

BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Sur une formule de M. Hermite

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 42-45

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__42_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__42_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur une formule de M. Hermite ; par M. HUMBERT.

(Séance du 19 novembre 1880.)

M. Hermite a démontré que la fonction

$$\frac{H(x+a)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x} = f(x, a)$$

satisfait à l'équation de Lamé dans le cas de $n = 1$:

$$(1) \quad f''(x, a) = (2k^2 \operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2 a) f(x, a).$$

Il a donné aussi la formule

$$(2) \quad B \int f(x, a) f(x, b) dx = \frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)} e^{-\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right]x}.$$

Cette formule suffit pour démontrer un certain nombre de pro-

priétés des fonctions $f(x, a)$; comme application, on se propose ici d'en tirer la relation (1).

On partira pour cela de la décomposition de $\frac{\theta(x+a+b)\theta(x)}{H(x+a)H(x+b)}$ en éléments simples.

On aura une expression de la forme

$$\frac{\theta(x+a+b)\theta(x)}{H(x+a)H(x+b)} = \alpha + \beta \frac{H'}{H}(x+a) + \gamma \frac{H'}{H}(x+b).$$

β et γ sont de signes contraires. En effet, β est le résidu relatif au pôle $x = -a$:

$$\beta = \frac{\theta(b)\theta(a)}{H'(0)H(b-a)},$$

$$\gamma = \frac{\theta(b)\theta(a)}{H'(0)H(a-b)}.$$

On a donc, en désignant par C une constante,

$$C \frac{\theta(x+a+b)\theta(x)}{H(x+a)H(x+b)} = \alpha + \frac{H'}{H}(x+a) - \frac{H'}{H}(x+b),$$

faisant

$$x = ik',$$

$$0 = \alpha + \frac{\theta'}{\theta}(a) - \frac{\theta'}{\theta}(b).$$

Donc

$$C \frac{\theta(x+a+b)\theta(x)}{H(x+a)H(x+b)} = \left[\frac{H'(x+a)}{H(x+a)} - \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} \right] - \left[\frac{H'(x+b)}{H(x+b)} - \frac{\theta'(b)}{\theta(b)} \right].$$

L'équation (2) s'écrit alors, A étant une constante,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & A \int f(x, a) f(x, b) dx \\ &= e^{-\left[\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{\theta'(b)}{\theta(b)}\right]x} \left\{ \frac{H(x+a)H(x+b)}{\theta^2(x)} \left[\frac{\theta'(b)}{\theta(b)} - \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{H'(x+a)H(x+b) - H'(x+b)H(x+a)}{\theta^2(x)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Or on a

$$f(x, a) = \frac{H(x+a)}{\theta(x)} e^{-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}x},$$

$$f'_x(x, a) = \left[\frac{H'(x+a)}{\theta(x)} - \frac{H(x+a)\theta'(x)}{\theta^2(x)} - \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} \frac{H(x+a)}{\theta(x)} \right] e^{-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}x}.$$

Si l'on calcule la fonction

$$f'_x(x, a) f(x, b) - f'_x(x, b) f(x, a),$$

on trouve le second membre de (3). Donc

$$(4) \quad A \int f(x, a) f(x, b) dx = f'(x, a) f(x, b) - f'(x, b) f(x, a).$$

On en tire

$$A f(x, a) f(x, b) = f''_x(x, a) f(x, b) - f''_x(x, b) f(x, a),$$

d'où

$$(5) \quad \frac{f''(x, a) - A f(x, a)}{f(x, a)} = \frac{f''(x, b)}{f(x, b)}.$$

A est une fonction de a et de b ; soit A' sa valeur pour $b = 0$.

On a, en faisant $x = b$ dans l'équation précédente,

$$\frac{f''(x, a) - A' f(x, a)}{f(x, a)} = \frac{\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} x} = 2k^2 \sin^2 x - 1 - k^2.$$

Donc

$$f''(x, a) = f(x, a) (2k^2 \sin^2 x - 1 - k^2 + A').$$

Pour calculer A' , faisons $x = 0$. On trouve aisément

$$-1 - k^2 + A' = \frac{H'(a)}{H(a)} - \frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - \frac{2\theta'(a)}{\theta(a)} \frac{H'(a)}{H(a)} + \frac{\theta'^2(a)}{\theta^2(a)},$$

ou, en tenant compte de ce que

$$\frac{d^2}{da^2} \left[\frac{H(a)}{\theta(a)} \right] = \frac{H(a)}{\theta(a)} (2k^2 \sin^2 a - 1 - k^2),$$

il vient

$$-1 - k^2 + A' = \frac{-\theta''(0)}{\theta(0)} - \frac{\theta'^2(a)}{\theta^2(a)} + \frac{\theta''(a)}{\theta(a)} + 2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 - k^2.$$

Or, à l'aide de la relation

$$\operatorname{sn}^2(a) = \frac{1}{k^2} \left[\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - D_a \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} \right],$$

on déduit

$$A' = + k^2 \operatorname{sn}^2 a.$$

Donc l'équation différentielle prend la forme

$$f''(x, a) = f(x, a)(2k^2 \operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2 a),$$

que lui a donnée M. Hermite.

Inversement, on peut déduire de l'équation la formule qui vient d'y conduire, en employant un procédé bien connu. On a

$$\begin{aligned} & \int f(x, a) f(x, b) (2k^2 \operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2 a) dx \\ &= \int f''(x, a) f(x, b) dx \\ &= +f'(x, a) f(x, b) - f(x, a) f'(x, b) + \int f''(x, b) f(x, a) dx. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & \int f(x, a) f''(x, b) dx \\ &= \int f(x, a) f(x, b) (2k^2 \operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2 b) dx; \end{aligned}$$

par suite,

$$\int f(x, a) f(x, b) (k^2 \operatorname{sn}^2 a - k^2 \operatorname{sn}^2 b) dx = f'(x, a) f(x, b) - f(x, a) f'(x, b),$$

ce qui est bien la formule (2) mise sous la forme (4).