^*[a, u]\big\|_{L^p} \leq \|a\|_{L^{2p}} \|Du\|_{L^{2p}} \leq c_2 \|a\|_{L^{2p}} \|Du\|_{D_1^p},$$

d'où l'on déduit

$$\|Hu\|_{L^p} \geq \big(c_1^{-1} - c_2 \|a\|_{L^{2p}}\big) \|Du\|_{D_1^p}.$$

Si $Hu = 0$, alors $Du = 0$, ce qui implique $u = 0$ (car $\int u^D = 0$). Donc finalement H est injectif. Pour voir qu'il est surjectif, nous montrons qu'il est d'indice nul : nous constatons que

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{V} \\ u &\longmapsto D^*[a, u] \end{aligned}$$

est compacte, car la multiplication par $a \in D_1^p = L_1^p$ est compacte $D_2^p \subset L_2^p \to D_1^p$. On est donc ramené au cas $a = 0$ et à l'opérateur $D^* D$. Rappelons qu'en coordonnées

$$D^* D(u_{ij}) = \big([\mathrm{d} + i(\alpha_i - \alpha_j)\,\mathrm{d}\theta]^* [\mathrm{d} + i(\alpha_i - \alpha_j)\,\mathrm{d}\theta] u_{ij}\big).$$

Sur la partie "D" ($\alpha_i - \alpha_j = 0$), $D^* D$ est donc égal au laplacien usuel $\mathrm{d}^* \mathrm{d}$ qui est un bien un isomorphisme entre les espaces souhaités. Sur la partie "H", le critère de Lockart et McOwen indique que $D^* D$ est Fredholm (avec indice indépendant de δ) pour $0 \leq \delta < \inf_{\alpha_i > \alpha_j} \alpha_i - \alpha_j$; notre poids $\delta = 2 - 2/p$ vérifie cette condition donc on peut calculer l'indice en se ramenant à $\delta = 0$; il suffit donc de considérer $D^* D : W_{2;0}^2 \to W_{0;-2}^2$ (restreint aux composantes "H"). L'injectivité résulte de l'intégration par parties, valable pour $u \in W_{2;0}^2$ vérifiant $\partial u / \partial r = 0$ sur $|x| = 1$:

$$\int_{|x| \leq 1} \langle D^* D u, u \rangle = \int_{|x| \leq 1} \langle Du, Du \rangle.$$

Comme sur le cercle $\mathbb{S}^1$ on a, si $0 < |\alpha_i - \alpha_j| < 1$,

$$\big\|(\mathrm{d} + i(\alpha_i - \alpha_j)\,\mathrm{d}\theta) u\big\|_{L^2} \geq c(\alpha_i, \alpha_j) \|u\|_{L^2},$$

on obtient une solution de $D^*Du^H = f^H$ (on ne considère que les termes "H" en dehors des blocs diagonaux) en minimisant classiquement $\frac{1}{2}(Du, Du) - (f, u)$. D'où la surjectivité. ∎

Fin de la démonstration du théorème 1.5. — Elle est identique à [12, lemme 2.8]. Donnons rapidement le principe de cette démonstration : il reste à montrer que l'ensemble des connexions $A \in \mathcal{A}^p_\eta$ vérifiant les conclusions du théorème est ouvert. Supposons qu'une connexion $A \in \mathcal{A}^p_\eta$ soit équivalente par $g \in \mathcal{G}^p$ à une connexion $D + a \in \mathcal{A}^p$ vérifiant (i) et (ii). Le principe est, en appliquant le LEMME 1.10, de trouver un voisinage de $D + a$ dont tout élément soit envoyé par une transformation de jauge sur une connexion vérifiant (i) et donc (ii) par le LEMME 1.9, puis d'envoyer ce voisinage par g^{-1} sur un voisinage de A. La difficulté est que l'hypothèse $W_{\partial/\partial r} = 0$ sur $|x| = 1$ du LEMME 1.10 n'est pas vérifiée dans le voisinage de $D + a$. C'est pourquoi on doit d'abord remplacer dans un voisinage de $D + a$ les connexions $D + a + \lambda$ par des connexions équivalentes $g_\lambda(D + a + \lambda)$ vérifiant les hypothèses du lemme 1.10. Le lemme suivant (voir UHLENBECK [12, lemme 2.6]) permet la construction des transformations de jauge g_λ.

LEMME 1.11. — *Il existe un opérateur continu $P : D^p_1 \to D^p_2$ tel que, si $f \in D^p_1$, alors $P(f)$ obéit aux deux conditions suivantes sur le bord $|x| = 1$:*

$$P(f) = 0, \quad \frac{\partial P(f)}{\partial r} = f.$$

La transformation de jauge adéquate est $g_\lambda = \exp[P(\lambda_{\partial/\partial r})]$. On peut alors appliquer le LEMME 1.10 aux connexions $g_\lambda(D+a+\lambda)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

2. Fibrés paraboliques sur une surface de Riemann

2.1. Métriques adaptées, espaces de connexions singulières, formule de Gauss-Chern pour le degré parabolique.

Nous introduisons ici les fibrés holomorphes avec structure parabolique sur une surface de Riemann. Cette notion est due à SESHADRI [7]. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler les définitions.

Dans toute cette partie, nous fixons une surface de Riemann X, munie d'une métrique lisse de volume normalisé à 1, un point "parabolique" P sur X (on pourrait aussi bien en prendre plusieurs) et un fibré E de rang ℓ et de classe C^∞ sur X. Nous considérerons la structure parabolique comme fixée sur E (tandis que nous regarderons plusieurs structures holomorphes).

Précisément, la structure parabolique dans la fibre E_P au-dessus du point P consiste en un drapeau

$$E_P = F_1 E_P \supset F_2 E_P \supset \cdots \supset F_r E_P$$

muni de poids $0 \le \kappa_1 < \cdots < \kappa_r < 1$. Chaque poids κ_i possède une multiplicité $\dim(F_{i+1}E_P) - \dim(F_i E_P)$. Il est plus commode de répéter chaque poids suivant sa multiplicité : nous les noterons alors $0 \le \alpha_1 \le \cdots \le \alpha_\ell < 1$.

Le *degré parabolique* du fibré E et son *degré parabolique normalisé* sont définis par

$$\deg \operatorname{par} E = \deg E + \sum \alpha_i,$$

$$\mu(E) = \frac{\deg \operatorname{par}(E)}{\operatorname{rang}(E)}$$

et un fibré holomorphe $\mathcal{E}$ est dit *paraboliquement stable* si pour tout sous-fibré holomorphe non trivial $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, muni de la structure parabolique induite, on a $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$.

A présent, nous introduisons les outils nécessaires pour traiter les fibrés paraboliques d'un point de vue différentiel. Le fibré E est muni d'une métrique hermitienne lisse h sur $X - \{P\}$, dégénérée en P, et adaptée en un sens qui sera précisé à la structure parabolique.

Nous définissons l'espace $\mathcal{C}$ des structures holomorphes sur E, ou plus précisément des opérateurs

$$\bar\partial^E : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(\Omega^{0,1} \otimes E), \quad \bar\partial^E(fs) = f\bar\partial^E s + (\bar\partial f)s$$

et l'espace $\mathcal{A}$ des connexions h-unitaires associées aux structures holomorphes $\bar\partial^E \in \mathcal{C}$. Autrement dit, c'est l'espace des connexions h-unitaires lisses sur $X - \{P\}$ dont la partie de type (0,1) est lisse sur X.

On voit bien quel est le groupe de jauge complexe qui doit agir sur le fibré C^∞ à structure parabolique E. Il s'agit du groupe

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}} = \big\{g \in C^\infty(\operatorname{Aut} E)\ ;\ g_P \text{ respecte le drapeau de } E_P\big\}\cdot$$

De même, le groupe de jauge (unitaire) de (E, h) est défini par

$$\mathcal{G} = \big\{g \in \mathcal{G}_{\mathbb{C}}\ ;\ g_{|X} - \{P\} \text{ est } h\text{-unitaire }\big\}\cdot$$

Les définitions suivantes expliquent en quel sens la métrique doit être *adaptée* à la structure parabolique.

DÉFINITION 2.1. — On dit que (e_i) est une *base de E en P respectant le drapeau* si c'est une base locale C^∞ de E au voisinage de P telle que de plus F_iE_P soit engendré par $(e_{l-dim(F_iE_P)+1}(P),\dots,e_l(P))$.

DÉFINITION 2.2. — Soit $p > 1$, une base locale (ϵ_i) de sections C^∞ de E dans un voisinage épointé de P est dite

1) *adaptée* à E si

$$\epsilon_i = g\Big(\frac{f_i}{|z|^{\alpha_i}}\Big),$$

où $g \in D_2^p$ et (f_i) est une base de E en P qui respecte le drapeau ;

2) *adaptée* à (E,h) si elle est adaptée à E et est h-orthonormale.

DÉFINITION 2.3. — Une métrique hermitienne h sur $E_{|X} - \{P\}$ est dite *adaptée* si (E,h) admet une base adaptée.

Remarque. — Il est clair qu'un fibré E possède toujours une base adaptée. C'est évidemment faux pour (E,h).

Exemple 2.4. — Construction d'une métrique adaptée.

Soit z une coordonnée locale sur X en P. Soit $(e_i)_{1\le i\le l}$ une base locale de sections de E qui respecte le drapeau. On peut introduire localement une métrique sur E

$$h = \begin{pmatrix} |z|^{2\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & |z|^{2\alpha_l} \end{pmatrix}$$

que l'on convient de prolonger sur $X - \{P\}$. La base $(e_i/|z|^{\alpha_i})$ est manifestement adaptée à (E,h).

Supposons de plus que $\mathcal{E}$ soit un fibré holomorphe avec E comme fibré C^∞ sous-jacent. On suppose que la base de sections (e_i) est une base de sections holomorphes de $\mathcal{E}$. La connexion de Chern associée à la métrique h s'écrit localement

$$\mathrm{d}^h = \mathrm{d} + h^{-1}\partial h = \mathrm{d} + \alpha\,\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

où α désigne la matrice diagonale avec coefficients $(\alpha_1,\dots,\alpha_l)$.

Si on se place en coordonnées orthonormales $\epsilon_i = e_i/|z|^{\alpha_i}$, on obtient les formules

$$\bar\partial^{\mathcal{E}} = \bar\partial - \tfrac{1}{2}\alpha\frac{\mathrm{d}\bar z}{\bar z},\quad \mathrm{d}^h = \mathrm{d} + i\alpha\,\mathrm{d}\theta.$$

C'est le modèle local que nous avons étudié dans la première partie. On notera respectivement D'' et D ces deux modèles locaux.

Les constructions qui vont suivre sont basées sur le "principe" suivant : on a imposé aux transformations de jauge lisses le respect de la structure parabolique — on imposera aux transformations de jauge non lisses des conditions à poids dans une base adaptée comme (ϵ_i).

On peut maintenant énoncer de manière précise le résultat qui sera démontré. Tout d'abord, précisons qu'un fibré holomorphe parabolique $\mathcal{E}$ est dit *indécomposable* s'il n'admet pas de décomposition holomorphe $\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ telle que la réunion des poids des structures paraboliques induites en P sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ soit égale à l'ensemble des poids de $\mathcal{E}$. Cela est équivalent à dire que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ sont isomorphes (paraboliquement). Il est clair que tout fibré parabolique stable est indécomposable.

THÉORÈME 2.5. — *Soit $\mathcal{E}$ un fibré parabolique indécomposable muni d'une métrique hermitienne adaptée h. Alors $\mathcal{E}$ est paraboliquement stable si et seulement s'il existe sur $\mathcal{E}$ une connexion $A \in \mathcal{A}$ vérifiant*

$$*F_A = -2\pi i\, \mu(\mathcal{E}).$$

Cette connexion est unique modulo l'action du groupe de jauge $\mathcal{G}$.

En particulier, si $\mathcal{E}$ est un fibré parabolique de degré parabolique nul, le choix (toujours possible) d'une métrique adaptée sur $\mathcal{E}$ permet de construire sur $\mathcal{E}$ une connexion unitaire plate, singulière au point parabolique; il est facile de voir que son holonomie autour du point parabolique est égale à celle du modèle local $\mathrm{d} + i\alpha \mathrm{d}\theta$. On retrouve ainsi le théorème de Mehta et Seshadri [7, théorème 4.1].

Soient (e_i) et (f_j) deux bases C^∞ de E qui respectent le drapeau. Le changement de base g respecte donc le drapeau, ce qui signifie

$$g_j^i = 0 \quad \text{si} \quad \alpha_i < \alpha_j,$$

d'où il résulte que la matrice de passage de $(e_i/|z|^{\alpha_i})$ à $(f_j/|z|^{\alpha_j})$, qui s'écrit $(|z|^{\alpha_i - \alpha_j} g_j^i)$, est dans l'espace D_2^p, pourvu que les fonctions $|z|^{\alpha_i-\alpha_j-2}$ (si $\alpha_i > \alpha_j$) et $|z|^{\alpha_i-\alpha_j-1}$ (si $\alpha_i < \alpha_j$) soient dans L^p, ce qui est vérifié précidément quand p satisfait la condition (1) de la première partie. On supposera dorénavant p fixé vérifiant (1).

On a donc démontré la proposition suivante.

PROPOSITION 2.6. — *Toutes les bases adaptées à E (resp. à (E,h)) sont équivalentes par des "transformations de jauge" complexes (resp. unitaires) qui sont dans D_2^p.* $\square$

Soient (ϵ_i) et (σ_i) deux bases adaptées à E, donc le passage de (ϵ_i) à (σ_i) est donné par $g \in D_2^p$. Si on a un opérateur $\bar{\partial}^E = D'' + a$ en coordonnées (ϵ_i), on obtient en coordonnées (σ_i) l'opérateur $D'' + b$, avec $b = gag^{-1} - (D''g)g^{-1}$, si bien que $a \in D_1^p$ si et seulement si $b \in D_1^p$.

Par conséquent, on peut définir sur X de manière intrinsèque un espace $\mathcal{C}^p$ d'opérateurs $\bar{\partial}^E$ de classe locale L_1^p en dehors du point P et de la forme $D'' + a$ au voisinage de P dans n'importe quelle base adaptée à E avec $a \in D_1^p$. On définit aussi un groupe $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^p$ d'automorphismes complexes du fibré E, de régularité L_2^p sur X et D_2^p dans une base adaptée au voisinage de P.

De même, on définit un espace $\mathcal{A}^p$ de connexions unitaires sur (E, h) et un groupe $\mathcal{G}^p$ de transformations de jauge unitaires.

Une fois ces espaces définis, on voit que la proposition précédente signifie en fait que $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^p$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{G}_{\mathbb{C}}^p$. On a aussi la proposition suivante, où la condition (1), comme précédemment, joue un rôle essentiel.

PROPOSITION 2.7. — *On a $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^p$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^p$.*

Démonstration. — Soit (e_i) une base C^∞ respectant le drapeau de E; un opérateur $\bar{\partial}^E \in \mathcal{C}$ s'écrit $\bar{\partial}^E = \bar{\partial} + a\,\mathrm{d}\bar{z}$, où $a = (a_{ij})$ et $a_{ij} \in C^\infty(\Omega^{0,1})$; en coordonnées $\epsilon_i = e_i/|z|^{\alpha_i}$, on obtient

$$\bar{\partial}^E = \bar{\partial} - \tfrac{1}{2}\alpha\,\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\bar{z}} + \big(|z|^{\alpha_i - \alpha_j} a_{ij}\big)\,\mathrm{d}\bar{z}.$$

Puisque a_{ij} est C^∞, pour $\alpha_i \neq \alpha_j$, on a $|z|^{\alpha_i - \alpha_j} a_{ij} \in W_1^p = W_{1\,;\,1-2/p}^p$ pourvu que $|z|^{\alpha_i - \alpha_j - 1} \in L^p$, ce qui est satisfait si p vérifie (1). Donc, dans les coordonnées (ϵ_i), on a

$$\bar{\partial}^E = D'' + a,$$

avec $a \in D_1^p$. Cela prouve que $\bar{\partial}^E \in \mathcal{C}^p$.

Comme les connexions de $\mathcal{A}$ sont les connexions de Chern des opérateurs $\bar{\partial}$ de $\mathcal{C}$, la deuxième partie de la proposition découle immédiatement de la première. $\square$

PROPOSITION 2.8. — *Sur le fibré E, tout opérateur $\bar{\partial}^E \in \mathcal{C}^p$ est équivalent sous le groupe de jauge complexe $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}^p$ à un opérateur lisse sur X (i.e. qui est dans $\mathcal{C}$).*

Démonstration. — C'est l'équivalent dans notre cas de [1, lemme 14.8]. La démonstration s'étend parce que l'ingrédient essentiel dans la preuve est que l'opérateur

$$\bar{\partial}^E : D_2^p(\operatorname{End} E) \longrightarrow D_1^p(\Omega^{0,1} \otimes \operatorname{End} E)$$

est Fredholm. Or, dans des coordonnées adaptées (ϵ_i), l'opérateur $\bar\partial^E$ a pour expression locale

$$\bar\partial^E = \bar\partial - \tfrac{1}{2}\alpha \frac{\mathrm{d}\bar z}{\bar z} + a = D'' + a,$$

où $a \in D_1^p$. Comme la multiplication par un élément de D_1^p est compacte, on peut se ramener au cas où $a = 0$ dans ces coordonnées en modifiant $\bar\partial^E$ au voisinage du point parabolique. Si p vérifie (1), on voit alors que la condition (5) de la première partie est vérifiée, donc notre opérateur est bien Fredholm par [6]. $\square$

PROPOSITION 2.9 (Formule de Gauss-Chern). — *Supposons h adaptée sur E. Alors, pour toute connexion $A \in \mathcal{A}^p$, on a*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_X \mathrm{tr}(F_A) = \deg \mathrm{par}\, E.$$

Démonstration. — Puisque $A \in \mathcal{A}^p$, on a l'expression locale dans des coordonnées adaptées (ϵ_i),

$$A = D + a, \qquad \text{où } a \in D_1^p.$$

Soit A_0 une connexion sur E, lisse sur X tout entier. On obtient de même

$$A_0 = d - \alpha \frac{\mathrm{d}r}{r} + b, \qquad \text{où} \quad b \in D_1^p.$$

La 1-forme différentielle $c = A - A_0$ sur $X - \{P\}$, à valeurs dans $\mathrm{End}(E)$, a donc pour expression locale

$$c = i\alpha\,\mathrm{d}\theta + \alpha\,\frac{\mathrm{d}r}{r} + a - b.$$

Comme $\mathrm{tr}(F_A) - \mathrm{tr}(F_0) = \mathrm{d}\,\mathrm{tr}(c)$, on déduit par intégration sur X privé de la boule B_ε (C_ε étant le cercle de rayon ε) :

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{X-B_\varepsilon}\big(\mathrm{tr}(F_A) - \mathrm{tr}(F_0)\big) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}\big(\mathrm{tr}(i\alpha\,\mathrm{d}\theta) + \mathrm{tr}(a-b)\big)\ ;$$

or $a - b \in L_1^p$, donc quand $\varepsilon \to 0$,

$$\int_{C_\varepsilon} \mathrm{tr}(a-b) \longrightarrow 0,$$

et en faisant tendre ε vers 0 on obtient

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_X \mathrm{tr}(F_A) = \mathrm{tr}(\alpha) - \frac{1}{2\pi i}\int_X \mathrm{tr}(F_0),$$

ce qu'il fallait démontrer.

2.2. Sous-fibrés et fibrés quotients, "théorie de Hodge".

LEMME 2.10. — *Soient (σ_i) une base adaptée du fibré E, $s_i = |z|^{\alpha_i}\sigma_i$, u une section C^∞ de E telle que $u(0) \in F_pE_P$; notons $u = u^i s_i$ et β le poids correspondant à F_pE_P, alors :*

1) *si $\alpha_i \neq \beta$ (resp. $\alpha_i = \beta$), alors $|z|^{\alpha_i - \beta}u^i \in W_2^p$ (resp. $u^i \in L_2^p$) ;*

2) *si de plus $u(0) \notin F_{p+1}E_P$, alors les $(u^i)_{\alpha_i = \beta}$ ne sont pas tous nuls en 0.*

Démonstration. — Soit $e_i/|z|^{\alpha_i} = g(s_i/|z|^{\alpha_i})$, avec $g \in D_2^p$ et (e_i) base C^∞ respectant le drapeau ; on a donc (en sous-entendant les sommations)

$$e_j = |z|^{\alpha_j - \alpha_i} g_j^i s_i, \quad u = b^j e_j = |z|^{\alpha_j - \alpha_i} b^j g_j^i s_i,$$

avec $b^j \in C^\infty(X)$ et $b^j(0) = 0$ si $\alpha_j < \beta$; on a donc

$$|z|^{\alpha_i - \beta} u^i = b^j |z|^{\alpha_j - \beta} g_j^i$$

et il faut analyser chaque terme de la sommation (sur j) pour obtenir la première partie du lemme :

- $\alpha_j > \beta$, alors $g_j^i \in L_2^p$, $b^j|z|^{\alpha_j - \beta} \in W_2^p$ et $b^j|z|^{\alpha_j-\beta}g_j^i \in W_2^p$;
- $\alpha_j < \beta$, alors $b^j = \mathrm{O}(z)$, donc $b^j|z|^{\alpha_j-\beta} \in W_2^p$ et $b^j|z|^{\alpha_j-\beta}g_j^i \in W_2^p$;
- $\alpha_j = \beta$, si $\alpha_i \neq \beta$ (resp. $\alpha_i = \beta$), alors $b^j g_j^i \in W_2^p$ (resp. L_2^p) et on obtient encore le résultat voulu.

De plus, à l'origine, seuls les g_j^i avec $\alpha_i = \alpha_j$ sont non nuls (il ne reste que les blocs diagonaux) ; par conséquent le bloc diagonal $(g_j^i)_{\alpha_i=\alpha_j=\beta}$ est inversible, donc si $u(0) \notin F_{p+1}E_P$ et les b^j pour $\alpha_j = \beta$ ne sont pas tous nuls, on obtient la seconde partie du lemme, compte tenu de la formule $u^i = b^j|z|^{\alpha_j-\alpha_i}g_j^i$. □

Remarque. — Il faut comprendre ce lemme de la manière suivante : si $u(0)$ est dans la partie du drapeau correspondant au poids β, alors $u/|z|^\beta = |z|^{\alpha_i-\beta}u^i\sigma_i$ a des coefficients D_2^p dans la base (σ_i), où D_2^p est la généralisation des espaces D indiquée dans la remarque suivant le LEMME 1.4.

PROPOSITION 2.11. — *Supposons que h soit adaptée à E et que S soit un sous-fibré de E, alors $h_{|S}$ est adaptée à S.*

Démonstration. — Notons $\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_r$ les poids de la structure parabolique induite sur S ; rappelons que celle-ci est donnée par la filtration induite

$$F_1E_P \cap S_P \supset F_2E_P \cap S_P \supset F_3E_P \cap S_P \supset \cdots$$

et les poids sont les mêmes mais avec multiplicité différente. Soit

$(s_1, \dots, s_r)$ une base locale C^∞ de sections de S au voisinage de P qui respecte le drapeau, soit $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_\ell)$ une base adaptée pour (E, h), notons $\sigma_i = s_i/|z|^{\beta_i}$, alors le lemme précédent nous indique que la matrice des coefficients de (σ_i) dans la base h-orthonormale (ϵ_j) est dans D_2^p et que les normes $h(\sigma_i, \sigma_i)$ sont non nulles en zéro (dans un sens adéquat). Cela implique que l'orthonormalisation de la base (σ_i) par le procédé de Gram-Schmidt peut se faire avec des coefficients dans D_2^p ; la proposition en résulte.

En réalité, cette proposition n'est qu'une forme plus simple du théorème suivant, qui se démontre de manière identique. Rappelons auparavant quelle est la structure parabolique induite au quotient. Si S est un sous-fibré de E et $Q = E/S$, alors, en notant π la projection sur le quotient, le drapeau sur Q_P est

$$\pi(F_1 E_P) \supset \pi(F_2 E_P) \supset \pi(F_3 E_P) \supset \cdots$$

et les poids sont les mêmes avec les nouvelles multiplicités déduites du drapeau.

THÉORÈME 2.12. — *Si S est un sous-fibré de E et h est adaptée, alors il existe une base adaptée (ϵ_i) de (E, h), qui est une réunion*

$$\{\epsilon_i\} = \{\epsilon_{i'}\} \cup \{\epsilon_{i''}\}$$

telle que $(\epsilon_{i'})$ soit une base adaptée de (S, h) et, notant π la projection $E \to E/S$, $(\pi(\epsilon_{i''}))$ soit une base adaptée de $(E/S, h)$.

Démonstration. — On choisit une base (s_i) de S respectant le drapeau, une base (e_i) de E respectant le drapeau et on complète (s_i) par des éléments de (e_i) choisis avec les poids les plus grands possibles pour obtenir une base de E respectant le drapeau de E et les drapeaux de S et E/S. Il ne reste plus qu'à orthonormaliser cette base comme dans la proposition précédente. Le théorème en découle.

Ce théorème permet de comprendre comment traiter le problème de l'extension pour les fibrés paraboliques : c'est le pas nécessaire pour faire marcher la récurrence dans la démonstration du THÉORÈME 2.5.

Supposons h adaptée sur $\mathcal{E}$ et

$$0 \to \mathcal{S} \to \mathcal{E} \to \mathcal{Q} \to 0,$$

alors la connexion de Chern A sur $\mathcal{E}$ se décompose

$$A = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}} & \varphi \\ -\varphi^{*_h} & A_{\mathcal{Q}} \end{pmatrix}$$

où $\varphi \in \Omega^{0,1}(\mathrm{Hom}(\mathcal{Q}, \mathcal{S}))$.

Dans une base adaptée à $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Q}$ au sens du THÉORÈME 2.12, on voit que les objets induits par la connexion A se comportent bien, i.e. $A_{\mathcal{S}} \in \mathcal{A}^p$, $A_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{A}^p$ et $\varphi \in D_1^p(\operatorname{Hom}(\mathcal{Q},\mathcal{S}))$. Réciproquement, la donnée de $A_{\mathcal{S}}$, $A_{\mathcal{Q}}$ et φ dans ces espaces détermine bien une connexion $A \in \mathcal{A}^p$.

Rappelons, en notant (β_i) et (γ_j) les poids respectifs de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{Q}$, que $\rho \in D_2^p(\operatorname{Hom}(\mathcal{Q},\mathcal{S}))$ signifie que, dans la base adaptée, on a :

$$\rho_i^j \in \begin{cases} L_2^p & \text{si } \beta_i = \gamma_j, \\ W_2^p & \text{si } \beta_i \neq \gamma_j. \end{cases}$$

PROPOSITION 2.13.

Si $A_{\mathcal{S}} \in \mathcal{A}^p(\mathcal{S})$, $A_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{A}^p(\mathcal{Q})$ *et* $\varphi \in D_1^p(\operatorname{Hom}(\mathcal{Q},\mathcal{S}) \otimes \Omega^{0,1})$, *alors il existe* $\rho \in D_2^p(\operatorname{Hom}(\mathcal{Q},\mathcal{S}))$ *tel que*

$$(\bar\partial_{A_{\mathcal{Q}}A_{\mathcal{S}}})^* \left(\varphi + \bar\partial_{A_{\mathcal{Q}}A_{\mathcal{S}}}\rho\right) = 0,$$

i.e., on peut choisir dans D_1^p *un représentant harmonique de la classe d'extension.*

Démonstration. — Il s'agit de comprendre l'opérateur $\bar\partial_{A_{\mathcal{Q}}A_{\mathcal{S}}}$ qui agit sur les sections de $\operatorname{Hom}(\mathcal{Q},\mathcal{S})$ par

$$\bar\partial_{A_{\mathcal{Q}}A_{\mathcal{S}}} u = \bar\partial_{A_{\mathcal{S}}} \circ u - u \circ \bar\partial_{A_{\mathcal{Q}}}.$$

Si nous nous plaçons dans une base adaptée au sens du THÉORÈME 2.12, on peut écrire localement

$$\begin{aligned} \bar\partial_{A_{\mathcal{S}}} &= \bar\partial - \tfrac12 \beta \frac{\mathrm{d}\bar z}{\bar z} + a_1, \\ \bar\partial_{A_{\mathcal{Q}}} &= \bar\partial - \tfrac12 \gamma \frac{\mathrm{d}\bar z}{\bar z} + a_2, \end{aligned}$$

avec $a_1 \in D_1^p(\operatorname{End}\mathcal{S})$ et $a_2 \in D_1^p(\operatorname{End}\mathcal{Q})$. Donc

$$\bar\partial_{A_{\mathcal{Q}}A_{\mathcal{S}}} u = \bar\partial u - \tfrac12 \big((\beta_i - \gamma_j)u_{ij}\big) \frac{d\bar z}{\bar z} + a_1 u - u a_2.$$

Comme l'opérateur

$$(*) \qquad (\bar\partial_{A_{\mathcal{Q}}A_{\mathcal{S}}})^* \bar\partial_{A_{\mathcal{Q}}A_{\mathcal{S}}} : D_2^p(\operatorname{Hom}(\mathcal{Q},\mathcal{S})) \longrightarrow L^p(\operatorname{Hom}(\mathcal{Q},\mathcal{S}))$$

est autoadjoint, la proposition résultera du fait qu'il est Fredholm, d'indice nul. Pour cela, comme dans la PROPOSITION 2.8, on peut supposer que

$a_1 = 0$ et $a_2 = 0$. Ensuite on vérifie facilement que la condition (5) pour que

$$(**) \qquad (\bar\partial_{A_Q A_S})^* \bar\partial_{A_Q A_S} : W_2^p(\mathrm{Hom}(\mathcal{Q},\mathcal{S})) \longrightarrow L^p(\mathrm{Hom}(\mathcal{Q},\mathcal{S}))$$

soit Fredholm s'écrit $\delta + \alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z}$. Notre poids $\delta = 2 - 2/p$ convient donc, comme conviendrait tout poids appartenant à $]0, 2 - 2/p]$. Le THÉORÈME 7.4 de [6] permet alors de calculer l'indice de $(**)$. On trouve immédiatement $-\#\{(i,j), \beta_i = \gamma_j\}$, ce qui est justement l'opposé de la codimension de $W_2^p(\mathrm{Hom}(\mathcal{Q},\mathcal{S}))$ dans $D_2^p(\mathrm{Hom}(\mathcal{Q},\mathcal{S}))$: donc l'indice de (*) est nul. $\square$

Remarque. — De la même manière, on peut montrer l'assertion suivante. Soit $A \in \mathcal{A}^p$, considérons l'opérateur

$$D_A^* D_A : D_2^p(\mathrm{End}\, E) \longrightarrow L^p(\mathrm{End}\, E).$$

On a une décomposition orthogonale pour le produit scalaire L^2

$$D_2^p = \ker(D_A^* D_A) \oplus \mathrm{im}(D_A^* D_A).$$

2.3. Démonstration du théorème d'existence 2.5.

Les résultats des sections précédentes permettent, moyennant quelques modifications, d'étendre la démonstration classique de DONALDSON [2] au cas parabolique que nous traitons ici.

Nous nous plaçons donc sur un fibré parabolique E muni d'une métrique adaptée. Commençons par donner le théorème de compacité global : la démonstration est identique à celle de [12, théorème 3.6], mais en s'appuyant sur notre THÉORÈME local 1.5 pour l'ouvert contenant le point parabolique.

THÉORÈME 2.14 (Compacité Globale). — *Si une suite de connexions $A_i \in \mathcal{A}^p$ vérifie $\|F(A_i)\|_{L^p} \le B$, alors il existe une sous-suite (A_j) et des transformations de jauge $g_j \in \mathcal{G}^p$ telles que $g_j(A_j)$ converge faiblement dans $\mathcal{A}^p$ vers une connexion A vérifiant $\|F(A)\|_{L^p} \le B$.*

Soit $\mu = \mu(E)$. On définit une fonctionnelle J sur $\mathcal{A}^p$ qui est à peu près la norme L^p de la courbure (et en tout cas lui est équivalente). Il s'agit de

$$J(A) = \Big(\int \nu\Big(\frac{*F}{2\pi i} + \mu\Big)^p \Big)^{1/p}$$

où $\nu(M) = \mathrm{tr}[(M^*M)^{1/2}]$.

Nous nous donnons une structure holomorphe $\mathcal{E}$ sur E et nous voulons minimiser J dans l'orbite $O(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$ sous $\mathcal{G}^p$. Soit A la connexion de Chern de $\mathcal{E}$. A l'aide du THÉORÈME de compacité 2.14, on voit comme dans [2, lemme 1] qu'il existe une suite minimisante (A_i) dans l'orbite de A qui converge faiblement dans $\mathcal{A}^p$ vers une connexion B qui vérifie $J(B) \leq \inf J_{|O}(A)$. En utilisant la PROPOSITION 2.8, on voit qu'en fait on peut supposer B lisse sur X, définissant un fibré holomorphe $\mathcal{F}$ et vérifiant

$$\inf J_{|O}(\mathcal{F}) \leq \inf J_{|O}(\mathcal{E}).$$

Choisissons $q > 2$ vérifiant $1/q > 1/p - 1/2$, on va montrer (comparer avec [2, lemme 1]) que l'opérateur

$$(*) \qquad \bar{\partial}_{AB} : D_1^q(\operatorname{End} E) \longrightarrow L^q\big(\Omega^{0,1} \otimes \operatorname{End} E\big)$$

a un noyau non trivial, parce qu'il est en un sens faible la limite des opérateurs $\bar{\partial}_{AA_i}$ qui ont un noyau non trivial par hypothèse (la transformation de jauge g_i envoyant A sur A_i). En effet, posons $a_i = B - A_i$, donc, comme on a une injection compacte $D_1^p \subset L^q$, $a_i \to 0$ dans L^q ; comme $\bar{\partial}_{AB} g_i + [a_i, g_i] = 0$, on a (les constantes étant sous-entendues)

$$\big\|\bar{\partial}_{AB} g_i\big\|_{L^q} \leq \|a_i\|_{L^q} \, \|g_i\|_{D_1^q} \leq \varepsilon_i \, \|g_i\|_{D_1^q},$$

avec $\varepsilon_i \to 0$, ce qui prouve bien que (*), qui est Fredholm, ne saurait être injectif.

Soit $g \in D_1^q(\operatorname{End} E)$ non nul dans le noyau de l'opérateur $\bar{\partial}_{AB}$, alors g fournit un morphisme (holomorphe) $\mathcal{E}_{|X} - \{P\} \to \mathcal{F}_{|X} - \{P\}$ qui, comme on va le voir, s'étend même au point parabolique et respecte le drapeau.

Rappelons-nous que, si (e_i) est une base respectant le drapeau, alors $(\epsilon_i) = (e_i/|z|^{\alpha_i})$ est une base adaptée pour E ; si $g = (g_{ij})$ dans la base (e_i), alors, dans la base (ϵ_i), on a

$$g = \big(|z|^{\alpha_i - \alpha_j} g_{ij}\big) \in D_1^q \subset C^0,$$

donc on voit que $g = \mathrm{o}(1/z)$, donc g est holomorphe en P. De plus, pour $\alpha_j > \alpha_i$, $|z|^{\alpha_i - \alpha_j} g_{ij}$ est continue, donc $g_{ij}(0) = 0$.

On a ainsi construit sur E une structure holomorphe $\mathcal{F}$ et un morphisme non trivial $g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ avec $\inf J_{|O}(\mathcal{F}) \leq \inf J_{|O}(\mathcal{E})$. On a comme dans [2, partie 4] une factorisation de g (comme morphisme de fibrés holomorphes) :

$$(**)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \Big\downarrow g & & \Big\downarrow f & & \\ 0 & \longleftarrow & \mathcal{N} & \longleftarrow & \mathcal{F} & \longleftarrow & \mathcal{M} & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

avec les lignes exactes, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{M}$ de même rang, $\det(f)$ non identiquement nulle. Comme g respecte la structure parabolique, f aussi.

La seule chose qui *a priori* ne s'étende pas est l'inégalité

$$\deg \operatorname{par}(\mathcal{Q}) \leq \deg \operatorname{par}(\mathcal{M}),$$

mais elle résulte du théorème d'annulation suivant.

THÉORÈME 2.15. — *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux fibrés paraboliques de même rang sur (X, P), tels que* $\deg \operatorname{par}(\mathcal{E}) > \deg \operatorname{par}(\mathcal{F})$. *Alors il n'existe pas de morphisme de fibrés paraboliques $g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ avec* $\det(g)$ *non identiquement nulle.*

Pour le démontrer, nous commençons par un lemme combinatoire.

LEMME 2.16. — *Supposons*

$$0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_r < 1 \quad et \quad 0 \leq \beta_1 \leq \cdots \leq \beta_r < 1\,;$$

soit $m(X) = (m^i_j(X))$ une (r,r)-matrice à coefficients dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[X]]$, *telle que*

$$si \quad \alpha_i > \beta_j, \quad alors \quad m^i_j(0) = 0.$$

Dans ces conditions, $X^{[\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_j]}$ divise $\det m(X)$, *où $[x]$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal au réel x.*

Démonstration. — Il n'y a quelque chose à démontrer que dans le cas

$$\sum \alpha_i > \sum \beta_j.$$

On raisonne par récurrence sur r. Pour $r = 1$, c'est évident : si $\alpha_1 > \beta_1$ alors $m^1_1(0) = 0$ et on peut donc factoriser X dans $\det m = m^1_1$. Supposons le résultat acquis jusqu'à $(r-1)$, supposons que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i > \sum_{j=1}^{r} \beta_j$. Soit r' le plus petit indice tel que

$$\sum_{i=0}^{r'} \alpha_i > \sum_{i=0}^{r'} \beta_i,$$

donc on a $\alpha_{r'} > \beta_{r'}$. Cela implique que, pour $i \geq r'$ et $j \leq r'$, on a $m_j^i(0) = 0$. Par conséquent,

$$\det m = \det(m_j^i)_{i,j<r'} \, m_{r'}^{r'} \, \det(m_j^i)_{i,j>r'}$$

d'où l'on déduit que $X^{1+[\Sigma_{i>r'}\alpha_i - \Sigma_{j>r'}\beta_j]}$ divise $\det(m)$; le résultat en découle. ▯

Démonstration du théorème 2.15. — Soient r le rang de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, $(\alpha_i)_{1\leq i\leq r}$ et $(\beta_i)_{1\leq i\leq r}$ les poids des structures paraboliques. Soit $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme. Nous regardons $s = \Lambda^r g$ comme une section du fibré en droites $\mathcal{L} = (\Lambda^r \mathcal{E})^* \otimes \Lambda^r \mathcal{F}$, que l'on peut considérer comme muni d'une "structure parabolique" avec poids $\kappa = \sum \beta_i - \sum \alpha_i$ (ce poids n'est pas compris entre 0 et 1). Son degré parabolique est alors

$$\deg \operatorname{par}(\mathcal{F}) - \deg \operatorname{par}(\mathcal{E}) < 0.$$

Supposons-le trivialisé près du point parabolique P ; la métrique $h_0(z) = |z|^{2\kappa}$ de l'exemple 2.4, convenablement prolongée sur X, est donc adaptée à $\mathcal{L}$. En la multipliant par e^{2u}, $u \in C^\infty(X)$, on peut rendre $i * F$ constante (u doit être solution de l'équation $i * F_0 + \Delta u =$ constante) : on obtient donc une métrique adaptée h, à courbure constante strictement négative, puisque par la PROPOSITION 2.9, on a :

$$\frac{i}{2\pi} \int F^h = \deg \operatorname{par}(\mathcal{L}) < 0.$$

D'autre part, on a une formule de Weitzenböck appliquée à la section holomorphe s de $\mathcal{L}$:

$$-\bar{\partial}(h(\partial s, s)) = h(\partial s, \partial s) - h(Fs, s).$$

D'après le lemme précédent, s s'annule à l'ordre $[-\kappa]$, ce qui implique que $h(\partial s, s) \in L_1^p$ pour $p > 1$ assez petit. Quand on intègre sur X, le premier membre est donc nul et si la courbure est strictement négative, on obtient $s = 0$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Revenons à la factorisation (**). Il est facile de voir que l'on a une filtration de Harder–Narasimhan pour tout fibré parabolique [9, p. 70, théorème 8] et un théorème de Jordan–Hölder pour tout fibré parabolique semi-stable [9, p. 70, théorème 12].

Compte tenu des théorèmes de la section précédente, la partie 4 de [2] s'étend alors facilement. On en déduit que si le théorème est vrai pour les fibrés de rang inférieur strictement au rang de $\mathcal{E}$, alors le fibré $\mathcal{F}$ construit par minimisation est nécessairement dans l'orbite de $\mathcal{E}$.

Le théorème doit donc être démontré par récurrence sur le rang du fibré $\mathcal{E}$ (le cas du rang 1 étant facile).

Le raisonnement précédent montre que la fonctionnelle J peut être minimisée dans l'orbite de $\mathcal{E}$. La fin de la démonstration est standard : on montre facilement, parce qu'on a une théorie de Hodge pour l'opérateur $D_A^* D_A$ et que le fibré est *paraboliquement* indécomposable, que le minimum est nul ; la connexion fabriquée est donc de Yang-Mills, ce qui permet, grâce au THÉORÈME 1.5, par des méthodes de régularité elliptique, de la mettre dans une jauge où elle est lisse. Enfin, l'unicité découle d'un principe de maximum.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M.F.) and BOTT (R.). — *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, t. **308**, 1982, p. 523—615.

[2] DONALDSON (S.K.). — *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Differential Geom., t. **18**, 1983, p. 269—277.

[3] DONALDSON (S.K.). — *Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. (3), t. **50**, 1985, p. 1—26.

[4] DONALDSON (S.K.). — *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math., t. **54**, 1987, p. 231—247.

[5] HITCHIN (N.J.). — *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc.(3), t. **55**, 1987, p. 59—126.

[6] LOCKART (R.B.) and MCOWEN (R.C.). — *Elliptic differential operators on noncompact manifolds*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.(4), t. **12**, 1985, p. 409—447.

[7] MEHTA (V.B.) and SESHADRI (C.S.). — *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures*, Math. Ann., t. **248**, 1980, p. 205—239.

[8] NARASIMHAN (M.S.) and SESHADRI (C.S.). — *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. Math.(2), t. **82**, 1965, p. 540—567.

[9] SESHADRI (C.S.). — *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Astérisque, t. **96**, 1982.

[10] SIMPSON (C.T.). — *Contructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization*, J. Amer. Math. Soc., t. **1**, 1988, p. 867—918.

[11] SIMPSON (C.T.). — *Harmonic bundles on noncompact curves*, J. Amer. Math. Soc., t. **3**, 1990, p. 713—770.

[12] UHLENBECK (K.K.). — *Connections with L^p bounds on curvature*, Comm. Math. Phys., t. **83**, 1982, p. 31—42.

[13] UHLENBECK (K.K.) and YAU (S.T.). — *On the existence of Hermitian Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Comm. Pure Appl. Math., t. **39-S**, 1986, p. 257—293.