BULLETIN DE LA S. M. F.

ABOUBEKER ZAHID

Les endomorphismes *k*-finis des modules de Whittaker

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 4 (1989), p. 451-477

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_4_451_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 451–477.

LES ENDOMORPHISMES $\mathfrak{k}$-FINIS DES MODULES DE WHITTAKER

PAR

ABOUBEKER ZAHID (*)

RÉSUMÉ. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, Wh un module de Whittaker simple. On donne une décomposition de l'algèbre des endomorphismes $\mathfrak{k}$-finis, de Wh dans Wh, en somme directe de modules de Harish-Chandra simples, suivant le groupe $P(R)/Q(R)$. Ceci étant fait, pour un choix très particulier du caractère central du module de Whittaker, on peut par un principe de translation par les éléments de $P(R)$, récupérer le résultat pour les autres caractères. On obtient en particulier une famille de suralgèbres $\mathfrak{k}$-finis de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Ces suralgèbres semblent très intéressantes à étudier; en effet on obtient dans le cas de $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$, soit l'algèbre de Weyl A_1, soit en translatant, l'algèbre des opérateurs différentiels sur une courbe singulière. Dans le cas de $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_3(\mathbb{C})$, on obtient le quotient de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie exceptionnelle de dimension 14, par un idéal primitif complètement premier.

ABSTRACT. — Let $\mathfrak{g}$ be a complex semisimple Lie algebra, and let Wh a simple Whittaker module. We give a decomposition of the algebra of $\mathfrak{k}$-finite vectors of $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Wh})$, as direct sum of Harish-chandra submodules. We then obtain a family of over rings of certain primitives quotients of enveloping algebras. In the cases $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ and $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_3(\mathbb{C})$ the structure of this rings is uniquely determined by their structure of $\mathfrak{g}$-module.

Je ne veux pas manquer d'exprimer ici ma très grande reconnaissance à A. JOSEPH, qui a dirigé et encouragé mon travail avec beaucoup de patience et d'attention.

Je remercie aussi C. MŒGLIN pour les discussions utiles que j'ai eu avec elle.

Introduction

1.1. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soient R un système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $R^+ \subset R$ l'ensemble des racines positives, $B \subset R^+$ l'ensemble des racines

(*) Texte reçu le 9 janvier 1989, révisé le 12 mai 1989.
A. ZAHID, 1 boulevard Jourdan, 75690 Paris Cedex 14, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/1989/451/$ 5.00

simples, ρ la demi-somme des racines positives, $S_\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}^*)$ la réflexion correspondante à la racine $\alpha \in R$ et W le groupe (de Weyl) engendré par les S_α, $\alpha \in B$.

Soit X_α l'élément de la base de Chevalley correspondant à la racine α et soient :

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in R^+} \mathbb{C}X_\alpha, \quad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in R^+} \mathbb{C}X_{-\alpha}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

On note $X \mapsto {}^tX$ l'antiautomorphisme de Chevalley défini par les conditions ${}^tX_\alpha = X_{-\alpha}$ pour $\alpha \in R$.

1.2. — On note $Q(R) = ZR$ l'ensemble des poids radiciels de R, où $P(R)$ est l'ensemble des poids de R

$$P(R) = \Big\{\lambda \in \mathfrak{h}^* : 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}, \ \forall \alpha \in R\Big\}\cdot$$

Pour tout $\alpha \in R$, on note $\check{\alpha} = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$. On dit que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est *régulier* (resp. *dominant*) si $(\lambda,\alpha) \neq 0$ (resp. si $(\lambda,\check{\alpha}) \notin \{-1,-2,\cdots\}$) pour tout $\alpha \in R^+$. On note $P(R)^+$, l'ensemble des poids dominants de $P(R)$. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on pose $R_\lambda = \{\alpha \in R : 2(\alpha,\lambda)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Z}\}$. Si $B = \{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}$ désigne une base de R, on notera $\{\varpi_1,\dots,\varpi_\ell\}$, la base formée par les poids fondamentaux correspondants. On a $Q(R) \subset P(R)$ et on considèrera $P(R)/Q(R)$ comme un groupe additif. Les représentants dans $P(R)$ des éléments non nuls de $P(R)/Q(R)$ seront toujours choisis parmi les ϖ_i tels que $1 \leq i \leq \ell$.

1.3. — Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, soit $M(\lambda)$ le module de Verma de plus haut poids $\lambda - \rho$ et $L(\lambda)$ l'unique sous-quotient simple de $M(\lambda)$. On désigne par χ_λ le caractère central de $M(\lambda)$. Soit $\mathfrak{g}\widehat{\ }$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie. L'application qui, à tout $\lambda \in P(R)^+$, associe la classe d'isomorphisme $[L(\lambda + \rho)]$ des $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie et de plus haut poids λ, est une bijection de $P(R)^+$ sur $\mathfrak{g}\widehat{\ }$. On note $E(\lambda)$ un représentant de $[L(\lambda+\rho)]$. Si V est un $\mathfrak{g}$-module, on notera par V_μ le sous-espace de poids μ de V.

1.4. — Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et soient $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$, $\operatorname{Max} Z(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux maximaux de $Z(\mathfrak{g})$.

Soit $u \to \check{u}$ l'antiautomorphisme principal de $U(\mathfrak{g})$. Si M et N sont deux $\mathfrak{g}$-modules alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N)$ est un $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$-module sous l'action

$$\big((a \otimes b)\cdot x\big)(m) = ax(\check{b}m)$$

pour tous a et b dans $U(\mathfrak{g})$, x dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N)$ et m dans M.

On identifie $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ avec $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$. Soit $j : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ défini par

$$j(X) = (X, X), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

On pose $\mathfrak{k} = j(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{k}$ est alors isomorphe à $\mathfrak{g}$, et est donc semi-simple.

On définit le module des vecteurs $\mathfrak{k}$-finis de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N)$ par

$$L(M,N) = \{x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N) : \dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{k})x < \infty\}\cdot$$

On vérifie facilement, que $L(M,N)$ est un $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$-sous-module de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N)$.

1.5. — Soit V un $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$-module et soit E un $\mathfrak{k}$-module simple de dimension finie. On peut considérer V comme un $\mathfrak{k}$-module et on désignera par $[V : E]_{\mathfrak{k}}$ la multiplicité de E dans une suite de Jordan-Hölder de V. Comme $\mathfrak{k}$ est semi-simple on a :

$$[V : E]_{\mathfrak{k}} = \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(E, V).$$

On dit que V est un module de Harish-Chandra pour la paire $(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ si :

(i) $\dim_{\mathbb{C}}(Z(\mathfrak{g}) \otimes Z(\mathfrak{g}) / \mathrm{Ann}_{Z(\mathfrak{g})\otimes Z(\mathfrak{g})} V) < \infty$;

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{k})v < \infty$, pour tout $v \in V$.

Puisque $\mathfrak{k}$ est semi-simple, ceci équivaut à dire que V est somme directe de $U(\mathfrak{k})$-sous-modules simples de dimensions finies de V et on impose :

(iii) $[V : E]_{\mathfrak{k}} < \infty$ pour tout $U(\mathfrak{k})$-module simple E.

On notera par $\mathcal{H}$, la catégorie des modules de Harish-Chandra. Les objets de $\mathcal{H}$ sont de longueur finie (*cf.* [1, 5.7]). Lorsque M et N sont deux $U(\mathfrak{g})$-modules de longueurs finies, alors $L(M,N)$ est un module de Harish-Chandra (*cf.* [1, 6.2]).

1.6. — On identifie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ grâce à l'isomorphisme j de 1.4, on a alors

$$\hat{\mathfrak{k}} = \{E(\lambda) : \lambda \in P(R)^+\}\cdot$$

D'autre part, on peut écrire $\hat{\mathfrak{k}}$ comme réunion disjointe :

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{k}} &= \bigcup_{\gamma \in P(R)/Q(R)} C_\gamma \\ &:= \bigcup_{\gamma \in P(R)/Q(R)} \{E(\lambda) : \lambda \in P(R)^+ \cap (\gamma + Q(R)\}\cdot \end{aligned}$$

Pour chaque module de Harish-Chandra V et pour tout élément $\gamma \in P(R)/Q(R)$, on définit la composante V_γ de V comme étant la somme directe des $U(\mathfrak{k})$-sous-modules simples de dimensions finies, de type appartenant à C_γ. D'après (*cf.* [10, 3.7]) V_γ est un $U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})$-sous-module de V ; de plus il est clair que V_γ est un module de Harish-Chandra.

En particulier, si M et N sont deux $U(\mathfrak{g})$-modules simples, on a la décomposition :

$$L(M,N) = \bigoplus_{\gamma \in P(R)/Q(R)} L(M,N)_\gamma$$

en somme directe de $U(\mathfrak{g})$-sous-bimodules.

2. Modules de Whittaker

2.1. — Soit $\eta : \mathfrak{n}^+ \to \mathbb{C}$ un homomorphisme d'algèbres de Lie tel que $\eta(X_\alpha) \neq 0$ pour tout $\alpha \in B$. Cet homomorphisme se prolonge en un homomorphisme, noté encore η, de $U(\mathfrak{n}^+)$ dans $\mathbb{C}$. On note $\operatorname{Ker}\eta$ son noyau dans $U(\mathfrak{n}^+)$. Soit V un $U(\mathfrak{g})$-module. Un vecteur $w \in V$ est appelé *vecteur de Whittaker* si

$$X \cdot w = \eta(X)w, \quad \forall X \in \mathfrak{n}^+.$$

Un $U(\mathfrak{g})$-module V est appelé *module de Whittaker* s'il est engendré par un vecteur de Whittaker w. On a alors :

$$V = U(\mathfrak{g}) \cdot w.$$

Soit I_w l'annulateur de w dans $U(\mathfrak{g})$ on a :

$$V \simeq U(\mathfrak{g})/I_w.$$

D'autre part il est clair que :

$$U(\mathfrak{g}) \operatorname{Ann}_{Z(\mathfrak{g})} V + U(\mathfrak{g}) \operatorname{Ker}\eta \subset I_w.$$

D'après [11, 3.1], on a en fait égalité et tout module de Whittaker est alors déterminé, à isomorphisme près, par son annulateur dans $Z(\mathfrak{g})$, d'où une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de modules de Whittaker et l'ensemble des idéaux de $Z(\mathfrak{g})$ (*cf.* [11, 3.2]). De plus, si V est un module de Whittaker, il existe une bijection, entre les sous-modules de V, et les idéaux de $Z(\mathfrak{g})$ contenant $\operatorname{Ann}_{Z(\mathfrak{g})} V$ (*cf.* [11, 3.7]). Donc V est un module de Whittaker simple si et seulement si $\operatorname{Ann}_{Z(\mathfrak{g})} V \in \operatorname{Max} Z(\mathfrak{g})$ (*cf.* [11, théorème 3.6.1]).

On désigne par Wh l'ensemble des classes d'isomorphismes des modules de Whittaker simples. Pour chaque $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, soit $\widehat{\lambda}$ l'orbite de λ sous l'action de W. On considère :

$$V = U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \operatorname{Ker} \chi_\lambda + U(\mathfrak{g}) \operatorname{Ker} \eta,$$

muni de la représentation régulière gauche; il est clair que V est un module de Whittaker. D'autre part V est simple, puisque $\operatorname{Ker} \chi_\lambda$ est un idéal maximal de $Z(\mathfrak{g})$. On note alors $\operatorname{Wh}(\widehat{\lambda})$, la classe d'isomorphisme de V. L'application de $\mathfrak{h}^*/W$ dans Wh, qui à $\widehat{\lambda}$ associe $\operatorname{Wh}(\widehat{\lambda})$, est alors une bijection; en effet ceci résulte de ce qui précède et du fait que $\widehat{\lambda} \to \operatorname{Ann}_{Z(\mathfrak{g})} \operatorname{Wh}(\widehat{\lambda}) = \operatorname{Ker} \chi_\lambda$ est une bijection de $\mathfrak{h}^*/W$ sur $\operatorname{Max} Z(\mathfrak{g})$ (*cf.* [4, 7.4.7, 7.4.8]).

2.2. — Soit E un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie n. On désigne par $\Omega(E)$, l'ensemble des poids de E. On a alors :

THÉORÈME (*cf.* [11, 4.6]). — *Le $\mathfrak{g}$-module $E \otimes \operatorname{Wh}(\widehat{\lambda})$ possède une suite de Jordan-Hölder de longueur n, avec des quotients simples isomorphes à $\operatorname{Wh}((\lambda+\nu)\widehat{\ })$, où $\nu \in \Omega(E)$.*

3. Quelques propriétés des racines d'une algèbre de Lie semi-simple

(Pour toutes les notations, concernant ce paragraphe, voir (*cf.* [2]).)

3.1. — Soit $\overline{H}$ un sous-groupe de $P(R)/Q(R)$, il existe un système de représentants noté H, tel que les éléments non nuls de $\overline{H}$ aient pour représentants des poids fondamentaux. Ce choix particulier sera toujours adopté par la suite. On définit alors, pour tout sous-groupe $\overline{H}$ de $P(R)/Q(R)$, l'élément μ_H de $\mathfrak{h}^*$ par :

$$\mu_H = \frac{1}{|H|} \sum_{\varpi \in H} \varpi.$$

PROPOSITION. — *Il existe un homomorphisme de groupes*

$$\phi : P(R)/Q(R) \longrightarrow W$$

vérifiant, pour tout sous-groupe $\overline{H}$ de $P(R)/Q(R)$, les propriétés suivantes :

(i) $\mu_H - \phi(\varpi)\mu_H = \varpi$ *pour tout* $\varpi \in H$ *;*

(ii) $(\mu_H - W \cdot \mu_H) \cap Q(R) = \{0\}$ *;*

(iii) $(\mu_H - W \cdot \mu_H) \cap P(R) = H$.

L'existence de ϕ, ainsi que le (i) et le (ii) de la PROPOSITION, vont se faire en se ramenant chaque fois à une algèbre de Lie simple, de type A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ et D_ℓ. Pour E_6 et E_7 on donnera une démonstration directe. Pour les autres types d'algèbres simples, le groupe $P(R)/Q(R)$ est trivial.

Montrons que (i) et (ii) entraînent (iii).

a) Supposons que $\overline{\Gamma} = P(R)/Q(R)$ n'a pour sous-groupes que $\{0\}$ et lui même. Soit $\mu = \mu_\Gamma$. Si $y \in W$ et $\mu - y\mu \in P(R)$. Alors

$$\mu - y\mu = \varpi + q \quad \text{avec } \varpi \in \Gamma \text{ et } q \in Q(R).$$

D'après (i), on a alors $\mu - y\mu = \mu - \phi(\varpi)\mu + q$. D'où $\phi(\varpi)^{-1}q = \mu - \phi(\varpi)^{-1}y\mu \in Q(R)$. On a donc d'après (ii) $q = 0$, d'où (iii).

b) Soit $\overline{H}$ un sous-groupe propre de $\overline{\Gamma} = P(R)/Q(R)$. On peut alors supposer R de type A_ℓ ou D_ℓ, et que $\check{\beta} = \beta$ pour tout $\beta \in R$.

Soit $\mu = \mu_H$, on a alors le lemme suivant qui est une simple vérification.

LEMME. — *Pour tout β dans R, on a :*

$$(\mu, \beta) \in \mathbb{Z} \iff (\mu, \beta) = 0.$$

Si $y \in W$ et $\mu - y\mu \in P(R)$. Alors

$$\mu - y\mu = \sum_{\varpi \in \Gamma} a_i \varpi_i, \quad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i.$$

Soit $\alpha_i \in B$ tel que $\varpi_i \notin H$. Alors

$$a_i = (\mu - y\mu, \alpha_i) = (\mu, \alpha_i) - (\mu, y^{-1}\alpha_i) = -(\mu, y^{-1}\alpha_i).$$

On a donc d'après le LEMME $a_i = 0$. D'où

$$\mu - y\mu = \sum_{\varpi \in H} a_i \varpi_i \in \varpi + Q(R) \quad \text{avec } \varpi \in H.$$

Le raisonnement du a) permet alors de conclure.

3.2. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type A_ℓ, où $\ell \geq 1$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Considérons dans $\mathbb{R}^{\ell+1}$, muni de sa base canonique $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq \ell+1}$, l'hyperplan V formée des points dont la somme des coordonnées est nulle. On peut alors construire le système de racines $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ dans V. Une base de R est alors :

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \; ; \; \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \; ; \; \cdots \; ; \; \alpha_\ell = \varepsilon_\ell - \varepsilon_{\ell+1}.$$

On a alors :

$$Q(R) = \Big\{x = \sum_{i=1}^{\ell+1} x_i\varepsilon_i \in V : \quad x_i \in \mathbb{Z} \text{ et } \sum_{i=1}^{\ell+1} x_i = 0\Big\}$$

$$P(R) \text{ est engendré par } Q(R) \quad \text{et} \quad \varepsilon_1 - \frac{1}{\ell+1}\sum_{i=1}^{\ell+1}\varepsilon_i.$$

D'autre part, $P(R)/Q(R)$ est un groupe cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}_{\ell+1}$ et engendré par l'image de ϖ_1. En effet, on a

$$i\varpi_1 \equiv \varpi_i \mod Q(R) \qquad \forall i : 1 \leq i \leq \ell.$$

Notant $\Gamma = \{0, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\ell\}$, on a alors

$$\overline{\Gamma} = P(R)/Q(R).$$

Soit C la transformation de Coxeter :

$$C = S_{\alpha_1}S_{\alpha_2}\cdots S_{\alpha_\ell},$$

elle est d'ordre $\ell+1$ dans W et il est clair qu'on obtient un homomorphisme ϕ de $P(R)/Q(R)$ dans W en posant

$$\phi(\varpi) = C.$$

LEMME 1. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$*

$$\mu = \mu_\Gamma = \frac{1}{|H|}\sum_{\varpi\in\Gamma}\varpi = \frac{1}{\ell+1}\sum_{i=1}^{\ell}\varpi_i = \frac{1}{\ell+1}\rho.$$

On a

(i) $\mu - C^i\mu = \varpi_i$ *pour tout i tel que $1 \leq i \leq \ell$;*

(ii) $(\mu - W\mu) \cap Q(R) = \{0\}$.

On a

$$\begin{aligned}(\ell+1)C\mu &= \{C\varpi_1 + C\varpi_2 + \cdots + C\varpi_\ell\} \\ &= \{\varpi_1 - \alpha_1 + \varpi_2 - (\alpha_1+\alpha_2) + \cdots \\ &\qquad\qquad + \varpi_\ell - (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\ell)\} \\ &= \Big\{(\varpi_1+\varpi_2+\cdots+\varpi_\ell) \\ &\qquad - \big(\ell\alpha_1 + (\ell-1)\alpha_2 + \cdots + (\ell-i+1)\alpha_i + \cdots + \alpha_\ell\big)\Big\}. \\ &= (\ell+1)(\mu - \varpi_1).\end{aligned}$$

D'où

$$\mu - C\mu = \varpi_1.$$

Supposons que $\mu - C^i\mu = \varpi_i$, alors :

$$\begin{aligned}\mu - C^{i+1}\mu &= \mu - C(C^i\mu) = \mu - C(\mu - \varpi_i) \\ &= \mu - C\mu + C\varpi_i = \varpi_1 + \varpi_i - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_i) \\ &= \varpi_1 + \varpi_i - (\varpi_1 + \varpi_i - \varpi_{i+1}) \\ &= \varpi_{i+1}.\end{aligned}$$

Ceci montre (i). On a

$$\mu = \frac{1}{2(\ell+1)}\sum_{i=1}^{\ell+1}\big(\ell - 2(i-1)\big)\varepsilon_i.$$

Si $\omega \in W$, on pose $\mu - \omega\mu = \sum_{k=1}^{\ell+1} x_k\varepsilon_k$. On a alors :

$$\mu - \omega\mu \in Q(R) \iff x_k \in \mathbb{Z} \quad \forall k : 1 \le k \le \ell+1 \text{ et } \sum_{k=1}^{\ell+1} x_k = 0.$$

Comme W agit par permutations des ε_i, x_k est de la forme

$$\begin{aligned}x_k &= \frac{1}{2(\ell+1)}\Big\{\big(\ell - 2(k-1)\big) - \big(\ell - 2(\sigma(k)-1)\big)\Big\} \\ &= \frac{\sigma(k)-k}{\ell+1}\end{aligned}$$

où σ est une permutation de $\{1,2,\ldots,\ell+1\}$. Il est alors clair que

$$x_k \in \mathbb{Z} \iff x_k = 0.$$

Ceci montre (ii).

Soit maintenant $\overline{H}$ un sous groupe de $P(R)/Q(R)$ et supposons que

$$t = |\overline{H}| \qquad \text{avec} \quad t \cdot i = \ell + 1.$$

Le sous-groupe $\overline{H}$, qui est engendré par l'image de ϖ_i, est tel que

$$H = \{0, \varpi_i, \varpi_{2i}, \dots, \varpi_{(t-1)i}\}.$$

Avec ces notations on a le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soit μ_H l'élément de $\mathfrak{h}^*$*

$$\mu_H = \frac{1}{t} \sum_{\varpi \in H} \varpi = \frac{1}{t}\big(\varpi_i + \varpi_{2i} + \cdots + \varpi_{(t-1)i}\big).$$

On a

(i) $\mu_H - C^{k\cdot i}\mu_H = \varpi_{k\cdot i}$ *pour tout k tel que* $1 \leq k \leq t-1$;

(ii) $(\mu_H - W \cdot \mu_H) \cap Q(R) = \{0\}$.

D'après le LEMME 1 (i)

$$t\mu_H = \sum_{s=1}^{t-1} \varpi_{s\cdot i} = \sum_{s=1}^{t-1} (\mu - C^{s\cdot i}\mu).$$

D'où pour tout k $(1 \leq k \leq t-1)$:

$$\begin{aligned}
t(\mu_H - C^{k\cdot i}\mu_H) &= \sum_{s=1}^{t-1}(\mu - C^{s\cdot i}\mu) - \sum_{s=1}^{t-1}\big(C^{k\cdot i}\mu - C^{(k+s)i}\mu\big)\\
&= \sum_{s=1}^{t-1}(\mu - C^{k\cdot i}\mu) + \sum_{s=1}^{t-1}\big(C^{(k+s)i}\mu - C^{s\cdot i}\mu\big)\\
&= (t-1)(\mu - C^{k\cdot i}\mu) + (\mu - C^{k\cdot i}\mu)\\
&= t(\mu - C^{k\cdot i}\mu)\\
&= t\varpi_{k\cdot i}.
\end{aligned}$$

D'où (i). On a :

$$\mu_H = \frac{1}{2t} \sum_{r=1}^{t} \sum_{k=(r-1)i+1}^{r\cdot i} (t - 2r + 1)\varepsilon_k.$$

Si $w \in W$, on pose $\mu_H - w\mu_H = \sum_{k=1}^{\ell+1} x_k\varepsilon_k$. Comme W agit par permutations des ε_i, x_k est de la forme

$$x_k = \frac{1}{2t}\Big\{\big((t-2r+1) - (t-2\sigma(r)+1\big)\Big\} = \frac{\sigma(r)-r}{t}$$

où σ est une permutation de $\{1,\ldots,t\}$ et où $r \in \{1,\ldots,t\}$. Il est clair que

$$x_k \in \mathbb{Z} \iff x_k = 0$$

d'où (ii).

3.3. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type B_ℓ, avec $\ell \geq 2$; $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. On peut construire le système de racines R dans $\mathbb{R}^\ell$, muni de sa base canonique $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq \ell}$. Une base $B = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}$ de R est donnée par :

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots,\ \ \alpha_{\ell-1} = \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell,\ \ \alpha_\ell = \varepsilon_\ell.$$

On a alors

$$Q(R) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\varepsilon_i, \qquad P(R) = \bigoplus_{i=1}^{\ell}\mathbb{Z}\varepsilon_i + \mathbb{Z}\Big(\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell}\varepsilon_i\Big).$$

Le groupe $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, engendré par l'image de ϖ_ℓ. On note $\Gamma = \{0,\varpi_\ell\}$. Soit w_0 l'élément du groupe de Weyl, qui échange B en $-B$. On définit l'homomorphisme ϕ en posant $\phi(\varpi_\ell) = w_0$.

LEMME. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$*

$$\mu = \mu_\Gamma = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\varpi\in\Gamma}\varpi = \frac{1}{2}\varpi_\ell.$$

On a :

(i) $\mu - w_0\mu = \varpi_\ell$;

(ii) $(\mu - W\mu)\cap Q(R) = \{0\}$.

(i) est clair. D'autre part, comme W agit par permutations des ε_i et par changement de signe $\varepsilon_i \to (\pm)_i\varepsilon_i$, et que $\mu = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\ell}\varepsilon_i$, il est clair que pour tout $w \in W$

$$\mu - w\mu \in Q(R) = \bigoplus_{i=1}^{\ell}\mathbb{Z}\varepsilon_i \iff \mu - w\mu = 0.$$

D'où (ii).

3.4. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type C_ℓ, avec $\ell \geq 2$, $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On peut construire le système de racines R, dans $\mathbb{R}^\ell$ muni de sa base canonique $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq \ell}$. Une base de R est alors

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots,\ \ \alpha_{\ell-1} = \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell,\ \ \alpha_\ell = 2\varepsilon_\ell.$$

Les poids fondamentaux correspondants sont donnés par :

$$\varpi_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i, \qquad \forall i : 1 \leq i \leq \ell,$$

et on obtient

$$Q(R) = \Big\{ x = \sum_{i=1}^{\ell} x_i \varepsilon_i : x_i \in \mathbb{Z} \text{ et } \sum_{i=1}^{\ell} x_i \text{ pair} \Big\} ;$$

$$P(R) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\varepsilon_k.$$

Le groupe $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, engendré par l'image de ϖ_1. On note $\Gamma = \{0, \varpi_1\}$ et on définit ϕ en posant

$$\phi(\varpi) = S_\beta,$$

où β est la plus grande racine de R. S_β laisse fixes les ε_i avec $i \neq 1$ et envoie ε_1 sur $-\varepsilon_1$.

LEMME. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$*

$$\mu = \mu_H = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\varpi \in \Gamma} \varpi = \frac{1}{2}\varpi_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1.$$

Alors :

(i) $\mu - S_\beta \mu = \varpi_1$;

(ii) $(\mu - W\mu) \cap Q(R) = \{0\}$.

Preuve. — (i) est clair. D'autre part, comme W agit par permutations des ε_i avec changement de signe $\varepsilon_i \mapsto (\pm)_i \varepsilon_i$, et que $Q(R)$ est constitué de vecteurs à coordonnées entières dont la somme est paire, on a pour tout $w \in W$

$$\mu - w\mu \in Q(R) \iff \mu - w\mu = 0.$$

D'où (ii).

3.5. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type D_ℓ, avec $\ell \geq 3$, $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On peut construire le système de racines R, dans $\mathbb{R}^\ell$ muni de sa base canonique $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq \ell}$. Une base de R est donnée par

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \ \alpha_{\ell-1} = \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell, \ \alpha_\ell = \varepsilon_{\ell-1} + \varepsilon_\ell.$$

Les poids fondamentaux correspondants sont donnés par :

$$\begin{aligned} \varpi_i &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i, & \forall i : 1 \leq i \leq \ell, \\ \varpi_{\ell-1} &= \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\ell-1} \varepsilon_k - \tfrac{1}{2} \varepsilon_\ell, & \varpi_\ell = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\ell-1} \varepsilon_k + \tfrac{1}{2} \varepsilon_\ell. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} Q(R) &= \Big\{ x = \sum_{i=1}^{\ell} x_i \varepsilon_i : \ x_i \in \mathbb{Z} \text{ et } \sum_{i=1}^{\ell} x_i \text{ pair} \Big\} ; \\ P(R) &= \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z} \varepsilon_k + \mathbb{Z} \Big(\tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\ell} \varepsilon_k \Big). \end{aligned}$$

D'autre part, le groupe de Weyl agit par permutations des ε_i, avec changement de signe $\varepsilon_i \to (\pm 1)_i \varepsilon_i$, vérifiant $\prod_i (\pm 1)_i = 1$. On pose, en désignant par S_i la réflexion S_{α_i} :

$$\begin{aligned} x_i &= S_{\ell-2} S_{\ell-3} \cdots S_{i+1} S_i, & \forall i : 1 \leq i \leq \ell - 2, \quad x_{\ell-1} = 1; \\ X_i^{i+1} &= S_\ell x_i S_{\ell-1} x_{i+1}, & \forall i : 1 \leq i \leq \ell - 2. \end{aligned}$$

L'élément x_i n'est autre que le cycle $(\varepsilon_{\ell-1}, \varepsilon_{\ell-2}, \ldots, \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_i)$ et X_i^{i+1} est l'application définie par :

$$\begin{aligned} X_i^{i+1}(\varepsilon_k) &= \varepsilon_k, & \forall k : 1 \leq k \leq i - 1 ; \\ X_i^{i+1}(\varepsilon_i) &= -\varepsilon_\ell, & X_i^{i+1}(\varepsilon_{i+1}) = -\varepsilon_{\ell-1} ; \\ X_i^{i+1}(\varepsilon_k) &= \varepsilon_{k-2} & \forall k : i + 2 \leq k \leq \ell. \end{aligned}$$

3.5.1. — Supposons dans cette partie que ℓ est impair. Le groupe $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à Z_4, engendré par l'image de ϖ_ℓ. En effet

$$\varpi_1 \equiv 2\varpi_\ell\big(Q(R)\big) \quad \text{et} \quad \varpi_{\ell-1} \equiv 3\varpi_\ell\big(Q(R)\big).$$

On pose $\Gamma = \{0, \varpi_1, \varpi_{\ell-1}, \varpi_\ell\}$. Soit z l'élément du groupe de Weyl W

$$z = X_1^2 X_3^4 \cdots X_{\ell-4}^{\ell-3} X_{\ell-2}^{\ell-1}.$$

On vérifie que $z(\varepsilon_1) = -\varepsilon_\ell$, $z(\varepsilon_\ell) = \varepsilon_1$, $z(\varepsilon_k) = -\varepsilon_{\ell-k+1}$ pour tout k satisfaisant $2 \leq k \leq \ell - 1$ et que z est d'ordre 4. On pose alors $\phi(\varpi_\ell) = z$.

LEMME 1. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$:*

$$\mu = \mu_H = \frac{1}{\Gamma} \sum_{\varpi \in \Gamma} \varpi = \frac{1}{4}(\varpi_1 + \varpi_{\ell-1} + \varpi_\ell).$$

On a :

(i) $\mu - z\mu = \varpi_\ell$, $\mu - z^2\mu = \varpi_1$ *et* $\mu - z^3\mu = \varpi_{\ell-1}$ *;*

(ii) $(\mu - W\mu) \cap Q(R) = \{0\}$.

On a $\mu = \frac{1}{4}(2\varepsilon_1 + \sigma)$ où $\sigma = \sum_{k=2}^{\ell-1} \varepsilon_k$. Comme $z(\varepsilon_1) = -\varepsilon_\ell, z(\varepsilon_\ell) = \varepsilon_1$ et $z(\sigma) = -\sigma$, (i) devient une simple vérification.

Supposons que $\mu - w\mu = \sum_{k=1}^{\ell} x_k \varepsilon_k$, avec $w \in W$. Comme W agit par permutation des ε_i avec changement de signe pair, les seules possibilités pour les x_k d'être entiers sont soit $x_k = 0$ si $k \geq 2$, soit $x_k = 1$ pour $k = 1$. Comme $\varepsilon_1 \notin Q(R)$, on a bien (ii).

Il existe un seul sous groupe propre $\overline{H}$ de $P(R)/Q(R)$, engendré par l'image de ϖ_1, on pose $H = \{0, \varpi_1\}$.

LEMME 2. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$*

$$\mu = \mu_H = \frac{1}{|H|} \sum_{\varpi \in H} \varpi = \frac{1}{2}\varpi_1.$$

On a :

(i) $\mu - z^2\mu = \varpi_1$ *;*

(ii) $(\mu - W\mu) \cap Q(R) = \{0\}$.

3.5.2. — On suppose dans cette partie que ℓ est pair, on a alors $P(Q)/Q(R) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, formé par 0 et par les images de $\varpi_1, \varpi_{\ell-1}$ et ϖ_ℓ, qui sont chacune d'ordre 2. On pose $\Gamma = \{0, \varpi_1, \varpi_{\ell-1}, \varpi_\ell\}$. Soient dans W les éléments suivants :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= S_1 S_2 \cdots S_{\ell-2} S_{\ell-1} S_\ell S_{\ell-2} \cdots S_2 S_1; \\ \tau_2 &= X_1^2 X_3^4 \cdots X_{\ell-3}^{\ell-2} S_\ell; \\ \tau_3 &= \tau_1 \tau_2. \end{aligned}$$

On vérifie aussitôt que les τ_i (pour $i = 1, 2$) s'expriment sur la base ε_k de la façon suivante :

$$\tau_1(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1, \quad \tau_1(\varepsilon_k) = -\varepsilon_k, \quad \forall k : 2 \leq k \leq \ell - 1 \text{ et } \tau_1(\varepsilon_\ell) = -\varepsilon_\ell;$$
$$\tau_2(\varepsilon_k) = -\varepsilon_{\ell-k+1} \qquad \forall k : 1 \leq k \leq \ell.$$

On a alors

$$\tau_1^2 = \tau_2^2 = 1, \quad \tau_3 = \tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1, \quad \tau_3^2 = 1,$$

et par conséquent $\{1, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ forme un sous groupe de W, isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. On définit alors l'homomorphisme ϕ en posant $\phi(\varpi_1) = \tau_1$, $\phi(\varpi_\ell) = \tau_2$ et $\phi(\varpi_{\ell-1}) = \tau_1\tau_2$. (On a $\phi(\varpi_{\ell-1}) = \phi(\varpi_1)\phi(\varpi_\ell)$ puisque $\varpi_{\ell-1} \equiv \varpi_\ell + \varpi_1$ modulo $Q(R)$.)

LEMME 1. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$:*

$$\mu = \mu_H = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\varpi \in \Gamma} \varpi = \frac{1}{4}(\varpi_1 + \varpi_{\ell-1} + \varpi_\ell).$$

On a :

(i) $\mu - \tau_1\mu = \varpi_1$, $\mu - \tau_2\mu = \varpi_\ell$ *et* $\mu - \tau_3\mu = \varpi_{\ell-1}$;

(ii) $(\mu - W\mu) \cap Q(R) = \{0\}$.

Les sous groupes propres de $P(R)/Q(R)$ sont $\overline{H}_1$, $\overline{H}_2$ et $\overline{H}_3$ avec $H_1 = \{0, \varpi_1\}$, $H_2 = \{0, \varpi_\ell\}$ et $H_3 = \{0, \varpi_{\ell-1}\}$.

LEMME 2. — *Soit μ_i l'élément de $\mathfrak{h}^*$:*

$$\mu_i = \frac{1}{|H_i|} \sum_{\varpi \in H_i} \varpi, \qquad i = 1, 2, 3.$$

On a :

(i) $\mu_1 - \tau_1\mu_1 = \varpi_1$, $\mu_2 - \tau_2\mu_2 = \varpi_\ell$ *et* $\mu_3 - \tau_3\mu_3 = \varpi_{\ell-1}$.

(ii) $(\mu_i - W\mu_i) \cap Q(R) = \{0\}$, $i = 1, 2, 3$.

3.6. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type E_6, $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ une base de racines. Le groupe $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_3$, engendré par l'image de ϖ_6 (par exemple). On pose $\Gamma = \{0, \varpi_1, \varpi_6\}$ et on note s_{α_k} par k. On définit l'homomorphisme ϕ en posant

$$z = \phi(\varpi_6) = 6543245134625431.$$

Soit $\tilde{\alpha}$ la plus grande racine de R, *i.e.* $\tilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$. On a alors :

$$z(\alpha_1) = -\tilde{\alpha}, \quad z(\alpha_2) = \alpha_5, \quad z(\alpha_3) = \alpha_2,$$
$$z(\alpha_4) = \alpha_4, \quad z(\alpha_5) = \alpha_3, \quad z(\alpha_6) = \alpha_1.$$

On vérifie que $z^3 = 1$.

LEMME. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$:*

$$\mu = \mu_\Gamma = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\varpi\in\Gamma}\varpi = \frac{1}{3}(\varpi_1 + \varpi_6).$$

On a :

(i) $\mu - z\mu = \varpi_6$ *et* $\mu - z^2\mu = \varpi_1$;

(ii) $(\mu - W\mu)\cap P(R) = \{0, \varpi_1, \varpi_6\}$.

Preuve. — (i) est une simple vérification. Pour tout $\beta \in R$, on a $(\mu, \check{\beta}) = (\mu, \beta) = 0$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$. Posons $S_i = \{\beta \in R \mid (\mu,\beta) = \frac{1}{3}i\}$, pour $i = 0$, ± 1, ± 2.

Soit $y \in W$ tel que $\mu - y\mu \in P(R)$, on a alors $\mu - y\mu = \sum_{i=1}^{6} a_i\varpi_i$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i $1 \le i \le 6$. Donc, pour tout $\beta \in R$, on a $(\mu - y\mu, \beta) = (\mu,\beta) - (\mu, y^{-1}\beta) \in \mathbb{Z}$. On en déduit $y^{-1}\alpha_1, y^{-1}\alpha_6 \in S_1 \cup S_{-2}$, $y^{-1}\alpha_i \in S_0$ pour $2 \le i \le 5$ et par conséquent $\mu - y\mu = a_1\varpi_1 + a_6\varpi_6$. Il est impossible d'avoir $y^{-1}\alpha_1 \in S_{-2}$ et $y^{-1}\alpha_6 \in S_{-2}$ car ceci entraîne $y\mu = -2\mu$ ce qui est impossible. Donc les seuls cas restant sont :

$$\begin{aligned}
y^{-1}\alpha_1 \in S_1 \quad &\text{et} \quad y^{-1}\alpha_6 \in S_1 \implies \mu - y\mu = 0,\\
y^{-1}\alpha_1 \in S_1 \quad &\text{et} \quad y^{-1}\alpha_6 \in S_2 \implies \mu - y\mu = \varpi_6,\\
y^{-1}\alpha_1 \in S_2 \quad &\text{et} \quad y^{-1}\alpha_6 \in S_1 \implies \mu - y\mu = \varpi_1.
\end{aligned}$$

Ceci démontre (ii).

3.7. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type E_7, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $R = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, $B = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\}$ une base de racines. Le groupe $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, engendré par l'image de ϖ_7. On pose $\Gamma = \{0, \varpi_7\}$. On note s_{α_k} par k. On définit l'homomorphisme ϕ en posant

$$t = \phi(\varpi_7) = 765432456134524376541234567.$$

Soit $\tilde{\alpha}$ la plus grande racine de R, *i.e.* $\tilde{\alpha} = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&t(\alpha_1) = \alpha_6, \quad t(\alpha_2) = \alpha_2, \quad t(\alpha_3) = \alpha_5,\\
&t(\alpha_4) = \alpha_4, \quad t(\alpha_5) = \alpha_3, \quad t(\alpha_6) = \alpha_1 \quad \text{et} \quad t(\alpha_7) = -\tilde{\alpha}.
\end{aligned}$$

On vérifie que $t^2 = 1$.

LEMME. — *Soit μ l'élément de $\mathfrak{h}^*$:*

$$\mu = \mu_\Gamma = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\varpi \in \Gamma} \varpi = \tfrac{1}{2}\varpi_7.$$

On a :

(i) $\mu - t\mu = \varpi_7$;

(ii) $(\mu - W\mu) \cap P(R) = \{0, \varpi_7\}$.

Preuve. — (i) est une simple vérification.

Pour tout $\beta \in R$, on a $(\mu, \check{\beta}) = (\mu, \beta) = 0, \pm\frac{1}{2}$. Posons $S_i = \{\beta \in R \mid (\mu, \beta) = \frac{1}{2}i\}$. Soit $y \in w$ tel que $\mu - y\mu \in P(R)$, on a alors $\mu - y\mu = a\varpi_7$ avec $a \in \mathbb{Z}$. Comme dans 3.6 on trouve $y^{-1}\alpha_7 \in S_1$ et $y^{-1}\alpha_i \in S_0$, avec $1 \leq i \leq 6$, et par conséquent $\mu - y\mu = \varpi_7$.

Ceci montre (ii).

3.8. — Soient $\overline{H}$ un sous groupe de $P(R)/Q(R)$ et $\mu = \mu_H = 1/|H| \sum_{\varpi \in H} \varpi$. D'après la PROPOSITION 3.1, l'ensemble $W_\mu = \{w \in W \mid \mu - w\mu \in Q(R)\}$ est réduit au stabilisateur de μ dans W.

LEMME 1.

(i) *Le module de Verma $M(y\mu)$ est simple pour tout $y \in W$.*

(ii) *Les modules de Harish-Chandra simples V, avec $\ell \operatorname{Ann}_{Z(g)} V = \operatorname{Ker} \chi_\mu$ et $r \operatorname{Ann}_{Z(g)} V = \operatorname{Ker} \chi_{-\mu}$ sont, à isomorphisme près, les modules $L(M(\phi(\varpi)\mu), M(\mu))$ avec $\varpi \in H$.*

Preuve.

(i) résulte de (*cf.* [4, 7.6.24]) et du fait que $(y\mu, \check{\alpha}) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (y\mu, \check{\alpha}) = 0$ pour tout $y \in W$.

(ii) résulte de la classification des modules de Harish-Chandra simples (*cf.* [5, 4.1]) et de la PROPOSITION 3.1.

LEMME 2. — *Supposons que $\varpi + \varpi' \equiv 0$ modulo $Q(R)$, avec ϖ et ϖ' dans H. Alors*

$$\phi(\varpi') \cdot \varpi = -\varpi'.$$

En effet on a $\varpi = \mu - \phi(\varpi)\mu$. D'où $\phi(\varpi')\varpi = \phi(\varpi')\mu - \phi(\varpi')\phi(\varpi)\mu$ ou encore $\phi(\varpi')\varpi = \phi(\varpi')\mu - \mu = -\varpi'$.

4. Endomorphismes $\mathfrak{k}$-finis des modules de Whittaker simples

4.1. — Soient $\overline{H}$ un sous groupe de $P(R)/Q(R)$ et $\mu = \mu_H$. Le théorème suivant donne une décomposition, suivant le groupe $\overline{H}$, de l'algèbre des endomorphismes $\mathfrak{k}$-finis, d'un module de Whittaker simple $\mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$, en somme directe de sous modules de Harish-Chandra simples, deux à deux non isomorphes.

THÉORÈME. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi simple complexe. Pour tout sous groupe $\overline{H}$ de $P(R)/Q(R)$ on a*

$$L\big(\mathrm{Wh}(\widehat{\mu}), \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})\big) \cong \bigoplus_{\varpi \in H} L\big(M(\phi(\varpi)\mu), M(\mu)\big).$$

Preuve. — D'après 1.6, $L := L(\mathrm{Wh}(\widehat{\mu}), \mathrm{Wh}(\widehat{\mu}))$ s'écrit $L = \bigoplus_{\varpi\in\Gamma} L_\varpi$ où $\overline{\Gamma} = P(R)/Q(R)$.

a) Soient $\varpi \in \Gamma$ et $\lambda \in (\varpi + Q(R)) \cap P(R)^+$. On a

$$\begin{aligned}[L_\varpi : E(\lambda)]_\mathfrak{k} &= [L : E(\lambda)]_\mathfrak{k} \\ &= \dim \mathrm{Hom}_\mathfrak{k}\big(E(\lambda), L\big) \\ &= \dim \mathrm{Hom}_\mathfrak{g}\big(E(\lambda) \otimes \mathrm{Wh}(\widehat{\mu}), \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})\big).\end{aligned}$$

D'après 2.2, le module $E(\lambda) \otimes \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$ possède une suite de Jordan-Hölder, avec des quotients simples isomorphes à $\mathrm{Wh}((\mu+\nu)\widehat{\ })$ où $\nu \in \Omega(E(\lambda))$, tel que $[E(\lambda) \otimes \mathrm{Wh}(\widehat{\mu}) : \mathrm{Wh}((\mu+\nu)\widehat{\ })]$ soit égale à la multiplicité de ν dans $E(\lambda)$. On en déduit donc que $[L_\varpi : E(\lambda)]_\mathfrak{k} \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$ est isomorphe à un sous-quotient de $E(\lambda) \otimes \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$. D'où

$$\begin{aligned}\big[L_\varpi : E(\lambda)\big]_\mathfrak{k} \neq 0 &\iff \exists\, \nu \in \Omega\big(E(\lambda)\big) \quad \text{avec} \quad \widehat{\mu} = (\mu+\nu)\widehat{\ } \\ &\iff \exists\, \nu \in \Omega\big(E(\lambda)\big) \quad \text{et} \quad \exists\, y \in W : \mu - y\mu = -\nu.\end{aligned}$$

D'après la PROPOSITION 3.1, ceci est encore équivalent à :

$$\exists\, \varpi' \in H : -\varpi' \in \Omega\big(E(\lambda)\big).$$

Or, si ϖ' existe, il doit vérifier $\varpi + \varpi' \in Q(R)$. Ceci montre, d'une part que

$$L_\varpi \neq 0 \iff \varpi \in H$$

et d'autre part que

$$\big[L_\varpi : E(\lambda)\big]_\mathfrak{k} \leq \dim E(\lambda)_{-\varpi'}$$

où $\varpi' \in H$ doit vérifier $\varpi + \varpi' \equiv O \bmod Q(R)$.

b) Soit $\varpi \in H$; d'après a), L_ϖ est un module de Harish-Chandra non nul. Soit $V \neq 0$ un sous-module simple de L_ϖ. D'après 3.8, V est nécessairement isomorphe à $L(M(\phi(\varpi)\mu), M(\mu))$. D'autre part, on a pour tout $E \in \mathfrak{k}^\frown$ (*cf.* [3, 6.8]),

$$[V : E]_{\mathfrak{k}} = \big[L(M(\mu - \varpi), M(\mu)) : E\big]_{\mathfrak{k}} = \dim E_\varpi.$$

Donc si $\lambda \in (\varpi + Q(R)) \cap P(R)^+$ on a, d'après a) et d'après le LEMME 2 du paragraphe 3.8

$$\begin{aligned}\dim E(\lambda)_{-\varpi'} &= \dim E(\lambda)_\varpi = [V : E(\lambda)]_{\mathfrak{k}} \\ &\leq [L_\varpi : E(\lambda)]_{\mathfrak{k}} \leq \dim E(\lambda)_{-\varpi'}.\end{aligned}$$

D'où finalement

$$L_\varpi = V \simeq L\big(M(\mu - \varpi), M(\mu)\big) = L\big(M(\phi(\varpi)\mu), M(\mu)\big).$$

En particulier, on a pour tout $\lambda \in (\varpi + Q(R)) \cap P(R)^+$

$$[L_\varpi : E(\lambda)] = \dim E(\lambda)_\varpi.$$

4.2. — Soit $\mu = \mu_H$. Posons $M = \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$ et $L = L(M, M)$. Alors

$$L = \bigoplus_{\varpi \in H} L_\varpi.$$

Soient ϖ_1 et ϖ_2 deux éléments de H. D'après la simplicité de M on a

$$L_{\varpi_1} \cdot L_{\varpi_2} M = L_{\varpi_1} M = M.$$

D'où $L_{\varpi_1} \cdot L_{\varpi_2} \neq 0$. D'autre part, puisque les poids de $U(g)$ pour l'action adjointe de $\mathfrak{g}$, n'appartiennent qu'à $Q(R)$, on a

$$L_{\varpi_1} \cdot L_{\varpi_2} \subset L_{\varpi_1 + \varpi_2}.$$

Comme $L_{\varpi_1} \cdot L_{\varpi_2}$ est un $U(g)$-bimodule et que $L_{\varpi_1 + \varpi_2}$ est simple on a

$$L_{\varpi_1} \cdot L_{\varpi_2} = L_{\varpi_1 + \varpi_2}$$

ainsi L est un anneau (fortement) gradué par le groupe $\overline{H}$.

PROPOSITION.

(i) $L_0 = U(\mathfrak{g}) / \operatorname{Ann} M$ *est un sous-anneau simple complètement premier de* L.

(ii) *L est simple.*

(iii) *Tout élément homogène de L est non diviseur de* 0.

L'action de $U(\mathfrak{g})$ sur M, permet par passage au quotient, de plonger $U(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M$ dans $L(M,M)$. D'autre part

$$U(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M = U(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M(\mu) \simeq L\big(M(\mu), M(\mu)\big).$$

Comme $I(\mu) = U(\mathfrak{g})\operatorname{Ker}\chi_\mu = \operatorname{Ann} M(\mu)$, est un idéal primitif complètement premier, on a $L_0 = U(\mathfrak{g})/I(\mu)$ est intègre ; d'autre part L_0 est simple, puisqu'il est simple comme $U(\mathfrak{g})$-bimodule. Ceci montre (i).

Soit K un idéal de L, alors K est un $U(\mathfrak{g})$-sous-bimodule de L, qui est somme directe de sous-modules simples L_ϖ, deux à deux non isomorphes, et par conséquent K contient ses composantes homogènes.

Supposant $K \neq 0$, on a $L_\varpi \subset K$ avec $\varpi \in H$. D'où $L_{-\varpi}L_\varpi = L_0 \subset K$ et puis $K = L$. Ceci montre (ii).

Soient ϖ_1 et ϖ_2 dans H, $a \in L_{\varpi_1}$ et $b \in L_{\varpi_2}$, a et b non nuls. On a

$$L_{-\varpi_1}a \neq 0 \quad \text{et} \quad bL_{-\varpi_2} \neq 0.$$

En effet $L_{-\varpi_1}a = 0$ entraîne $L_{\varpi_1}L_{-\varpi_1}a = L_0 a = 0$, puis $L_0 aM = 0$, d'où aM est un sous-module de M, ce qui donne $a = 0$ ou $L_0 M = 0$, ce qui est impossible.

De même $bL_{-\varpi_2} = 0$ entraîne $bL_{-\varpi_2}M = bM = 0$, d'où $b = 0$, ce qui est impossible.

Il existe donc $a' \in L_{-\varpi_1}$ et il existe $b' \in L_{-\varpi_2}$ tels que $a'a \neq 0$ et $bb' \neq 0$. Comme L_0 est intègre on a

$$(aa')(bb') = a'(ab)b' \neq 0.$$

D'où $ab \neq 0$. Ceci montre (iii).

5.1. Le cas de $g = \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$. (*cf.* [**9, 2.3**]). — On a dans ce cas $\Gamma = \{0, \varpi\}$ et $\mu = \frac{1}{2}\varpi = \frac{1}{2}\rho = \frac{1}{4}\alpha$. On pose $M = \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$, le module de Whittaker simple, de caractère χ_μ. D'après le THÉORÈME 4.1, l'algèbre $L = L(M,M)$ se décompose en somme directe de sous -$U(\mathfrak{g})$-bimodules simples

$$L = L_0 \oplus L_1$$

et on a

$$[L : E(\varpi)] = 1.$$

On notera alors F_1 le $\mathfrak{k}$-type minimal de L isomorphe à $E(\varpi)$. Il est de dimension 2. On note F_0 l'image de $\mathfrak{g}$ dans L_0.

Soient E un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie, et $p \geq 2$ un entier naturel. On désigne par $A^p(E)$ (resp. $S^p(E)$), le sous-$\mathfrak{g}$-module de $\bigotimes^p E$, formé des tenseurs antisymétriques (resp. symétriques). On a besoin du lemme suivant qui se déduit de (*cf.* [7, 5.9.]).

LEMME. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi simple complexe, U un quotient primitif de $U(\mathfrak{g})$, et F un* $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$*-sous-module non nul de U. Si $[F,F]=0$ alors $F=\mathbb{C}\cdot 1$.*

Preuve. — Sinon la sous-algèbre de U engendrée par F, serait commutative, $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$-stable et non réduite aux scalaires, ce qui est exclu par (*cf.* [7, 5.9]).

PROPOSITION. — *L'algèbre L est isomorphe à l'algèbre de Weyl A_1.*

Preuve. — D'après la formule des caractères de Weyl

$$F_1 \otimes F_2 \equiv E(0) \oplus E(2\varpi) = E(0) \oplus E_{\mathrm{ad}}.$$

D'après la PROPOSITION 4.2(iii)

$$F_1^2 \neq 0.$$

Comme on a

$$S^2(F_1) \cong E_{\mathrm{ad}} \longrightarrow F_1^2 \longrightarrow 0,$$

F_1^2 est isomorphe à E_{ad}. Si $[F_1,F_1]=0$, alors F_1^2 serait $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$-stable commutative non réduite aux scalaires, ce qui contredit le lemme. Donc

$$[F_1,F_1] \neq 0.$$

D'autre part on a

$$A^2(F_1) \cong E(0) \longrightarrow [F_1,F_1] \longrightarrow 0.$$

On en déduit que

$$[F_1,F_1] = \mathbb{C}\cdot 1$$

on peut alors choisir une base $\{p,q\}$ de F_1 telle que

$$[p,q]=1.$$

On a alors

$$\mathbb{C}q^2 + \mathbb{C}(qp+pq) + \mathbb{C}p^2 \cong S^2(F_1) \cong E_{\mathrm{ad}}.$$

Comme on a $[L:E_{\mathrm{ad}}]_{\mathfrak{k}} = 1$, il résulte que

$$F_0 = \mathbb{C}q^2 + \mathbb{C}(qp+pq) + \mathbb{C}p^2.$$

D'où la proposition puisque L est engendré par F_0 et F_1.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On peut montrer facilement que

$$L = L\big(\mathrm{Wh}\big((\mu + n\varpi)^\frown\big), \mathrm{Wh}((\mu + n\varpi)^\frown)\big)$$

admet la même structure de $U(\mathfrak{g})$-bimodules que $L(\mathrm{Wh}(\widehat{\mu}), \mathrm{Wh}(\widehat{\mu}))$. Pour $n = 1$, un calcul simple montre que L est isomorphe à l'algèbre des opérateurs différentiels sur la courbe $x^2 = y^3$. (*cf.* Smith).

5.2. Le cas de $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_3(\mathbb{C})$. — On a dans ce cas

$$\Gamma = \{0, \varpi_1, \varpi_2\} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{3}(\varpi_1 + \varpi_2) = \frac{1}{3}\rho.$$

On pose $M = \mathrm{Wh}(\widehat{\mu})$, le module de Whittaker simple, de caractère χ_μ. D'après le THÉORÈME 4.1, l'algèbre $L = L(M, M)$ se décompose en somme directe de sous-$U(\mathfrak{g})$-bimodules simples

$$L = L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$$

et on a

$$[L : E(\varpi_i)]_{\mathfrak{k}} = 1 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2.$$

On notera alors F_i le $\mathfrak{k}$-type minimal de L_i isomorphe à $E(\varpi_i)$. On note F_0 l'image de $\mathfrak{g}$ dans L_0. Soit $\mathfrak{g}_2$ l'algèbre de Lie simple exceptionnelle de dimension 14. D'après (*cf.* [8, 6.3, Table]) il existe un unique idéal primitif complètement premier J_0 ; vérifiant $GK\dim(U(g)/J_0) = 6$.

Si on désigne par ϖ_α et ϖ_β, les poids fondamentaux de $\mathfrak{g}_2$, correspondants à α racine courte et β racine longue, on a

$$J_0 = \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})} L(\varpi_\alpha + \frac{1}{3}\varpi_\beta).$$

PROPOSITION. — *$\mathcal{L} := F_0 \oplus F_1 \oplus F_2$ est une algèbre de Lie simple, isomorphe à $\mathfrak{g}_2$. De plus on a*

$$L \cong U(\mathfrak{g}_2)/J_0.$$

En particulier L est intègre.

Preuve.

a) Il est clair que $[F_0, F_i] \subset F_i$ pour $i = 1, 2$.

b) D'après la formule de caractères de Weyl

$$F_1 \otimes F_1 \cong E(\varpi_2) \oplus E(2\varpi_1);$$

$$\bigotimes^3 F_1 \cong E(0) \oplus E(\varpi_1 + \varpi_2) \oplus E(\varpi_1 + \varpi_2) \oplus E(3\varpi_1).$$

D'autre part, $A^2(F_1)$ est un ad $\mathfrak{g}$-module non nul de dimension 3 isomorphe $E(\varpi_2)$. D'où

$$E(\varpi_2) \cong A^2(F_1) \longrightarrow [F_1, F_1] \longrightarrow 0.$$

Comme $E(\varpi_2)$ est de multiplicité 1 dans L, on a $[F_1, F_1] \subset F_2$.

Si $[F_1, F_1] = 0$, alors d'après la PROPOSITION 4.2 (iii) $0 \neq F := F_1^3 \subset L_0$, satisfait à l'hypothèse du lemme, d'où $F = \mathbb{C} \cdot 1$. D'autre part, $S^3(F_1)$ est un $\mathfrak{g}$-module non nul de dimension 10 isomorphe à $E(3\varpi_1)$, d'où

$$E(3\varpi_1) \cong S^3(F_1) \longrightarrow F_1^3 \longrightarrow 0.$$

Ceci contredit $F_1^3 = \mathbb{C}{\cdot}1$. On a donc $[F_1, F_1] = F_2$. De même, $[F_2, F_2] = F_1$.

c) Montrons que $[F_1, F_2] = F_0$, ce qui établira que $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie simple de dimension 14, isomorphe à $\mathfrak{g}_2$. On a

$$F_2 = [F_1, F_1] = \big[F_1, [F_2, F_2]\big].$$

D'après l'identité de Jacobi on a

$$F_2 \subset \big[[F_1, F_2], F_2\big],$$

de telle sorte que $[F_1, F_2]$ est non nul. Soit q_1 un vecteur de plus haut poids ϖ_1 dans F_1. On pose

$$q_2 = [X_{-\alpha_1}, q_1], \quad q_3 = [X_{-\alpha_2}, q_2].$$

Le système $\{q_i\}_{i=1,2,3}$ est alors une base de F_1, formée de vecteurs de poids. On pose $p_3 = [q_1, q_2]$. C'est un vecteur de poids ϖ_2 dans F_2. On définit enfin

$$p_2 = [X_{-\alpha_2}, p_3], \quad p_1 = [X_{-\alpha_1}, p_1].$$

On a alors

$$p_2 = [q_1, q_3], \quad p_1 = [q_2, q_3].$$

Le système $\{p_i\}_{i=1,2,3}$ est alors une base de F_2, formée de vecteurs de poids. D'après la formule de caractères de Weyl

$$E(\varpi_1 + \varpi_2) \oplus E(0) \cong F_1 \otimes F_2 \longrightarrow [F_1, F_2] \longrightarrow 0.$$

La représentation triviale de $[F_1, F_2]$ étant égale à

$$\sum_{i=1}^{3} [q_i, p_i] = \big[q_1, [q_2, q_3]\big] + \big[q_2, [q_1, q_3]\big] + \big[q_3, [q_1, q_2]\big] = 0$$

on a

$$[F_1, F_2] \cong E(\varpi_1 + \varpi_2).$$

Montrons que $\sum_{i=1}^{3} q_i p_i$ est non nul. Comme $F_1 F_2$ est ad $\mathfrak{g}$-stable non nul, $F_1 F_2 U(g)$ est un sous-bimodule non nul de L_0, donc égal à L_0. On en déduit que la représentation triviale de L, qu'on note T se trouve dans $F_1 L_2$, il existe alors un module N simple de dimension finie dans L_2, tel que

$$T \subset F_1 N \quad \text{et} \quad F_1 \otimes N \longrightarrow F_1 N \longrightarrow 0.$$

D'où

$$N \cong F_1^* \cong E(\varpi_2)$$

et puis $N = F_2$, puisque $[E(\varpi_2) : L]_{\mathfrak{k}} = 1$. On a donc $\sum_{i=1}^{3} q_i p_i = 1$ à un scalaire non nul près.

Montrons que $m := [F_1 F_2 + F_2 F_1 : E(\varpi_1 + \varpi_2)]_{\mathfrak{k}} = 2$. On a :

$$0 \neq m \leq \big[L, E(\varpi_1 + \varpi_2)\big]_{\mathfrak{k}} = 2 \qquad \big(E(\varpi_1 + \varpi_2) = E_{\mathrm{ad}}\big).$$

Si $m = 1$, il existe un homomorphisme entre la copie de E_{ad} dans $F_1 F_2$ et celle dans $F_2 F_1$, par conséquent il existe un scalaire α, tel que l'on ait (par exemple)

$$q_1 p_2 = \alpha p_2 q_1 \quad \text{et} \quad q_3 p_2 = \alpha p_2 q_3.$$

D'où

$$p_2^2 = (q_1 q_3 - q_3 q_1) p_2 = \alpha^2 p_2 (q_1 q_3 - q_3 q_1) = \alpha^2 p_2^2.$$

Comme $p_2^2 \neq 0$ on a $\alpha^2 = 1$.

Supposons que $\alpha = 1$. Comme $\sum_{i=1}^{3} [q_i, p_i] = 0$, on aura $[F_1, F_2] = 0$, ce qui est impossible. Supposons $\alpha = -1$. On trouve

$$q_1 p_2 + p_2 q_1 = 0.$$

D'où

$$[q_1^2, q_3] = q_1 p_2 + p_2 q_1 = 0$$

$$[q_1^2, q_2] = q_1 p_3 + p_3 q_1 = 0$$

de sorte que

$$[q_1^2, F_1] = 0.$$

Mais q_1^2 est le générateur de $F := S^2(F_1) \cong E(2\varpi_1)$, qui est un module simple. Donc $[F, F_1] = 0$, et par conséquent $[F, F] = 0$.

On pose $G = F^3$, il contient le vecteur q_1^6 qui est non nul, et qui engendre un sous ad g-module simple isomorphe à $E(6\varpi_1)$ contenu dans L_0. Comme $[G, G] = 0$, il y a contradiction avec le lemme. On a donc $m = 2$ de telle sorte que F_0 est un sous-module de $F_1 F_2 + F_2 F_1$.

Il existe donc un scalaire α tel que

$$q_1 p_2 = \alpha p_2 q_1 + e_{12}$$

où $e_{12} \in F_0$ est un vecteur de poids α_1. Comme e_{12} est proportionnel à $X_{\alpha_1}, [q_1, e_{12}] = 0$. D'où

$$q_1^2 p_2 = \alpha q_1 p_2 q_1 + q_1 e_{12} \quad \text{et} \quad q_1 p_2 q_1 = \alpha p_2 q_1^2 + e_{12} q_1.$$

De sorte que

$$q_1^2 p_2 - q_1 p_2 q_1 = \alpha(q_1 p_2 q_1 - p_2 q_1^2).$$

Ou encore

$$q_1[q_1, p_2] = \alpha[q_1, p_2]q_1 \quad \text{et} \quad q_1^3[q_1, p_2] = \alpha^3[q_1, p_2]q_1^3.$$

La filtration de L_0, induite par la filtration canonique de $U(g)$, est telle que le gradué $\operatorname{gr} L_0$ est commutatif intègre, donc puisque q_1^3 et $[q_1, p_2]$ sont deux éléments non nuls de L_0, on a

$$\begin{aligned}(\operatorname{gr} q_1^3)\operatorname{gr}([q_1, p_2]) &= \operatorname{gr}(q_1^3[q_1, p_2]) \\ &= \alpha^3 \operatorname{gr}([q_1, p_2]q_1^3) \\ &= \alpha^3 \operatorname{gr}([q_1, p_2]) \operatorname{gr} q_1^3.\end{aligned}$$

D'où $\alpha^3 = 1$. Supposons $\alpha \neq 1$. Alors $[q_1, p_2]$ s'exprime comme somme de deux contributions, de bons poids, des deux représentations adjointes. On a alors

$$[q_1, p_2] = a e_{12} + b(He_{12} + e_{13}e_{32}),$$

avec a et b scalaires et $H = [e_{12}, e_{21}] + 2[e_{23}, e_{32}] \in \mathfrak{h}$. Comme $[q_1, e_{12}] = [q_1, e_{13}] = [q_1, e_{32}] = 0$, on a

$$[q_1^3, [q_1, p_2]] = 0 \Longrightarrow [q_1^3, H] = 0.$$

D'où la contradiction. On a donc $\alpha = 1$ et $[q_1, p_2] = e_{12}$. Par conséquent :

$$[F_1, F_2] = F_0.$$

d) Il est clair que la sous algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est encore une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_2$. On note $\mathcal{R} = R(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h})$ le système de racines de $\mathfrak{g}_2$ relativement à $\mathfrak{h}$. On pose

$$\alpha = \varpi_1 - \alpha_1 \quad \text{et} \quad \beta = \alpha_1.$$

On vérifie alors que $\{\alpha, \beta\}$ constitue une base de racines de $\mathcal{R}$, avec α racine courte et β racine longue. On désigne par ϖ_α et ϖ_β les poids fondamentaux correspondants. On a alors le tableau suivant :

Racines positives longues	Racines positives courtes
$\beta = \alpha_1$	$\alpha = \varpi_1 - \alpha_1$
$3\alpha + \beta = \alpha_2$	$\alpha + \beta = \varpi_1$
$3\alpha + 2\beta = \alpha_1 + \alpha_2$	$2\alpha + \beta = \varpi_2$

Poids fondamentaux

$$\varpi_\alpha = 2\alpha + \beta = \varpi_2$$
$$\varpi_\beta = 3\alpha + 2\beta = \varpi_1 + \varpi_2 = \rho$$

Posons $\mathfrak{m}^+ = \oplus_{\nu \in \mathcal{R}^+} \mathbb{C} X_\nu$ $\mathfrak{m}^- = {}^t\mathfrak{m}^+$, comme $R^+ \subset \mathcal{R}^+$ on a $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{m}^+$.

e) L'injection de $\mathfrak{g}_2$ dans L, se prolonge en un homomorphisme d'algèbres de $U(\mathfrak{g}_2)$ dans L. Cet homomorphisme est surjectif puisque chaque composante de L est engendré par son $\mathfrak{k}$-type minimal. D'autre part, M étant un L-module simple fidèle, L est une algèbre primitive. L'idéal I de $U(\mathfrak{g}_2)$ tel que L soit isomorphe $U(\mathfrak{g}_2)/I$ est alors un idéal primitif. D'après le théorème de Duflo, il existe λ dans h^* tel que $I = \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g}_2)} L(\lambda) = I(\lambda)$, où $L(\lambda)$ est l'unique quotient simple du module de Verma $M(\lambda)$ associé à $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}, \mathfrak{m}^+, \lambda$. Comme on a un plongement de $L_O = U(\mathfrak{g}))/I(\mu)$ dans $U(\mathfrak{g}_2)/I(\lambda)$, il vient que $I(\lambda) \cap U(\mathfrak{g}) = I(\mu)$.

Soit $e_\lambda \in L(\lambda)$, un vecteur non nul de plus haut poids $\lambda - \rho_{\mathfrak{g}_2}$. Puisque $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{m}^+$ et d'après (*cf.* [4, 7.1.8]) on a $U(\mathfrak{g})e_\lambda$ est une image du module de Verma $M(\lambda - \rho_{\mathfrak{g}_2} + \rho)$ associé à $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}^+$, $\lambda - \rho_{\mathfrak{g}_2}$. On en déduit alors

$$\chi_\mu = \chi_{\lambda - \rho_{\mathfrak{g}_2} + \rho} = \chi_{\lambda - \varpi_\alpha}.$$

D'où

$$\exists\ y \in W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) : \lambda = y\mu + \varpi_\alpha.$$

Posons

$$\theta_1 = \varpi_\alpha + \tfrac{1}{3}\varpi_\beta, \quad \theta_2 = 2\varpi_\alpha - \tfrac{2}{3}\varpi_\beta, \quad \theta_3 = \varpi_\alpha + \tfrac{1}{3}\varpi_\beta.$$

On montre par un calcul simple que

$$\lambda \in \{\theta_1, S_\beta\theta_1, \theta_2, S_\beta\theta_2, \theta_3, S_\beta\theta_3\}.$$

Comme $\beta \notin \mathcal{R}_{\theta_i} : i = 1, 2, 3$ et d'après (*cf.* [6, 5.14]) on a

$$I(\theta_i) = I(S_\beta\theta_i) : i = 1, 2, 3.$$

Par conséquent $\lambda \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$.

Soit $e_\lambda \in L(\lambda)$, un vecteur non nul de poids $\lambda - \rho_{\mathfrak{g}_2}$, et soit C l'élément de $U(\mathfrak{g})$:

$$C = \sum_{\alpha \in R} X_{-\alpha} X_\alpha + H_{\alpha_1}\left(\tfrac{2}{3} H_{\alpha_1} + \tfrac{1}{3} H_{\alpha_2}\right) + H_{\alpha_2}\left(\tfrac{1}{3} H_{\alpha_1} + \tfrac{2}{3} H_{\alpha_2}\right).$$

D'après (*cf.* [3, 7.8.5]), $C \in Z(g)$. D'où

$$C - \chi_\mu(C) \in I(\mu) = U(\mathfrak{g}) \cap I(\lambda)$$

et par suite

$$0 = \left[C - \chi_\mu(C)\right] \cdot e_\lambda = C \cdot e_\lambda - \chi_\mu(C) e_\lambda.$$

On vérifie alors que nécessairement $\lambda = \theta_1 = \varpi_\alpha + \frac{1}{3}\varpi_\beta$.

Finalement $I = I(\varpi_\alpha + \frac{1}{3}\varpi_\beta) = J_0$ est l'idéal de Joseph, c'est l'unique idéal primitif complètement premier, de dimension Gelfand-Kirillov égale à 6 (*cf.* [8]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNSTEIN (J.) and GELFAND (S.I.). — Tensor product of finite and infinite dimensional representations of semi-simple Lie algebras, *Compositio Math.*, t. **41**, 1981, p 245–285.

[2] BOURBAKI (N.). — Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV, V, VI.

[3] CONZE (N.). — Algèbres d'opérateurs différentiels et quotients des algèbres enveloppantes, *Bull. Soc. Math. France*, t. **102**, 1974, p 379–415.

[4] DIXMIER (J.). — *Algèbres enveloppantes, Cahiers scientifiques XXXVII.* — Gauthiers-Villars, Paris, 1974.

[5] DUFLO (M.). — Représentations irréductibles des groupes semi simples complexes, *Lecture Notes in Math.*, t. **497**, 1975, p 26–88.

[6] JANTZEN (J.C.). — Einhüllenden Algebren helbeinfacher Lie-Algebren, *Ergebbnisse der Mathematik, Berlin Springer*, 1983.

[7] JOSEPH (A.). — On the Gelfand-Kirrillov conjecture, for induced ideals in the semi simple case, *Bull. Soc. Math. France*, t. **107**, 1979, p 139–159.

[8] JOSEPH (A.). — The minimal orbit in a simple Lie algebra and its assiciated maximal ideal, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, t. **9**, 1976, p 1–30.

[9] JOSEPH (A.). — Kostant's problem and Goldie rank, *Lecture Notes in Math.*, t. **880**, 1981, p 249–266.

[10] JOSEPH (A.) and STAFFORD (J.T.). — Modules of $\mathfrak{k}$-finite vectors over semi simple Lie algebras, *London Math. Soc. (3)*, t. **49**, 1984, p 361–384.

[11] KOSTANT (B.). — On Whittaker vectors, and representation theory, *Invent. Math.*, t. **48**, 1978, p 101–184.