

BULLETIN DE LA S. M. F.

F. PATRAS

**Construction géométrique des idempotents
eulériens. Filtration des groupes de polytopes et
des groupes d'homologie de Hochschild**

Bulletin de la S. M. F., tome 119, n° 2 (1991), p. 173-198

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_2_173_0

© Bulletin de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE
DES IDEMPOTENTS EULÉRIENS.
FILTRATION DES GROUPES DE POLYTOPES ET
DES GROUPES D'HOMOLOGIE DE HOCHSCHILD**

PAR

F. PATRAS (*)

RÉSUMÉ. — Il est possible de démontrer, par des méthodes entièrement géométriques, l'existence d'une famille d'idempotents orthogonaux dans l'algèbre $\mathbb{Q}[S_n]$, ainsi que certaines propriétés remarquables de ces idempotents (comme la commutativité au bord de Hochschild abstrait). Ces résultats reposent sur l'étude de l'action des homothéties dans des groupes de polytopes.

Ils permettent de retrouver, à la manière de constructions dues à J.-L. Loday, la filtration des groupes d'homologie de Hochschild d'une algèbre commutative à coefficients dans un bimodule symétrique.

ABSTRACT. — We prove, through geometrical means, the existence of a family of orthogonal idempotents in the algebra $\mathbb{Q}[S_n]$. We also establish some properties of these idempotents (commutativity with Hochschild's abstract boundary, for example).

Applying this, and following ideas of J.-L. Loday, we construct the filtration of the Hochschild homology of a commutative algebra.

Introduction

Les travaux récents de Jean-Louis LODAY en homologie de Hochschild et en homologie cyclique [4] montrent l'importance de certaines propriétés de type combinatoire liées aux “battages de cartes” (ou “shuffles”). Lors d'une note récente [5], nous montrions comment il est possible de donner une application géométrique des calculs de [4] et de retrouver par l'intermédiaire des opérations combinatoires liées aux battages certains résultats classiques en théorie des polytopes. Le présent travail adopte le point

(*) Texte reçu le 28 juin 1990.

F. PATRAS, D.M.I., E.N.S., 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 5, France.

de vue opposé et montre entre autres comment établir, par des arguments élémentaires de géométrie simpliciale, les égalités combinatoires de [4].

L'idée fondamentale reste celle de [5] : faire opérer le n -ième groupe symétrique S_n sur les simplexes ordonnés de dimension n . Si l'on définit ces opérations sur des groupes de polytopes bien choisis, certains calculs sur l'algèbre sur les rationnels du groupe S_n peuvent s'effectuer de manière purement géométrique.

Après avoir construit un modèle géométrique : "l'anneau des simplexes", nous permettant d'interpréter les calculs liés aux opérations de battage, nous nous attacherons successivement à établir quelques égalités liées à ces opérations, puis certaines propriétés d'éléments de $\mathbb{Q}[S_n]$ -les opérations d'Adams de [5], qui opèrent comme les homothéties sur l'anneau des simplexes et sont, au signe près les λ -opérations de [4]. Nous démontrons ainsi, entre autres, l'existence pour tout n d'une famille d'idempotents orthogonaux dans $\mathbb{Q}[S_n]$ permettant d'obtenir une décomposition en somme directe de tout groupe muni d'une structure de $\mathbb{Q}[S_n]$ -module.

Par l'intermédiaire de raisonnements géométriques élémentaires dans une sous-catégorie CS de la catégorie des ensembles finis pointés, nous retrouvons la filtration des groupes d'homologie de Hochschild des algèbres commutatives établie dans [4]. Nous retrouvons également la décomposition du groupe des polytopes d'un espace euclidien établie dans [5].

De fait, une fois effectuée la construction de l'anneau des simplexes, ces différents résultats découlent tous des propriétés élémentaires des homothéties.

Je tiens tout particulièrement à remercier Pierre CARTIER, pour ses indications quant à la manière d'interpréter certains résultats combinatoires à l'aide de modèles simpliciaux, ainsi que pour ses nombreux conseils lors de l'élaboration de cet article.

Ce dernier est divisé en quatre parties :

- I. L'anneau des simplexes Δ_\bullet .
- II. Décompositions et opérations sur Δ_\bullet .
- III. Filtration de l'anneau des simplexes.
- IV. Catégorie CS et applications.

I. L'anneau des simplexes Δ_\bullet .

Ce paragraphe a pour fondement les idées de HADWIGER [3] : celui-ci s'intéressant à la théorie des polytopes dans des espaces affines réels à été amené à établir certaines propriétés d'un produit géométrique, le produit de Minkowski [3, I.2.2]. Ce produit s'interprète facilement en termes d'opérations de type combinatoire sur les simplexes, au travers de la notion de battage.

En fait si, plutôt que de s'intéresser comme HADWIGER à la théorie des polytopes, l'on cherche à établir de manière géométrique des propriétés de type combinatoire, il est profitable de définir ces opérations sur des groupes de polytopes à sommets dans certains sous-ensembles discrets des espaces affines réels. C'est là la motivation initiale de la construction de l'anneau des simplexes Δ_\bullet , quelque intérêt qu'il puisse par ailleurs présenter en lui-même.

I.1. Définitions préalables.

I.1.a. Groupes de polytopes. — Afin d'éviter par la suite toute ambiguïté, nous commençons par rappeler les définitions suivantes.

Soient M un espace affine réel de dimension n , et G un groupe de transformations affines de cet espace. On appelle *polytope convexe* de M tout sous-ensemble de M s'écrivant comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. Un polytope convexe est dit *dégénéré* (resp. *k-dégénéré*, où $k \leq n$) s'il est contenu dans un hyperplan affine de M (resp. dans un sous-espace affine de M de dimension $k - 1$).

Plus généralement, on appelle *polytope* de M toute réunion finie de polytopes convexes de M . Un polytope est dit *non-dégénéré* s'il contient un polytope convexe non-dégénéré.

Définissons alors le groupe $LP(M)$ comme le \mathbb{Q} -module libre sur l'ensemble des polytopes de M . On appellera *groupe de polytopes associé* à M et on notera $\mathcal{P}(M)$ le groupe quotient de $LP(M)$ par le sous \mathbb{Q} -module engendré par les éléments $(Q - \sum_{i=1}^n P_i)$ de $LP(M)$, n parcourant \mathbb{N}^* , tels que les polytopes P_i et Q appartiennent à $LP(M)$ et satisfassent à :

- i) Pour i, j distincts dans $[1, n]$, $P_i \cap P_j$ est un polytope dégénéré de M ;
- ii) $\bigcup_{i \in [1, n]} P_i = Q$.

L'action de G sur M induit une action de G sur $\mathcal{P}(M)$. On appellera *groupe de polytopes associé à M et G* , et on notera $\mathcal{P}(M, G)$, le groupe $H_0(G, \mathcal{P}(M))$.

REMARQUE 1. — On rappelle que, si H est un groupe et L un $\mathbb{Z}H$ -module à gauche, $H_0(H, L)$ désigne le groupe quotient de L par le sous- $\mathbb{Z}H$ -module engendré par les éléments $\ell - h \cdot \ell$, où h parcourt H et ℓ parcourt L .

Si P est un polytope de M , nous noterons désormais $[P]$ sa classe dans $\mathcal{P}(M)$ (ou éventuellement dans $\mathcal{P}(M, G)$). Remarquons que si P est un polytope dégénéré, sa classe $[P]$ est nulle, compte tenu des relations i) et ii).

I.1.b. Polytopes orientés. — Nous aurons par la suite à parler de polytopes orientés. Choisissons une base ordonnée (e_1^n, \dots, e_n^n) de M , et fixons sur M l'orientation définie par cette base ordonnée. Nous appellerons *polytope orienté* de M la donnée d'un polytope P et d'une orientation de l'espace. Si cette orientation coïncide avec l'orientation fixée sur M , nous dirons que P est orienté positivement ; nous dirons que P est orienté négativement dans le cas contraire.

En d'autres termes, la donnée d'un polytope orienté de M équivaut à la donnée d'un couple (P, ε) , où P est un polytope et ε un élément de $\{-1, 1\}$, avec la convention : $\varepsilon = 1$ si l'orientation est positive, $\varepsilon = -1$ sinon.

Considérons l'application :

$$LP(M) \times \{-1, 1\} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{P}(M, G) \\ (P, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \cdot [P] ;$$

elle permet d'associer à tout polytope orienté un élément de $\mathcal{P}(M, G)$. Par abus, si P est un polytope de M , nous appellerons l'élément $-[P]$ de $\mathcal{P}(M, G)$: la classe dans $\mathcal{P}(M, G)$ du polytope P affecté d'une orientation négative.

I.1.c. Simplexes. — Un k -simplexe de M est un polytope enveloppe convexe de $k + 1$ points de M . Un k -simplexe ordonné est alors défini par la donnée d'une suite ordonnée de $k + 1$ points (x_0, \dots, x_k) ou, de manière équivalente, par la donnée d'un point et d'une suite ordonnée de k vecteurs — qui représentent les arêtes successives du k -simplexe : $(x_0 / \overline{x_0 x_1} / \dots / \overline{x_{k-1} x_k})$.

Le k -simplexe sous-jacent à un k -simplexe ordonné est, par définition l'enveloppe convexe des $(k + 1)$ points qui définissent ce simplexe.

Soit maintenant (x_0, \dots, x_n) un n -simplexe ordonné non-dégénéré ; la suite de vecteurs $(\overline{x_0 x_1}, \dots, \overline{x_{n-1} x_n})$ définit une orientation de M ; tout n -simplexe ordonné peut donc être considéré comme un simplexe orienté.

La classe dans $\mathcal{P}(M, G)$ d'un n -simplexe ordonné S , que nous noterons $[S]$, est donnée par la classe du simplexe sous-jacent affecté de l'orientation du n -simplexe ordonné S .

I.2. Triangulation du cube.

Nous travaillerons jusqu'à nouvel ordre dans le groupe des polytopes associé à \mathbb{R}^n et au groupe TE des translations entières de \mathbb{R}^n — c'est-à-dire le groupe des translations associées aux vecteurs de \mathbb{R}^n à coordonnées entières. Si P est un polytope, $[P]$ désignera donc la classe de P dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, TE)$.

Notons C_n le cube unité dans \mathbb{R}^n :

$$C_n = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid 0 \leq t_i \leq 1 \ \forall i \in [1, n]\}.$$

Si σ appartient à S_n , notons Q_σ^n le n -simplexe :

$$Q_\sigma^n = \{(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}) \mid 0 \leq t_n \leq t_{n-1} \leq \dots \leq t_1 \leq 1\};$$

Q_σ^n est le n -simplexe sous-jacent au n -simplexe ordonné P_σ^n :

$$(0/e_{\sigma^{-1}(1)}^n / \dots / e_{\sigma^{-1}(n)}^n);$$

où e_i^n désigne le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Si l'on désigne par $\text{sgn}(\sigma)$ la signature de la permutation σ de S_n , on a alors :

$$[P_\sigma^n] = \text{sgn}(\sigma) \cdot [Q_\sigma^n],$$

et

$$[C_n] = \sum_{\sigma \in S_n} [Q_\sigma^n] = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) [P_\sigma^n].$$

Nous noterons désormais Δ_n le sous- \mathbb{Q} -module de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, TE)$ engendré par $([P_\sigma^n])_{\sigma \in S_n}$.

Si t et t' sont deux translations de TE et σ et σ' deux permutations distinctes de S_n , $t \cdot Q_\sigma^n \cap t' \cdot Q_{\sigma'}^n$ est un polytope dégénéré de \mathbb{R}^n . Le groupe Δ_n est donc un \mathbb{Q} -module libre sur les classes $[Q_\sigma^n]$ non nulles des n -simplexes Q_σ^n .

L'application volume définit (à un scalaire près) un élément de $\text{Hom}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, TE), \mathbb{R})$. Comme les valeurs de cette application sur les classes $[Q_\sigma^n]$ sont non nulles, $[Q_\sigma^n]$ est non nul dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, TE)$ et Δ_n est un \mathbb{Q} -module libre de rang $n!$.

Par ailleurs, le morphisme \mathbb{Q} -linéaire I_n de $\mathbb{Q}[S_n]$ dans Δ_n induit par :

$$\sigma \mapsto [P_\sigma^n],$$

définit un isomorphisme de \mathbb{Q} -modules. Les applications

$$\tilde{\beta} : [P_\sigma^n] \mapsto [P_{\beta \cdot \sigma}^n],$$

pour β décrivant S_n , munissent Δ_n d'une structure de S_n -module, et I_n définit en fait un isomorphisme de $\mathbb{Q}[S_n]$ -modules.

I.3. Structure d'anneau.

Nous poserons $\Delta_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$, avec la convention : $\Delta_0 = \mathbb{Q}$. Si $m < n$, nous noterons $i_{m,n}$ l'application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n qui fait correspondre e_{i+n-m}^n à e_i^m . Définissons le produit des simplexes Q_σ^k et Q_β^ℓ comme le polytope de $\mathbb{R}^{k+\ell}$:

$$(1) \quad Q_\sigma^k \times Q_\beta^\ell = \{t + i_{\ell, k+\ell}(t') \in \mathbb{R}^{k+\ell} \mid t \in Q_\sigma^k, t' \in Q_\beta^\ell\}.$$

REMARQUE 2. — Si l'on identifie $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ à $\mathbb{R}^{k+\ell}$, $Q_\sigma^k \times Q_\beta^\ell$ désigne simplement le produit cartésien des simplexes Q_σ^k et Q_β^ℓ .

Si l'on pose maintenant

$$(2) \quad [Q_\sigma^k] \times [Q_\beta^\ell] = [Q_\sigma^k \times Q_\beta^\ell],$$

on définit par là une application \mathbb{Q} -bilinéaire de $\Delta_k \times \Delta_\ell$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{k+\ell}, TE)$. La PROPOSITION 2 montre que cette application est en fait à valeurs dans $\Delta_{k+\ell}$, et on a donc le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Le produit défini par les formules (1) et (2) munit Δ_\bullet d'une structure d'anneau.*

Rappelons maintenant qu'une permutation σ de $S_{k+\ell}$ est appelée un *battage* de coefficients (k, ℓ) si $\sigma(i) < \sigma(j)$ est vrai dès que $i < j \leq k$ ou $k < i < j$. Nous noterons $\text{Sh}(k, \ell)$ l'ensemble des battages de coefficients (k, ℓ) .

PROPOSITION 2. — *L'égalité suivante est vraie dans $\Delta_{k+\ell}$:*

$$(3) \quad [Q_1^k] \times [Q_1^\ell] = \sum_{\gamma \in \text{Sh}(k, \ell)} [Q_\gamma^{k+\ell}].$$

En effet :

$$\begin{aligned} Q_1^k \times Q_1^\ell &= \{(t_1, t_2, \dots, t_{k+\ell}) \mid \\ &\quad (t_1, \dots, t_k) \in Q_1^k; (t_{k+1}, \dots, t_{k+\ell}) \in Q_1^\ell\} \\ &= \{(t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+\ell}) \mid \\ &\quad 0 \leq t_k \leq \dots \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_{k+\ell} \leq \dots \leq t_{k+1} \leq 1\}. \end{aligned}$$

Le polytope de $\mathbb{R}^{k+\ell}$ ainsi obtenu se décompose en simplexes de type $Q_\sigma^{k+\ell}$. L'ensemble des simplexes de cette décomposition est paramétré par les bijections de $[1, k+\ell]$ dans $[1, k+\ell]$ dont les restrictions à $[1, k]$ et $[k+1, k+\ell]$ sont croissantes.

En d'autres termes, cette décomposition est paramétrée par les battages de coefficients (k, ℓ) et

$$\begin{aligned} Q_1^k \times Q_1^\ell &= \bigcup_{\gamma \in \text{Sh}(k, \ell)} \left\{ (t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+\ell}) \mid \right. \\ &\quad \left. 0 \leq t_{\gamma^{-1}(k+\ell)} \leq \dots \leq t_{\gamma^{-1}(1)} \leq 1 \right\} \\ &= \bigcup_{\gamma \in \text{Sh}(k, \ell)} Q_\gamma^{k+\ell}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$[Q_1^k] \times [Q_1^\ell] = \sum_{\gamma \in \text{Sh}(k, \ell)} [Q_\gamma^{k+\ell}]$$

et

$$[P_1^k] \times [P_1^\ell] = \sum_{\gamma \in \text{Sh}(k, \ell)} \text{sgn}(\gamma) \cdot [P_\gamma^{k+\ell}].$$

Notons maintenant \star l'application de $S_k \times S_\ell$ dans $S_{k+\ell}$ telle que

$$(\sigma \star \beta)(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i \leq k, \\ \beta(i - k) + k & \text{si } i > k. \end{cases}$$

On vérifie de la même manière le résultat suivant :

$$Q_\sigma^k \times Q_\beta^\ell = \bigcup_{\gamma \in \text{Sh}(k, \ell)} Q_{\gamma \cdot (\sigma \star \beta)}^{k+\ell}.$$

PROPOSITION 3. — Dans Δ_\bullet , le produit des simplexes est donné par les formules suivantes :

$$(4) \quad [Q_\sigma^k] \times [Q_\beta^\ell] = \sum_{\gamma \in \text{Sh}(k, \ell)} [Q_{\gamma \cdot (\sigma \star \beta)}^{k+\ell}],$$

$$(5) \quad [P_\sigma^k] \times [P_\beta^\ell] = \sum_{\gamma \in \text{Sh}(k, \ell)} \text{sgn}(\gamma) \cdot [P_{\gamma \cdot (\sigma \star \beta)}^{k+\ell}].$$

Posons $S_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}[S_n]$. Compte tenu des isomorphismes I_n de I.2, la structure d'anneau de Δ_\bullet permet de munir S_\bullet d'une multiplication \times et d'une structure d'anneau. Nous appellerons $(S_\bullet, +, \times)$ *l'anneau géométrique* du groupe symétrique pour différencier cette structure de la structure usuelle $(S_\bullet, +, \star)$. Nous noterons \cdot la multiplication usuelle dans le groupe symétrique S_n .

REMARQUE 3. — Si $(\sigma, \beta) \in S_k \times S_\ell$, nous aurons donc, par définition :

$$(6) \quad \sigma \times \beta = \sum_{\gamma \in \text{Sh}(k, \ell)} \text{sgn}(\gamma) \cdot \gamma \cdot (\sigma \star \beta).$$

II. Décompositions et opérations sur Δ_\bullet .

L'anneau Δ_\bullet étant défini à l'aide de groupes de polytopes, les homothéties à coefficients entiers opèrent sur Δ_\bullet . Notons Ψ^k l'opération sur Δ_\bullet induite par l'homothétie de rapport k . Compte tenu des propriétés géométriques des homothéties, Ψ^k définit un endomorphisme de l'anneau Δ_\bullet .

Par abus, l'opération induite par l'homothétie de rapport k sur les polytopes et sur les différents groupes $\mathcal{P}(M, G)$ sera également notée Ψ^k .

L'opérateur Ψ^k stabilise la décomposition $\Delta_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$; nous noterons Ψ_i^k sa restriction à Δ_i .

II.1. Premières décompositions.

Nous renvoyons à [3, I.2.6] pour une représentation géométrique des calculs qui vont suivre.

PROPOSITION 4. — *On a les relations suivantes :*

$$(7) \quad \Psi^k \circ \Psi^\ell = \Psi^\ell \circ \Psi^k = \Psi^{k \cdot \ell}$$

$$(8) \quad \Psi^{k+\ell}([Q_1^i]) = \sum_{r+s=i} \Psi^k([Q_1^r]) \times \Psi^\ell([Q_1^s]).$$

La formule (7) est évidente, par définition des Ψ^k .

La formule (8) est la conséquence de la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
 \Psi^{k+\ell}(Q_1^i) &= \{(t_1, \dots, t_i) \mid 0 \leq t_i \leq \dots \leq t_1 \leq k + \ell\} \\
 &= \bigcup_{j \leq i} \{(t_1, \dots, t_i) \mid 0 \leq t_i \leq \dots \leq t_{j+1} \leq k \leq t_j \leq \dots \leq t_1 \leq k + \ell\} \\
 &= \bigcup_{j \leq i} \{(k + t_1, \dots, k + t_j, t_{j+1}, \dots, t_i) \mid 0 \leq t_i \leq \dots \leq t_{j+1} \leq k; \\
 &\quad 0 \leq t_j \leq \dots \leq t_1 \leq \ell\}.
 \end{aligned}$$

Comme par ailleurs le polytope

$$\{(k + t_1, \dots, k + t_j, t_{j+1}, \dots, t_i) \mid 0 \leq t_i \leq \dots \leq t_{j+1} \leq k; 0 \leq t_j \leq \dots \leq t_1 \leq \ell\}$$

se déduit par translation du polytope :

$$\begin{aligned}
 \{(t_1, \dots, t_i) \mid 0 \leq t_i \leq \dots \leq t_{j+1} \leq k; 0 \leq t_j \leq \dots \leq t_1 \leq \ell\} \\
 = \Psi^k(Q_1^j) \times \Psi^\ell(Q_1^{i-j}),
 \end{aligned}$$

cette égalité se réécrit dans Δ_i sous la forme :

$$\Psi^{k+\ell}([Q_1^i]) = \sum_{j \leq i} \Psi^k([Q_1^j]) \times \Psi^\ell([Q_1^{i-j}]). \quad \square$$

PROPOSITION 5. — *Il existe dans $\mathbb{Z}[S_i]$ une famille d'éléments $({}^s\Psi_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$, telle que ${}^s\Psi_i^k$ opère comme Ψ_i^k sur Δ_i .*

Nous noterons ${}^s\Psi_i^k$ l'élément $I_i^{-1}(\Psi_i^k([P_1^i]))$ de $\mathbb{Z}[S_i]$ (I_i ayant été défini au I.2). Nous avons vu au I.2 que Δ_i est un $\mathbb{Z}[S_i]$ -module; ${}^s\Psi_i^k$ définit donc un opérateur dans Δ_i . Nous allons montrer que ${}^s\Psi_i^k$ opère comme Ψ_i^k dans Δ_i . Il suffit pour cela de prouver que, pour tout $\sigma \in S_i$, $\Psi_i^k([P_\sigma^i]) = {}^s\Psi_i^k([P_\sigma^i])$.

Notons $\Psi_i^k([P_1^i]) = \sum_{\beta \in S_i} c_\beta^{i,k} \cdot [P_\beta^i]$ la décomposition de $\Psi_i^k([P_1^i])$ dans Δ_i . Par définition, on a :

$${}^s\Psi_i^k = \sum_{\beta \in S_i} c_\beta^{i,k} \cdot \beta.$$

Il s'agit donc de prouver que $\Psi_i^k([P_\sigma^i])$ est égal à $\sum_{\beta \in S_i} c_\beta^{i,k} [P_{\beta \cdot \sigma}^i]$.

Remarquons pour cela qu'il existe pour tout i un morphisme de groupes ϕ_i de S_i dans $\text{GL}_i(\mathbb{R})$ qui, à toute permutation de $[1, i]$ associe la permutation correspondante des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^i :

$$\phi_i(\sigma) \cdot e_j = e_{\sigma(j)}.$$

Comme on a

$$\begin{aligned} Q_\sigma^i &= \left\{ \sum_{j=1}^i t_{\sigma(j)} e_j \mid 0 \leq t_i \leq \cdots \leq t_1 \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^i t_j \cdot e_{\sigma^{-1}(j)} \mid 0 \leq t_i \leq \cdots \leq t_1 \leq 1 \right\} \\ &= \phi_i(\sigma^{-1}) \cdot Q_1^i, \end{aligned}$$

et que les homothéties sont dans le centre de $M_i(\mathbb{R})$ (l'anneau des matrices $i \times i$ à coefficients réels), on a encore :

$$\Psi_i^k(Q_\sigma^i) = \Psi_i^k \circ \phi_i(\sigma^{-1})(Q_1^i) = \phi_i(\sigma^{-1}) \circ \Psi_i^k(Q_1^i).$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \phi_i(\sigma^{-1})(Q_\beta^i) &= \left\{ \sum_{j=1}^i t_{\beta(j)} \cdot e_{\sigma^{-1}(j)} \mid 0 \leq t_i \leq \cdots \leq t_1 \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^i t_{\beta \cdot \sigma(j)} \cdot e_j \mid 0 \leq t_i \leq \cdots \leq t_1 \leq 1 \right\} = Q_{\beta \cdot \sigma}^i; \end{aligned}$$

par conséquent, en notant encore $\phi_i(\sigma^{-1})$ l'opérateur sur Δ_i défini par :

$$\phi_i(\sigma^{-1})([Q_\beta^i]) = [Q_{\beta \cdot \sigma}^i],$$

on a l'égalité suivante dans Δ_i :

$$\begin{aligned} \Psi_i^k([P_\sigma^i]) &= \text{sgn}(\sigma) \cdot \phi_i(\sigma^{-1}) \circ \Psi_i^k([P_1^i]) \\ &= \text{sgn}(\sigma) \cdot \phi_i(\sigma^{-1}) \circ {}^s\Psi_i^k([P_1^i]) \\ &= \text{sgn}(\sigma) \cdot \phi_i(\sigma^{-1}) \cdot \left(\sum_{\beta} c_{\beta}^{i,k} [P_{\beta}^i] \right) \\ &= \sum_{\beta} c_{\beta}^{i,k} [P_{\beta \cdot \sigma}^i] = {}^s\Psi_i^k \cdot [P_{\sigma}^i], \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

Cette proposition nous permet de considérer désormais Ψ_i^k comme un élément de $\mathbb{Z}[S_i]$. Les relations suivantes sont donc vraies dans $(S_\bullet, +, \times)$:

$$(7\text{bis}) \quad \Psi_i^k \cdot \Psi_i^\ell = \Psi_i^{k \cdot \ell}$$

$$(8\text{bis}) \quad \Psi_i^{k+\ell} = \sum_{r+s=i} \Psi_r^k \times \Psi_s^\ell.$$

Notons maintenant Sh_i^k l'élément de $\mathbb{Z}[S_i]$ tel que :

$$(9) \quad \text{Sh}_i^k \cdot ([P_1^i]) = \sum [P_1^{j_1} \times \dots \times P_1^{j_k}],$$

où la somme porte sur tous les k -uplets $(j_\ell)_{\ell \in [1, k]}$ d'entiers non nuls tels que $j_1 + \dots + j_k = i$.

Nous allons établir certaines égalités entre les Ψ_i^k et les Sh_i^k , dont nous déduirons par la suite l'existence d'une famille d'idempotents orthogonaux dans $\mathbb{Q}[S_i]$.

L'anneau Δ_\bullet peut être plongé dans $\hat{\Delta}_\bullet = \prod_i \Delta_i$. La multiplication dans $\hat{\Delta}_\bullet$ est définie par

$$\sum_i [R^i] \times \sum_j [T^j] = \sum_n \left(\sum_{i+j=n} [R^i] \times [T^j] \right),$$

où $[R^i]$ et $[T^j]$ désignent respectivement des éléments de Δ_i et Δ_j . Définissons dans cet anneau P^\bullet et \tilde{P}^\bullet par les égalités :

$$P^\bullet = 1 + \tilde{P}^\bullet = \sum_{i \in \mathbb{N}} [P_1^i].$$

La formule (8) montre que :

$$\Psi^{k+\ell}(P^\bullet) = \Psi^k(P^\bullet) \times \Psi^\ell(P^\bullet),$$

et donc que :

$$\Psi^k(P^\bullet) = (P^\bullet)^k = (1 + \tilde{P}^\bullet)^k = \sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{k}{i} (\tilde{P}^\bullet)^i.$$

Par ailleurs, l'opérateur Ψ^k préserve la décomposition $\Delta_\bullet = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \Delta_i$. D'après la formule précédente et la définition de Sh_i^k , on a donc :

$$\Psi_i^k([P_1^i]) = \sum_{j \leq i} \binom{k}{j} \text{Sh}_i^j([P_1^i]).$$

D'où l'égalité dans $\mathbb{Z}[S_i]$:

$$(10) \quad \Psi_i^k = \sum_{j \leq i} \binom{k}{j} \text{Sh}_i^j.$$

COROLLAIRE 1. — *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une famille $(\Psi_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}[S_i]$, telle que :*

i) *L'application de Δ_\bullet dans Δ_\bullet qui coïncide avec Ψ_i^k sur Δ_i est un endomorphisme de l'anneau Δ_\bullet .*

ii) *On a les formules suivantes :*

$$\Psi_i^1 = 1, \quad \Psi_i^k \cdot \Psi_i^\ell = \Psi_i^{k+\ell}, \quad \Psi_i^k = \sum_{j \leq i} \binom{k}{j} \text{Sh}_i^j.$$

REMARQUE 4. — Les éléments Ψ_i^k et Sh_i^k que nous définissons sont très proches des λ -opérations et des shuffle-opérations de [4]. Toutefois, nous avons adopté des conventions de signes différentes de celles de J.-L. Loday. Nous donnons ici une table de correspondance entre les deux systèmes de conventions :

cet article	[4]
Ψ_i^k	$(-1)^{k-1} \lambda_i^k$
Sh_i^k	$(-1)^{k-1} \text{sh}_i^k$

II.2. Idempotents orthogonaux de $\mathbb{Q}[S_i]$.

D'après II.1, COROLLAIRE 1, on a :

$$\Psi_i^k = \sum_{j \leq i} \binom{k}{j} \text{Sh}_i^j;$$

donc, d'après la définition des nombres de Stirling de première espèce $s(j, p)$ (cf. [1]) :

$$\Psi_i^k = \sum_{1 \leq p \leq j \leq i} s(j, p) \cdot \frac{\text{Sh}_i^j}{j!} \cdot k^p = \sum_{p=1}^i \left[\sum_{j=p}^i s(j, p) \cdot \frac{\text{Sh}_i^j}{j!} \right] \cdot k^p.$$

Définissons alors pour $p \in [1, n]$:

$$(11) \quad e_i^p = \sum_{j=p}^i s(j, p) \cdot \frac{\text{Sh}_i^j}{j!}.$$

On a $\Psi_i^k = \sum_{p=1}^i k^p \cdot e_i^p$.

THÉOREME 1. — Les éléments $(e_i^p)_{1 \leq p \leq i}$ de $\mathbb{Q}[S_i]$ définissent une famille d'idempotents deux à deux orthogonaux de $\mathbb{Q}[S_i]$ de somme 1.

En effet, d'une part $\Psi^1 = 1$ et donc $1 = \sum_{p=1}^i e_i^p$.

D'autre part, $\Psi_i^m \cdot \Psi_i^\ell = \Psi_i^{m \cdot \ell}$ implique :

$$\left(\sum_{1 \leq p \leq i} e_i^p \cdot m^p \right) \cdot \left(\sum_{1 \leq p' \leq i} e_i^{p'} \cdot \ell^{p'} \right) = \sum_{1 \leq p \leq i} e_i^p \cdot (m \cdot \ell)^p.$$

Et donc

$$e_i^p \cdot e_i^{p'} = \delta_p^{p'} \cdot e_i^p.$$

COROLLAIRE 2. — Tout groupe M muni d'une structure de $\mathbb{Q}[S_i]$ -module se décompose sous l'action des idempotents orthogonaux $(e_i^p)_{1 \leq p \leq i}$ et Ψ_i^k opère sur $e_i^p \cdot M$ comme k^p .

REMARQUE 5. — Nous avons vu que Δ_i est muni d'une structure de $\mathbb{Q}[S_i]$ -module. Nous allons donner, dans le cas $i = 2$, une représentation de la décomposition de Δ_2 induite par les idempotents orthogonaux.

Si l'on note σ l'élément de S_2 différent de 1, le $\mathbb{Q}[S_2]$ -module Δ_2 est engendré par deux triangles, que nous noterons $[P_1^2]$ et $[P_\sigma^2]$. Le \mathbb{Q} -module Δ_2 est donc également engendré par les éléments $[P_1^2] + [P_\sigma^2]$ et $[P_1^2] - [P_\sigma^2]$, et l'on peut écrire :

$$\Delta_2 = \mathbb{Q}([P_1^2] - [P_\sigma^2]) \oplus \mathbb{Q}([P_1^2] + [P_\sigma^2]).$$

Nous allons montrer que cette décomposition coïncide avec la décomposition de Δ_2 comme $\mathbb{Q}[S_2]$ -module sous l'action des idempotents orthogonaux.

Donnons tout d'abord une représentation géométrique du groupe Δ_2 :

$$[P_1^2] = \triangle \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array} \quad [P_\sigma^2] = \triangle \begin{array}{c} \curvearrowleft \end{array} = - \triangle \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}.$$

Alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Psi_2^2 \cdot ([P_1^2] - [P_\sigma^2]) &= \Psi_2^2 \cdot \left(\left(\begin{array}{c} \square \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array} \end{array} \right) \right) = \left(\left(\begin{array}{c} \square \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array} \end{array} \right) \right) \\ &= 4 \cdot \left(\left(\begin{array}{c} \square \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array} \end{array} \right) \right) = 2^2 ([P_1^2] - [P_\sigma^2]); \end{aligned}$$

et, de la même manière :

$$\begin{aligned}
 \Psi_2^2 \cdot ([P_1^2] + [P_\sigma^2]) &= \Psi_2^2 \cdot \left(\begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} \right) \\
 &= \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} \\
 &= 2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} - 2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} = 2^2 ([P_1^2] + [P_\sigma^2]),
 \end{aligned}$$

d'où la décomposition annoncée.

COROLLAIRE 3. — *La signature de l'élément e_i^p de $\mathbb{Q}[S_i]$ est égale à δ_i^p .*

En effet, considérons le groupe Δ_i . Ce groupe est muni d'une structure de $\mathbb{Q}[S_i]$ -module. L'application Vol , qui associe à un polytope orienté son volume orienté, permet de définir un morphisme de groupes que nous noterons encore Vol de Δ_i dans \mathbb{Q} , avec la convention $\text{Vol}([P_1^i]) = 1$. Alors, si $\sigma \in S_i$, on a :

$$\text{Vol}(\sigma \cdot [P_1^i]) = \text{Vol}([P_\sigma^i]) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{Vol}([Q_\sigma^i]) = \text{sgn}(\sigma).$$

Par conséquent, pour tout k , on a :

$$\text{Vol}(\Psi_i^k \cdot [P_1^i]) = k^i$$

et, d'autre part :

$$\text{Vol}(\Psi_i^k \cdot [P_1^i]) = \text{Vol}\left(\sum_{p \leq i} k^p \cdot e_i^p \cdot [P_1^i]\right) = \sum_{p \leq i} \text{sgn}(e_i^p) \cdot k^p,$$

d'où le corollaire.

Nous noterons désormais e^p l'opérateur $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} e_i^p$ sur Δ_\bullet .

III. Filtration de l'anneau des simplexes

Les \mathbb{Q} -modules Δ_\bullet et S_\bullet se décomposent sous l'action des idempotents orthogonaux. Nous poserons

$$\Delta_\bullet^p = \bigoplus_{j \geq p} e^j \cdot \Delta_\bullet, \quad S_\bullet^p = \bigoplus_{j \geq p} e^j \cdot S_\bullet \quad \text{et} \quad S_\ell^p = \bigoplus_{\ell \geq j \geq p} e_\ell^j \cdot \mathbb{Q}[S_\ell].$$

Ce paragraphe cherche à donner une construction simple de la filtration :

$$\cdots \subset S_\bullet^{p+1} \subset S_\bullet^p \subset \cdots \subset S_\bullet.$$

REMARQUE 6. — Dans la mesure où les opérateurs e^j stabilisent la décomposition $S_\bullet = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}[S_\ell]$, cette construction permet de construire également la filtration :

$$\cdots \subset S_\ell^{p+1} \subset S_\ell^p \subset \cdots \subset S_\ell.$$

Soit alors M un $\mathbb{Q}[S_\ell]$ -module ; l'action des idempotents orthogonaux de $\mathbb{Q}[S_\ell]$ induit une filtration de M -associée à la décomposition de M donnée au COROLLAIRE 2. Cette filtration est définie par :

$$S_\ell^\ell \cdot M \subset S_\ell^{\ell-1} \cdot M \subset \cdots \subset S_1^2 \cdot M \subset S_\ell \cdot M = M.$$

La construction que nous allons donner permet donc d'obtenir des informations sur la filtration associée aux $\mathbb{Q}[S_\ell]$ -modules.

Définissons l'idéal J de $(S_\bullet, +, \times)$ par $J = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Q}[S_\ell]$ et posons $J_p = J \cap S_\bullet^p$. Définissons le groupe d'opérateurs $\tilde{\Phi}$ sur J comme la restriction à J du groupe d'opérateurs $\prod_{i \geq 1} \phi_i(S_i)$ sur $\prod_{i \geq 1} \mathbb{Q}[S_i]$, avec les notations de II.1 PROPOSITION 5, où l'on a identifié les groupes $\mathbb{Q}[S_k]$ et Δ_k à l'aide des isomorphismes I_k de I.2.

THÉORÈME 2. — Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $J_p = \tilde{\Phi}(J^p)$, où J^p désigne la puissance p -ième de l'idéal J .

Démonstration. — Il suffit en fait de prouver que, pour tout i , S_i^p est égal à la composante de degré i de $\tilde{\Phi}(J^p)$, que nous noterons \tilde{J}_i^p . Considérons tout d'abord l'inclusion $S_i^p \subset \tilde{J}_i^p$. Nous identifierons systématiquement dans la suite de cette démonstration les groupes Δ_i et $\mathbb{Q}[S_i]$, ainsi que tous les sous-groupes et sous-anneaux de Δ_\bullet et S_\bullet deux à deux

isomorphes. Par définition, $\Delta_i^p = \bigoplus_{j \geq p} e_i^j \cdot \Delta_i$. D'après la définition (11) des e_i^j , on a donc :

$$\Delta_i^p \subset \bigoplus_{j \geq p} \text{Sh}_i^j \cdot \Delta_i.$$

Or, si $\sigma \in S_i$, on a :

$$\text{Sh}_i^j \cdot ([P_\sigma^i]) = \text{Sh}_i^j \circ \phi_i(\sigma^{-1})([P_1^i]) = \phi_i(\sigma^{-1}) \circ \text{Sh}_i^j([P_1^i]),$$

puisque $\phi_i(\sigma^{-1})$ commute à Ψ_i^m pour tout m , et que, comme on a :

$$\Psi_i^m = \sum_{j \leq i} \binom{m}{j} \cdot \text{Sh}_i^j,$$

Sh_i^j peut s'écrire comme combinaison linéaire d'opérateurs Ψ_i^m .

Par ailleurs $\phi_i(\sigma^{-1}) \in \widetilde{\Phi}$ et, d'après la définition (9) de Sh_i^j , Sh_i^j appartient à J^j : on a donc finalement l'inclusion $S_i^p \subset \widetilde{J}_i^p$.

Réciproquement, soit $([P_j])_{j \leq k}$ une famille d'éléments de Δ_\bullet telle que $[P_j] \in \Delta_{d(j)}$, avec $d(j) \geq 1$ et $\sum_{j \leq k} d(j) = i$. Alors, on a :

$$\Psi_{d(j)}^\ell([P_j]) = \sum_{p=1}^{d(j)} \ell^p \cdot e_{d(j)}^p \cdot ([P_j]) ;$$

et par conséquent, pour tout $\sigma \in S_i$:

$$\begin{aligned} \Psi_i^\ell(\phi_i(\sigma) \cdot ([P_1] \times \cdots \times [P_k])) &= \phi_i(\sigma) \cdot \Psi_i^\ell([P_1] \times \cdots \times [P_k]) \\ &= \phi_i(\sigma) \{ \Psi_{d(1)}^\ell([P_1]) \times \cdots \times \Psi_{d(k)}^\ell([P_k]) \} \end{aligned}$$

est un polynôme en ℓ à coefficients dans Δ_\bullet divisible par ℓ^k . Le théorème est alors conséquence du COROLLAIRE 2.

IV. Catégorie CS et applications

D'après [4], le cadre idéal d'étude de la filtration de l'homologie de Hochschild associée aux idempotents orthogonaux est fourni par la catégorie des ensembles finis. Ayant été amené dans [5] à envisager les opérations combinatoires associées à ces filtrations comme des opérations géométriques, il est apparu qu'il était possible de donner une construction de cette filtration, ainsi que de la filtration de certains groupes de polytopes, par l'intermédiaire d'arguments fonctoriels liés à une catégorie dont les objets sont simpliciaux et les flèches des opérations géométriques.

Nous en donnons ici la construction.

IV.1. Catégorie CS .

Rappelons que, par définition, la catégorie Fin' a pour objets les ensembles $[0, n]$ et pour flèches les applications ensemblistes qui respectent le point base 0 (i.e. $f(0) = 0$).

On s'intéresse à la sous-catégorie Fin'' de Fin' dont les objets sont les ensembles $[0, n]$ et les flèches les applications surjectives respectant le point-base. Nous allons tout d'abord donner une réalisation géométrique de la catégorie Fin'' .

Nous poserons $\mathbb{R}^{(\infty)} = \varinjlim \mathbb{R}^m$ et $\mathbb{Z}^{(\infty)} = \varinjlim \mathbb{Z}^m$. Nous définirons le groupe CS_k^m comme le \mathbb{Q} -module sur l'ensemble des k -simplexes ordonnés non- k -dégénérés de \mathbb{R}^m (cf. I.1.a) à sommets dans \mathbb{Z}^m , soit encore comme le \mathbb{Q} -module sur l'ensemble des $(k+1)$ -uplets : $(a/x_1/x_2/\cdots/x_k)$, où $a \in \mathbb{Z}^m$ et où $(x_i)_{i \in [1, k]}$ est une famille libre de vecteurs de \mathbb{R}^m à coordonnées entières.

Nous poserons enfin $CS_k = \varinjlim H_0(TE^m, CS_k^m)$, où TE^m désigne le groupe des translations à coefficients entiers de \mathbb{R}^m . Nous noterons $[(x_1/\cdots/x_k)]$ la classe dans CS_k du k -simplexe ordonné $(a/x_1/\cdots/x_k)$.

En d'autres termes, CS_k n'est autre que le \mathbb{Q} -module sur l'ensemble des k -simplexes ordonnés non- k -dégénérés de $\mathbb{R}^{(\infty)}$ à sommets dans $\mathbb{Z}^{(\infty)}$, modulo l'action des translations à coefficients entiers.

Le groupe S_k opère alors sur CS_k par permutations des vecteurs-arêtes :

$$\sigma \cdot [(x_1/\cdots/x_k)] = [x_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/x_{\sigma^{-1}(k)}].$$

Considérons maintenant les applications d_i^k qui, à un k -simplexe ordonné $(a/x_1/\cdots/x_k)$ associent sa i -ème face :

$$d_i^k(a/x_1/\cdots/x_k) = (a/x_1/\cdots/x_i + x_{i+1}/\cdots/x_k);$$

avec $d_0^k(a/x_1/\cdots/x_k) = (a + x_1/x_2/\cdots/x_k);$

et $d_k^k(a/x_1/\cdots/x_k) = (a_k/x_1/\cdots/x_{k-1}).$

Ces applications définissent par passage au quotient une famille de morphismes que nous appellerons encore *applications face* :

$$d_i^k : CS_k \longrightarrow CS_{k-1}.$$

Par définition, la catégorie CS sera la catégorie dont les objets sont les CS_k et les flèches, les applications obtenues par composition de permutations et d'applications face.

PROPOSITION 6. — *Les catégories Fin'' et CS sont isomorphes.*

Soit f une flèche de Fin'' , f est une application surjective de $[0, m]$ dans $[0, n]$. On définira $T(f)$ comme l'application de CS_m dans CS_n telle que :

$$T(f)[(x_1/\cdots/x_m)] = [(y_1/\cdots/y_n)],$$

avec $y_i = \sum_{f(j)=i} x_j.$

De la même manière, soit g une flèche de CS de source CS_m et de but CS_n . On peut décrire de manière univoque g par son action sur les simplexes sous la forme :

$$g[(x_1/\cdots/x_m)] = \left[\left(\sum_{i \in \mathcal{P}_1} x_i / \sum_{i \in \mathcal{P}_2} x_i / \cdots / \sum_{i \in \mathcal{P}_n} x_i \right) \right],$$

où $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$ est une famille de sous-ensembles disjoints non vides de $[1, m]$.

On définira $T'(g)$ comme l'application de $[0, m]$ dans $[0, n]$ telle que :

$$T'(g)(i) = \begin{cases} j & \text{si } i \text{ appartient à } \mathcal{P}_j, \\ 0 & \text{si } i \text{ appartient au complément-} \\ & \text{taire de } \bigcup_{j \in [1, n]} \mathcal{P}_j \text{ dans } [1, m]. \end{cases}$$

Les transformations T et T' ainsi définies sont bien fonctorielles et $TT' = 1, T'T = 1$. L'étude de l'algèbre sur \mathbb{Z} des flèches de Fin'' se ramène donc à celle de l'algèbre sur \mathbb{Z} des flèches de CS , que nous noterons $A(CS)$. Dans $A(CS)$, si $k \in \mathbb{N}^*$, nous poserons $d^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i d_i^k$. Comme précédemment, Ψ_n^k désigne l'élément de $\mathbb{Z}[S_n]$ défini au II.1.

PROPOSITION 7. — Dans $A(CS)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(12) \quad \Psi_{k-1}^m \cdot d^k = d^k \cdot \Psi_k^m.$$

Avant d'en venir à la preuve de cette proposition, remarquons que si $F = (f_1, \dots, f_k)$ est une famille libre de rang k de vecteurs de $\mathbb{Z}^{(\infty)}$, le \mathbb{Q} -module Δ_F sur les classes $\{P_\beta^F\}$ dans CS_k des simplexes

$$(0/f_{\beta^{-1}(1)}/\dots/f_{\beta^{-1}(k)}),$$

où β parcourt S_k , est un sous- \mathbb{Q} -module de CS_k . L'opération de S_k sur Δ_F définie sur les simplexes $\{P_\beta^F\}$ (que nous appellerons *fondamentaux*) par

$$\sigma \cdot \{P_\beta^F\} = \{P_{\sigma \cdot \beta}^F\}$$

est induite par les opérations de S_k sur CS_k .

Nous allons commencer par établir les lemmes suivants.

LEMME 1. — Si $\sigma \neq \beta$ et si $\{P_\sigma^F\}$ et $\{P_\beta^F\}$ ont une face commune (i.e. s'il existe i et j tels que $d_i^k(\{P_\sigma^F\}) = d_j^k(\{P_\beta^F\})$), alors il existe une transposition $\tau = (i, i+1)$ ou un k -cycle $\tau = (1, 2, \dots, k)$ dans S_k tel que $\sigma = \tau \cdot \beta$ ou $\beta = \tau \cdot \sigma$.

En effet, cette face s'écrit :

- Soit sous la forme

$$[(f_{\gamma^{-1}(1)}/\dots/f_{\gamma^{-1}(i)} + f_{\gamma^{-1}(i+1)}/\dots/f_{\gamma^{-1}(k)})],$$

auquel cas $\sigma^{-1}(i) = \beta^{-1}(i+1)$, $\beta^{-1}(i) = \sigma^{-1}(i+1)$; et $\sigma^{-1}(k) = \beta^{-1}(k)$ si $k \neq i$ et $k \neq i+1$. Par conséquent $\sigma^{-1} \circ \tau = \beta^{-1}$ et $\beta = \tau \circ \sigma$, où $\tau = (i, i+1)$.

- Soit sous une des formes :

$$[(f_{\gamma^{-1}(2)}/\dots/f_{\gamma^{-1}(k)})] \quad \text{ou} \quad [(f_{\gamma^{-1}(1)}/\dots/f_{\gamma^{-1}(k-1)})],$$

auquel cas $\sigma^{-1}(i) = \beta^{-1}(i+1)$ ou $\sigma^{-1}(i+1) = \beta^{-1}(i)$, et donc, si on note $\tau = (1, 2, \dots, k)$, $\beta = \tau \cdot \sigma$ ou $\sigma = \tau \cdot \beta$.

LEMME 2. — Si $\sigma = \tau \cdot \beta$ où $\tau = (i, i+1)$ (resp. $\tau = (1, 2, \dots, k)$), alors

$$d_i^k(\{P_\sigma^F\} - \{P_\beta^F\}) = 0 \quad (\text{resp. } d_0^k(\{P_\sigma^F\}) - d_k^k(\{P_\beta^F\}) = 0).$$

Le lemme est immédiat, par définition des opérateurs d_i^k .

Notons maintenant $\text{Vect}(F)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension k engendré par les vecteurs f_1, \dots, f_k , et remarquons que le \mathbb{Q} -module Δ_F est isomorphe au sous- \mathbb{Q} -module $\tilde{\Delta}_F$ de $\mathcal{P}(\text{Vect}(F), TE)$ engendré par les classes des simplexes $(0/f_{\beta^{-1}(1)}/\dots/f_{\beta^{-1}(k)})$. Tout polytope de $\tilde{\Delta}_F$ définit donc de manière univoque un élément de Δ_F .

Fixons $\tilde{\Delta}_F$. Si R est un k -simplexe ordonné de $\mathbb{Z}^{(\infty)}$ dont les vecteurs-arêtes sont dans $\text{Vect}(F)$, R peut être considéré comme un simplexe de $\mathcal{P}(\text{Vect}(F), TE)$. Si, en outre, sa classe dans $\mathcal{P}(\text{Vect}(F), TE)$ appartient à $\tilde{\Delta}_F$, nous dirons par abus que “la classe de R appartient à $\tilde{\Delta}_F$ ”. Par ailleurs, nous noterons R_i la i -ième face ordonnée de R .

Si la classe de R appartient à $\tilde{\Delta}_F$, par définition de $\tilde{\Delta}_F$, il existe un k -simplexe ordonné P_σ^F et un entier j tels que R_i et la j -ième face de P_σ^F soient portés par deux hyperplans parallèles. Par ailleurs, $d_j^k(P_\sigma^F)$ est un $(k-1)$ -simplexe ordonné dont la suite ordonnée des vecteurs-arêtes définit une famille de $(k-1)$ vecteurs F' . La classe de R_i dans $\mathcal{P}(\text{Vect}(F'), TE)$ appartient alors à $\tilde{\Delta}_{F'}$: nous appellerons “classe dans CS_{k-1} de R_i associée à Δ_F ”, et nous noterons $\{R_i\}_F$ l’élément de $\Delta_{F'} \subset CS_{k-1}$ défini par la classe de R_i dans $\tilde{\Delta}_{F'}$, via l’isomorphisme canonique entre $\Delta_{F'}$ et $\tilde{\Delta}_{F'}$.

Si P est un simplexe ordonné $(p_1/\dots/p_k)$ de CS_k dont la classe appartient à $\tilde{\Delta}_F$, nous dirons que P est *orienté positivement* dans $\tilde{\Delta}_F$ si, en notant (f_1, \dots, f_k) la base ordonnée associée à $\tilde{\Delta}_F$, on a

$$p_1 \wedge \dots \wedge p_k = m \cdot f_1 \wedge \dots \wedge f_k,$$

avec $m \geq 0$. Nous écrirons alors $O(P) = 1$. Si $m < 0$, P est orienté négativement et nous écrirons $O(P) = -1$.

LEMME 3. — Soit R un k -simplexe ordonné de $\mathbb{R}^{(\infty)}$, tel que la classe de R appartienne à $\tilde{\Delta}_F$. Il se décompose sous la forme $[R] = \sum_{\sigma \in S_k} j_\sigma \cdot [P_\sigma^F]$ dans la base canonique associée aux simplexes fondamentaux de $\tilde{\Delta}_F$. Alors, si $j_\sigma \neq 0$, le signe de j_σ est donné par $O(R) \cdot \text{sgn}(\sigma)$ et l’égalité suivante est vraie dans CS_{k-1} :

$$(13) \quad \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot \{R_i\}_F = \sum_{\sigma \in S_k} j_\sigma \cdot \left\{ \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot d_i^k(\{P_\sigma^F\}) \right\}.$$

La condition sur le signe de j_σ est immédiate d'après I.1.b.

Comme la classe de R appartient à $\tilde{\Delta}_F$, R se décompose dans le groupe $\mathcal{P}(\text{Vect}(F))$ sous la forme :

$$(14) \quad O(R) \cdot [R] = \sum_{\sigma \in S_k} \left\{ \sum_{x \in S_\sigma} [x + Q_\sigma^F] \right\},$$

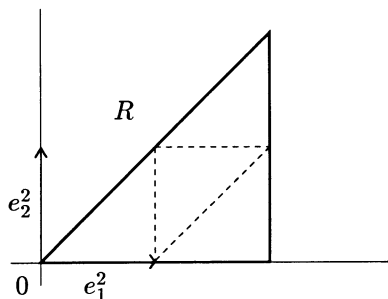
où S_σ est un ensemble de points de $\mathbb{R}^{(\infty)}$ à coordonnées entières et où $[x + Q_\sigma^F]$ désigne la classe dans $\mathcal{P}(\text{Vect}(F))$ du k -simplexe sous-jacent à $(x/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$ (cf. figure ci-après dans le cas de la dimension 2).

On a alors, en réécrivant (14) dans $\mathcal{P}(\text{Vect}(F), TE)$:

$$(15) \quad O(R) \cdot [R] = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \cdot |S_\sigma| \cdot [P_\sigma^F].$$

Pour l'essentiel, (14) signifie que le simplexe sous-jacent à R se décompose géométriquement en simplexes qui se déduisent par translation des simplexes sous-jacents aux simplexes $(0/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$.

La démonstration procède alors de la remarque suivante : puisque R se décompose *géométriquement* en simplexes, les faces de ces simplexes sont les unes intérieures à R , les autres sur le bord de R — nous appellerons ces faces les faces R -extérieures. Chaque face intérieure appartient simultanément à deux simplexes du membre droit de (14), tandis que l'union des faces R -extérieures n'est autre que le bord de R , comme le montre la figure ci-dessous en dimension 2.



Les notations de cette figure sont celles de la remarque 5.

Les faces intérieures sont dessinées en pointillés ; elles appartiennent toutes simultanément aux bords de deux simplexes fondamentaux distincts. Les faces extérieures (en gras) délimitent le bord de R . L'égalité (14) s'écrit :

$$[R] = [Q_1^2] + [e_1^2 + Q_1^2] + [e_1^2 + e_2^2 + Q_1^2] + [e_1^2 + Q_\sigma^2].$$

Revenons-en à la démonstration du lemme; il s'agit de prouver que les faces intérieures s'annulent algébriquement deux à deux dans (13), tandis que les faces R -extérieures décomposent algébriquement les $\{R_i\}_F$ dans CS_{k-1} .

Soit alors $[x + Q_\sigma^F]$ la classe dans $\mathcal{P}(\text{Vect}(F))$ d'un simplexe intervenant dans la décomposition de R .

Supposons tout d'abord $i \in [1, k-1]$:

- Si la i -ème face de $[x + Q_\sigma^F]$ est intérieure à R , il existe un simplexe $[y + Q_\beta^F]$ intervenant dans la décomposition (14) de R dont la j -ième face coïncide avec la i -ième face de $[x + Q_\sigma^F]$. D'après les LEMMES 1 et 2, on a :

$$i = j \quad \text{et} \quad d_i^k(\{P_\sigma^F\} - \{P_\beta^F\}) = 0.$$

Comme dans (15), les simplexes P_σ^F et P_β^F sont affectés de signes opposés, les deux faces affectées des signes correspondants s'annulent dans le terme droit de (13).

- Si la i -ème face de $[x + Q_\sigma^F]$ est R -extérieure, elle appartient à une face R_j de R . Comme cette face est de manière ensembliste la réunion des faces R -extérieures qu'elle contient, il suffit pour prouver (13) de vérifier que, dans (13), le terme $d_i^k(\{P_\sigma^F\})$ provenant de $[x + Q_\sigma^F]$ apparaît affecté du bon signe; c'est-à-dire que R_j a pour orientation $(-1)^{i+j} \cdot \text{sgn}(\sigma) \cdot O(R)$ fois l'orientation de $(0/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(i)} + f_{\sigma^{-1}(i+1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$ dans le sous-espace affine de dimension $(k-1)$ correspondant de $\mathbb{R}^{(\infty)}$. Cela résulte de ce que R a pour orientation $O(R) \cdot \text{sgn}(\sigma)$ fois l'orientation de $(0/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$.

Si maintenant $i = k$ (resp. $i = 0$), la vérification est identique, à cela près qu'il faut distinguer les cas où k est pair et $\text{sgn}(1, 2, \dots, k) = -1$, et les cas où k est impair et $\text{sgn}(1, 2, \dots, k) = 1$.

D'où la preuve du LEMME 3.

D'où enfin la preuve de la PROPOSITION 7 : les morphismes de la catégorie CS sont caractérisés par leur action sur les simplexes fondamentaux des groupes Δ_F ; pour établir (12), il suffit donc de prouver que $\Psi_{k-1}^m \circ d^k$ et $d^k \circ \Psi_k^m$, considérés comme morphismes de CS_k dans CS_{k-1} , ont même action sur ces simplexes fondamentaux.

Soit donc $(0/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$ un k -simplexe ordonné, dont la classe dans Δ_F est un simplexe fondamental. Le simplexe ordonné $(0/m \cdot f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/m \cdot f_{\sigma^{-1}(k)})$, obtenu par homothétie de rapport m à partir du simplexe $(0/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$ satisfait aux hypothèses du LEMME 3 et sa classe dans $\tilde{\Delta}_F$ est égale à $\Psi_k^m([P_\sigma^F])$.

D'après le LEMME 3, $d^k \circ \Psi_m^k(\{P_\sigma^F\})$ est égal dans CS_{k-1} à la somme alternée des classes associées à Δ_F des faces ordonnées de $(0/m \cdot f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/m \cdot f_{\sigma^{-1}(k)})$. Les $(k-1)$ -simplexes ordonnés qui définissent ces faces s'écrivent :

$$(0/m \cdot f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/m \cdot (f_{\sigma^{-1}(i)} + f_{\sigma^{-1}(i+1)})/\cdots/m \cdot f_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Ce sont les images par homothétie de rapport m des faces ordonnées de $(0/f_{\sigma^{-1}(1)}/\cdots/f_{\sigma^{-1}(k)})$. La classe associée à Δ_F dans CS_{k-1} de leur somme alternée est donc égale à $\Psi_{k-1}^n \circ d^k(\{P_\sigma^F\})$, ce qui termine la démonstration.

IV.2. Décomposition du groupe des polytopes d'un espace euclidien.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Nous définirons $C^m(\mathbb{R}^n)$ comme le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les éléments $(x_1/\cdots/x_m)$, où $x_i \in \mathbb{R}^n$.

REMARQUE 7. — Géométriquement, $(x_1/\cdots/x_m)$ représente, à translation près, le m -simplexe ordonné d'arêtes successives x_1, \dots, x_m .

Nous définirons de même $C_{(n-1)}^m(\mathbb{R}^n)$ comme le sous-groupe de $C^m(\mathbb{R}^n)$ engendré par les éléments $(x_1/\cdots/x_m)$ tels que les vecteurs x_1, \dots, x_m engendrent un sous- \mathbb{R} -espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension au plus $(n-1)$.

Si G est un groupe de déplacements de \mathbb{R}^n contenant le groupe T des translations; G s'écrit comme le produit semi-direct de T et d'un groupe \tilde{G} de transformations vectorielles de \mathbb{R}^n . En notant \tilde{g} l'élément de \tilde{G} associé à l'élément g de G dans la décomposition en produit semi-direct, G opère sur $C^m(\mathbb{R})$ par :

$$(16) \quad g(x_1/\cdots/x_m) = (\tilde{g}(x_1)/\cdots/\tilde{g}(x_m)).$$

On peut alors définir un foncteur F (resp. $F_{(n-1)}$) de CS vers les \mathbb{Q} -espaces vectoriels, qui associe :

- à CS_m le groupe $C^m(\mathbb{R}^n)$ (resp. $C_{(n-1)}^m(\mathbb{R}^n)$);
- à une flèche de CS_m dans CS_n dont l'action sur les simplexes de CS_m est donnée par :

$$g[(x_1/\cdots/x_m)] = \left[\left(\sum_{i \in \mathcal{P}_1} x_i / \cdots / \sum_{i \in \mathcal{P}_n} x_i \right) \right]$$

(avec les notations de la PROPOSITION 6), l'application correspondante sur les simplexes de $C^m(\mathbb{R}^n)$.

Le fait que l'on définisse de la sorte un foncteur est immédiat, compte tenu de la définition de la catégorie CS .

On sait (cf. [2]) que les opérations $d^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i d_i^k$ permettent de définir des complexes de chaînes C^* et $C_{(n-1)}^*$:

$$\begin{aligned} &\longrightarrow C^m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} C^{m-1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \dots \xrightarrow{d} \mathbb{Q} \longrightarrow 0, \\ &\longrightarrow C_{(n-1)}^m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} C_{(n-1)}^{m-1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \dots \xrightarrow{d} \mathbb{Q} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et que, si $T \subset G$:

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, G) \cong H_0(G, H_n(C^*/C_{(n-1)}^*)).$$

D'après IV.1 PROPOSITION 7, les opérateurs Ψ_m^k de $\mathbb{Q}[S_m]$, définis à l'aide du foncteur F sur $C^m(\mathbb{R}^n)$, commutent aux opérateurs bord de ces complexes :

$$\Psi_{m-1}^k \circ d^m = d^m \circ \Psi_m^k.$$

Les opérateurs Ψ_n^k agissent donc sur $H_n(C^*/C_{(n-1)}^*)$. D'après (16), T opère trivialement sur $H_n(C^*/C_{(n-1)}^*)$. Les opérateurs Ψ_n^k sont donc bien définis sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, T)$. D'après leur définition au II, ils opèrent comme les homothéties sur ce groupe de polytopes.

On sait par ailleurs que l'action des homothéties commute à l'action de tout groupe de déplacements G . L'action des opérateurs Ψ_n^k est donc bien définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, G)$. Enfin, compte tenu des relations $\Psi_n^k = \sum_{1 \leq p \leq n} k^p \cdot e_n^p$ qui existent entre dilatations et idempotents, les idempotents orthogonaux e_n^k agissent sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, G)$. Le groupe $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, G)$ se décompose donc sous l'action des opérateurs Ψ_n^k (c'est-à-dire des homothéties de rapport k , cf. [3]).

PROPOSITION 8. — *Le groupe des polytopes d'un espace euclidien de dimension n se décompose sous l'action des homothéties (i.e. des opérateurs Ψ_n^k de $\mathbb{Q}[S_n]$) :*

$$(17) \quad \mathcal{P}(\mathbb{R}^n, G) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{P}^i(\mathbb{R}^n, G),$$

où $\mathcal{P}^i(\mathbb{R}^n, G) = e_n^i \cdot \mathcal{P}(\mathbb{R}^n, G)$.

L'homothétie de rapport k opère comme i^k sur $\mathcal{P}^i(\mathbb{R}^n, G)$.

IV.3. Décomposition de l'homologie de Hochschild d'une algèbre commutative sur un corps de caractéristique nulle.

REMARQUE 8. — Comme les opérateurs Ψ_k^m et Sh_k^m appartiennent à $\mathbb{Z}[S_k]$, ils permettent de définir une filtration du complexe de Hochschild pour une algèbre commutative sur un anneau commutatif quelconque. Nous renvoyons pour ce calcul à [4].

Soit A une algèbre commutative sur un corps K de caractéristique nulle et M un A -bimodule symétrique. Le complexe de Hochschild associé à M a pour n -ième composante le K -espace vectoriel $M \otimes A^{\otimes n}$ et pour bord :

$$\begin{aligned} d : M \otimes A^{\otimes n} &\longrightarrow M \otimes A^{\otimes(n-1)} \\ m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto m \cdot a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes \cdots \otimes a_i \cdot a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ (-1)^n a_n \cdot m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}. \end{aligned}$$

L'homologie de Hochschild de A à coefficients dans M est donnée par les groupes d'homologie de ce complexe.

On peut, comme dans le cas des polytopes, définir un foncteur F de CS vers les K -espaces vectoriels en associant :

- à CS_k , le K -espace vectoriel $M \otimes A^{\otimes k}$;
- à une flèche Ψ de CS_ℓ dans CS_k définie par :

$$\Psi([(f_1/\cdots/f_\ell)]) = \left[\left(\sum_{i \in \mathcal{P}_1} f_i / \cdots / \sum_{i \in \mathcal{P}_k} f_i \right) \right],$$

avec les notations de la PROPOSITION 6, la flèche correspondante $\tilde{\Psi}$ de $M \otimes A^\ell$ dans $M \otimes A^k$ donnée par :

$$(18) \quad \tilde{\Psi}(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_\ell) = \prod_{i \in \mathcal{P}^c} a_i \cdot m \otimes \prod_{i \in \mathcal{P}_1} a_i \otimes \cdots \otimes \prod_{i \in \mathcal{P}_k} a_i,$$

où l'on note \mathcal{P}^c le complémentaire de $\bigcup_{i=1}^k \mathcal{P}_i$ dans $[1, \ell]$.

Compte tenu de l'existence de F , les opérations Ψ_k^m définies sur le terme $M \otimes A^{\otimes k}$ du complexe de Hochschild, commutent aux bords de ce complexe. Elles peuvent donc être définies sur ses groupes d'homologie, et l'action des idempotents orthogonaux définit une décomposition de l'homologie de Hochschild de toute algèbre commutative sur un corps de caractéristique nulle [4].

PROPOSITION 9. — *L'homologie de Hochschild de A à coefficients dans M se décompose sous l'action des opérations Ψ_n^k :*

$$H_n(A, M) \cong \bigoplus_{i=1}^n H_n^i(A, M)$$

où $H_n^i(A, M) = e_n^i \cdot H_n(A, M)$.

L'élément Ψ_n^k de $\mathbb{Z}[S_n]$ opère comme k^i sur $H_n^i(A, M)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COMTET (L.). — *Analyse combinatoire*. — P.U.F., 1970.
- [2] DUPONT (J.-L.). — Algebra of polytopes and homology of flag complexes, *Osaka J. of Math.*, t. **19**, 1982, p. 599–641.
- [3] HADWIGER (H.). — *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. — Springer Verlag, Grund. der Math. Wiss. Band XCIII, 1957.
- [4] LODAY (J.-L.). — Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives, *Invent. Math.*, t. **96**, 1989, p. 205–230.
- [5] PATRAS (F.). — Filtration du groupe des polytopes et λ -structure du groupe symétrique., *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **310**, **1**, **7**, 1990, p. 501–504.