

BULLETIN DE LA S. M. F.

ANNE-MARIE AUBERT

**Conservation de la ramification modérée par
la correspondance de Howe**

Bulletin de la S. M. F., tome 117, n° 3 (1989), p. 297-303

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_3_297_0

© Bulletin de la S. M. F., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSERVATION DE LA RAMIFICATION MODÉRÉE PAR LA CORRESPONDANCE DE HOWE

PAR

ANNE-MARIE AUBERT (*)

RÉSUMÉ. — La conjecture de Howe a été prouvée pour les paires réductives duales non ramifiées de type I , (cf. [1, chapitre 5]). Pour de telles paires, on étudie la correspondance de Howe pour des représentations modérément ramifiées, *i.e.* ayant un vecteur non nul invariant par un sous-groupe d'Iwahori, ou plus généralement par un sous-groupe parahorique.

Soit F un corps p -adique ($p \neq 2$) et (U_1, U_2) une paire réductrice duale irréductible non ramifiée de type I sur F . Soit F' égal à F ou à son extension quadratique non ramifiée. On note \mathcal{O}' l'anneau des entiers de F' . Le groupe U_i s'identifie au groupe des isométries d'un espace hermitien W_i sur F' . On considère l'espace symplectique $W = W_1 \otimes_{F'} W_2$. Notons $\tilde{\mathrm{Sp}}(W)$ le groupe métaplectique, extension par \mathbb{C}^\times du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$ et \tilde{U}_i l'image réciproque de U_i dans $\tilde{\mathrm{Sp}}(W)$. On considère des sous-groupes d'Iwahori I_1 and I_2 de \tilde{U}_1 et \tilde{U}_2 respectivement. Réalisons la représentation de Weil du groupe métaplectique $\tilde{\mathrm{Sp}}(W)$ dans un modèle S .

Le résultat principal est le suivant : le \tilde{U}_2 -module S^{I_1} formé des vecteurs I_1 -invariants de S est engendré par l'espace des $I_1 \times I_2$ -invariants. Nous donnons une application de ce résultat à la correspondance de Howe.

Considérons une représentation (π_1, V_1) de \tilde{U}_1 lisse irréductible telle que $V_1^{I_1} \neq \{0\}$, où I_1 est un sous-groupe d'Iwahori de U_1 . Soit (π_2, V_2) l'image de (π_1, V_1) par la correspondance de Howe. Alors $V_2^{I_2} \neq \{0\}$, pour un certain sous-groupe d'Iwahori I_2 de U_2 .

ABSTRACT. — The Howe conjecture has been proven for unramified irreducible reductive dual pairs of type I . We study the Howe correspondence for such pairs for tamely ramified representations, *i.e.* representations which admit a fixed vector by an Iwahori subgroup.

Let F be a p -adic field ($p \neq 2$) and let (U_1, U_2) be an unramified irreducible reductive dual pair of type I over F . Let F' be either F or its unramified quadratic extension. We denote by \mathcal{O}' the ring of integers of F' . There is a natural identification of U_i with the isometry group of an hermitian space W_i over F' . Consider the symplectic space $W = W_1 \otimes_{F'} W_2$. We denote by $\tilde{\mathrm{Sp}}(W)$ the metaplectic group, extension by \mathbb{C}^\times of the symplectic group $\mathrm{Sp}(W)$ and by \tilde{U}_i the inverse image of U_i in $\tilde{\mathrm{Sp}}(W)$. Consider

(*) Texte reçu le 14 avril 1988, révisé le 18 juillet 1988.

A.-M. AUBERT, École Normale Supérieure, D.M.I., 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.

some Iwahori subgroups I_1 and I_2 of U_1 and U_2 respectively. We realize the Weil representation of the metaplectic group $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ in a model S .

The main result is : *The \widetilde{U}_2 -module S^{I_1} consisting of the I_1 -fixed vectors in S is generated by the space of $I_1 \times I_2$ -invariants.* We give an application of that result to the Howe correspondence.

Consider an irreducible smooth representation (π_1, V_1) of \widetilde{U}_1 with $V_1^{I_1} \neq \{0\}$, where I_1 is an Iwahori subgroup of U_1 . Let (π_2, V_2) be the image of (π_1, V_1) in the Howe correspondence. Then $V_2^{I_2} \neq \{0\}$, for some Iwahori subgroup I_2 of U_2 .

La conjecture de Howe pour les paires réductives duales non ramifiées a été prouvée par HOWE, [7, chapitre 5]. Sur un corps p -adique F , ($p \neq 2$), considérons une telle paire (U_1, U_2) dans $\mathrm{Sp}(2n, F)$ et un modèle (ω, S) de la représentation de Weil du groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F)$.

Nous dirons qu'une représentation irréductible, ayant un vecteur non nul invariant par un sous-groupe d'Iwahori, est *modérément ramifiée*. Nous avons montré dans [1] que, dans la correspondance de Howe, l'image d'une représentation modérément ramifiée de U_1 est une représentation modérément ramifiée de U_2 .

La preuve figurant dans [1], qui utilise le modèle latticiel de la représentation de Weil, est relativement technique. Le présent article fournit une démonstration plus algébrique de ce résultat. Je remercie grandement Marie-France VIGNÉRAS qui m'a suggéré cette méthode.

1. Généralités

1.1. Quelques définitions et notations. — Soient F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle différente de 2 à corps résiduel fini, \mathcal{O} son anneau des entiers, ϖ une uniformisante de F et ψ un caractère continu de F de conducteur \mathcal{O} . Soit F' égal à F ou à l'extension quadratique non ramifiée de F , et \mathcal{O}' son anneau des entiers.

Considérons une paire réductrice duale (U_1, U_2) , irréductible, non ramifiée sur F , de type I , (cf. [5, paragraphe 7]). Les groupes U_1 et U_2 sont, sous ces hypothèses, quasi-déployés.

Soient W l'espace symplectique associé à cette paire irréductible et (ω_ψ, S) un modèle de la représentation de Weil du groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$, extension par \mathbb{C}^\times de $\mathrm{Sp}(W)$. On notera $\widehat{\mathrm{Sp}}(W)$ le revêtement à deux feuillets de $\mathrm{Sp}(W)$, extension de $\mathrm{Sp}(W)$ par le groupe à deux éléments $\{1, \eta\}$.

Pour tout sous-groupe fermé G de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ nous noterons \widetilde{G} son image réciproque dans $\widehat{\mathrm{Sp}}(W)$.

Soit $i : \mathbb{C}^\times \rightarrow \widetilde{G}$ l'injection évidente. Dans tout l'article, les représenta-

tions (π, V) que nous considérerons, seront supposées vérifier l'hypothèse :

$$\pi \circ i(z) = z \operatorname{id}_V,$$

pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$. De telles représentations sont dites spécifiques.

Notons U l'un quelconque des membres de la paire (U_1, U_2) . La paire considérée étant non ramifiée, l'espace hermitien associé à U admet un réseau autodual L . Fixons un tel réseau L .

Nous appellerons *sous-groupe parabolique* de \tilde{U} , l'image réciproque \tilde{P} d'un sous-groupe parabolique P de U . Une décomposition de Lévi $P = MN$ se remonte en une décomposition dite encore de Lévi $\tilde{P} = \tilde{M}N$, le radical unipotent N d'identifiant canoniquement à un sous-groupe de \tilde{U} . Avec ces définitions, les résultats de [2, chapitre 1, paragraphe 2] s'appliquent à \tilde{U} .

Fixons un tore T de U et B un sous-groupe de Borel contenant T . Soit I le sous-groupe d'Iwahori standard de U correspondant à B . On note $\mathcal{H}(I \backslash \tilde{U} / I)$ l'algèbre des fonctions f sur \tilde{U} , bi-invariantes par I , à support compact modulo $i(\mathbb{C}^\times)$ et telles que

$$f(u(i(z))) = z^{-1}f(u)$$

pour tous $z \in \mathbb{C}^\times$, $u \in \tilde{U}$.

1.2. Un résultat préliminaire. — La proposition suivante est une généralisation à certaines représentations lisses du théorème de CASSELMAN [4, 3.3.3]. Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de U , qui contient B .

PROPOSITION. — Soit π une représentation lisse de \tilde{U} dans un espace V . La projection canonique de V sur son module de Jacquet V_N se restreint en un isomorphisme de V^I sur $(V_N)^{\tilde{M} \cap I}$.

Démonstration. — Nous sommes amenés à étudier au préalable l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(I \backslash \tilde{U} / I)$.

1. Supposons U scindé dans $\widetilde{\operatorname{Sp}}(W)$. Dans ce cas l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(I \backslash \tilde{U} / I)$ est isomorphe à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(I \backslash U / I)$ pour le groupe U lui-même. Il est alors bien connu que les fonctions caractéristiques des doubles classes IuI pour $u \in I \backslash U / I$, forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{H}(I \backslash U / I)$ et sont inversibles dans $\mathcal{H}(I \backslash U / I)$ (cf. par exemple [3, théorème 3.6]).

2. Supposons maintenant U non scindé dans $\widetilde{\operatorname{Sp}}(W)$. D'après les résultats du chapitre 3 de [7], le groupe U est dans ce cas un groupe

symplectique $U = \mathrm{Sp}(W')$. L'algèbre de Hecke considérée est alors isomorphe à la sous-algèbre $\mathcal{H}^-(I \backslash \widehat{\mathrm{Sp}}(W')/I)$ de $C_c(I \backslash \widehat{\mathrm{Sp}}(W')/I)$ formée des fonctions f qui vérifient : $f(\hat{g}\eta) = -f(\hat{g})$, pour tout $\hat{g} \in \widehat{\mathrm{Sp}}(W')$.

Notons $C(g)$ la fonction caractéristique de IgI pour $g \in \widehat{\mathrm{Sp}}(W')$. D'après un résultat de SAVIN (cf. [9, proposition 3.1.4]) les fonctions $C(w) - C(w\eta)$, pour w parcourant l'image réciproque dans $\widehat{\mathrm{Sp}}(W')$ du normalisateur du tore T , forment une base de $\mathcal{H}^-(I \backslash \widehat{\mathrm{Sp}}(W')/I)$ et sont inversibles.

La démonstration de la proposition I.4.3 de [8] s'applique alors sans changement.

1.3. Caractérisation des représentations modérément ramifiées.

Soit (π, V) une représentation de \tilde{U} , lisse et irréductible. D'après les résultats de [2, chapitre 1, paragraphe 2], il existe un sous-groupe parabolique $\tilde{P} = \tilde{M}\tilde{N}$ de \tilde{U} et une représentation $\pi_{\tilde{M}}$ irréductible, lisse, cuspidale de \tilde{M} telle que π soit sous-quotient de la représentation induite $\mathrm{Ind}_{\tilde{P}}^{\tilde{U}} \pi_{\tilde{M}}$. Soit \tilde{T} l'image réciproque dans \tilde{U} de T , qui est commutative. Soit ν un caractère de \tilde{T} , trivial sur $\tilde{T} \cap I$. Deux tels caractères se déduisent l'un de l'autre par un caractère non ramifié de T .

Notons alors $\mathrm{Alg}(\tilde{T}, \nu)$ la catégorie, définie par Bernstein, des représentations lisses de \tilde{U} dont tout sous-quotient irréductible intervient comme sous-quotient d'une représentation induite $\mathrm{Ind}_{\tilde{T}N}^{\tilde{U}} \nu \otimes \chi$, où χ est un caractère non ramifié de T , cf. [2, chapitre 1, proposition 2.8].

LEMME 1.3.1. — *Soit (π, V) une représentation spécifique lisse irréductible de \tilde{U} . La représentation π admet un vecteur non nul invariant par I si et seulement si elle appartient à $\mathrm{Alg}(\tilde{T}, \nu)$.*

Démonstration. — La représentation π appartient à $\mathrm{Alg}(\tilde{T}, \nu)$ si et seulement si π_N n'admet de composant cuspidal que pour N maximal et dans ce cas les seules représentations cuspidales qui interviennent sont de la forme $\nu \otimes \chi$.

Puisque ν est trivial sur $\tilde{T} \cap I$, cela revient à dire $(V_N)^{\tilde{T} \cap I} \neq \{0\}$, ce qui équivaut par la PROPOSITION 1.2 à $V^I \neq \{0\}$.

PROPOSITION 1.3.2. — *Soit (π, V) une représentation lisse de \tilde{U} . La représentation π appartient à $\mathrm{Alg}(\tilde{T}, \nu)$ si et seulement si V est \tilde{U} -engendré par V^I .*

Démonstration. — On utilise les résultats de BERNSTEIN, cf. [2, chapitre 1, paragraphe 2].

• Soit (π, V) telle que V soit \tilde{U} -engendré par V^I . Elle se décompose en somme directe :

$$\pi = \pi_1 \oplus \pi_2,$$

où π_1 appartient à $\text{Alg}(\tilde{T}, \nu)$ et π_2 appartient à une somme de sous-catégories de la catégorie des représentations lisses de \tilde{U} , en somme directe avec $\text{Alg}(\tilde{T}, \nu)$. On déduit alors de (1.3.1) que π_2 n'a pas d'invariant non nul par I et donc π appartient à $\text{Alg}(\tilde{T}, \nu)$.

• Réciproquement, soit $\pi \in \text{Alg}(\tilde{T}, \nu)$ et (π', V') la sous-représentation engendrée par V^I . Soit E un sous-quotient irréductible de V/V' . Puisque V/V' n'a pas d'invariant non nul par I , il résulte du LEMME 1.3.1 appliqué à E que $E = \{0\}$. On a donc $V/V' = \{0\}$.

2. Application à la représentation métaplectique

2.1. Le résultat fondamental. — Pour $i \in \{1, 2\}$, soient I_i , (resp. B_i), (resp. T_i), le sous-groupe d'Iwahori, (resp. le sous-groupe de Borel), (resp. le tore), associés comme en 1 à U_i .

THÉORÈME. — *L'espace S^{I_1} est \tilde{U}_2 -engendré par ses I_2 -invariants.*

Démonstration. — On utilise les calculs explicites des coinvariants de [6, théorème 2.8].

1. Supposons U_1 compact.

(a) Supposons U_2 compact. Dans ce cas $U_1 \times U_2$ est inclus dans le stabilisateur d'un réseau autodual de W . Sous ces hypothèses S est semi-simple sous l'action de $U_1 \times U_2$ et le résultat cherché résulte de $S^{U_1 \times U_2} \neq \{0\}$ et de la conjecture de Howe.

(b) Supposons maintenant U_2 non compact. Calculons le module de Jacquet S_{N_2} pour un sous-groupe parabolique $P_2 = M_2 N_2$ de U_2 , stabilisateur d'un sous-espace totalement isotrope maximal.

• Supposons U_2 déployé. On utilise le théorème 2.8 (ii) de [6]. Le module de Jacquet S_{N_2} est de dimension 1, le groupe U_1 opère trivialement : $S_{N_2} = S_{N_2}^{U_1}$, et \tilde{M}_2 opère par un caractère non ramifié :

$$(1) \quad S_{N_2}^{U_1} = S_{N_2}^{U_1 \times (M_2 \cap I_2)}.$$

Donc : $S^{U_1 \times I_2} \neq 0$. Et S^{U_1} , étant \tilde{U}_2 -irréductible, est engendré par $S^{U_1 \times I_2}$ comme \tilde{U}_2 -module.

• Supposons U_2 non déployé. Notons U_2^0 sa partie anisotrope. D'après [6, théorème 2.8 (ii)] :

$$S_{N_2} = \chi \otimes S^0,$$

où χ est un caractère non ramifié de $U_1 M_2$ et S^0 l'espace de la représentation métaplectique associé à la paire (U_1, U_2^0) . Le raisonnement précédent s'applique à cette paire et (1) est encore vérifié, d'où la même conclusion.

2. Supposons maintenant U_1 non compact. On va maintenant appliquer la partie (i) du théorème 2.8 de [6]. On fait une récurrence sur l'indice de Witt m_1 de U_1 . Soit $P_1 = M_1 N_1$ un sous-groupe parabolique de U_1 , stabilisateur d'une droite isotrope et contenant B_1 .

D'après la PROPOSITION 1.2 l'espace S^{I_1} est isomorphe à $S_{N_1}^{M_1 \cap I_1}$ en tant que \tilde{U}_2 -module, et nous sommes ramenés à montrer que $S_{N_1}^{M_1 \cap I_1}$ est \tilde{U}_2 -engendré par ses I_2 -invariants.

Pour une paire réductive duale (G_1, G_2) , si m'_1 et m'_2 sont les indices de Witt respectifs de G_1 et G_2 , on notera $(\omega_{m'_1, m'_2}, S_{m'_1, m'_2})$ la représentation de $\tilde{G}_1 \tilde{G}_2$ associée par KUDLA, (cf. [6, paragraphe 2]), à (ω, S) . Soit m_2 l'indice de Witt de U_2 .

(a) Supposons U_2 compact. D'après [6, théorème 2.8 (i)], appliqué avec $j = 1$ et $k = 0$ (notations de KUDLA) :

$$S_{N_1} = \chi \otimes \omega_{m_1-1, 0},$$

où χ est un caractère non ramifié de $\tilde{M}_1 \tilde{U}_2$. L'hypothèse de récurrence s'applique à $S_{m_1-1, 0}^{M_1 \cap I_1}$, et

$$S_{N_1}^{M_1 \cap I_1} = \chi \otimes S_{m_1-1, 0}^{M_1 \cap I_1}$$

est donc engendré par ses I_2 -invariants.

(b) Supposons maintenant U_2 non compact. D'après [6, théorème 2.8 (i)], appliqué avec $j = 1$ et $k = 1$, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Ind}_{\tilde{M}_1 \tilde{P}_2}^{\tilde{M}_1 \tilde{U}_2} \chi' \otimes \rho \otimes \omega_{m_1-1, m_2-1} \longrightarrow S_{N_1} \longrightarrow \chi \otimes \omega_{m_1-1, m_2} \longrightarrow 0,$$

où P_2 est un sous-groupe parabolique de U_2 , stabilisateur d'une droite isotrope, χ et χ' des caractères non ramifiés de $\tilde{M}_1 \tilde{P}_2$ et ρ la représentation naturelle de $F^\times \times F^\times$ dans $C_c^\infty(F^\times)$. On remarque que tout vecteur invariant par $\tilde{T}_1 \cap I$ dans ρ est aussi invariant par $\tilde{T}_2 \cap I$. Soit X l'espace de la représentation $\chi' \otimes \rho \otimes \omega_{m_1-1, m_2-1}$ et Y celui de $\chi \otimes \omega_{m_1-1, m_2}$. Par exactitude du foncteur $V \rightarrow V^\Gamma$ pour un module lisse V et un sous-groupe compact Γ , on obtient donc :

$$0 \longrightarrow (\text{Ind}_{\tilde{M}_1 \tilde{P}_2}^{\tilde{M}_1 \tilde{U}_2} X)^{M_1 \cap I_1} \longrightarrow S_{N_1}^{M_1 \cap I_1} \longrightarrow Y^{M_1 \cap I_1} \longrightarrow 0.$$

La catégorie $\text{Alg}(\tilde{T}, \nu)$ est stable par induction et extension, cf. [2]. Par hypothèse de récurrence, il résulte donc de (1.3.2), appliqué à $X^{M_1 \cap I_1}$ et à $Y^{M_1 \cap I_1}$, que $S_{N_1}^{M_1 \cap I_1}$ est \tilde{U}_2 -engendré par ses I_2 -invariants.

2.2. Correspondance de HOWE.

THÉORÈME. — Dans la correspondance de Howe, l'image d'une représentation (π_1, V_1) de \tilde{U}_1 , qui a un vecteur invariant par le sous-groupe d'Iwahori I_1 est une représentation (π_2, V_2) de \tilde{U}_2 , qui a un vecteur invariant par le sous-groupe d'Iwahori I_2 .

Démonstration. — Puisque I_1 est compact, on déduit de la surjection $\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2$ -équivariante de S sur $V_1 \otimes V_2$, une surjection \tilde{U}_2 -équivariante de S^{I_1} sur $V_1^{I_1} \otimes V_2$. D'après le théorème précédent, l'image de $S^{I_1 \times I_2}$ par cette surjection est non nulle et contenue dans $V_1^{I_1} \otimes V_2^{I_2}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUBERT (A.-M.). — Représentation métaplectique et sous-groupes d'Iwahori, *Prépublication*.
- [2] BERNSTEIN (J.), DELIGNE (P.), KAZHDAN (D.) et VIGNÉRAS (M.-F.). — *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*. — Paris, Hermann, 1984.
- [3] CARTIER (P.). — Representations of reductive p -adic groups : a survey, *Proc. Sympos. Pure Math.*, t. **33**, 1979, p. 111–155.
- [4] CASSELMAN (W.). — Introduction to the theory of admissible representations of p -adic reductive groups, *Prépublication*.
- [5] HOWE (R.). — θ -series and invariant theory, *Proc. Sympos. Pure Math.*, t. **33**, 1979, p. 275–285.
- [6] KUDLA (S.). — On the local theta-correspondence, *Invent. Math.*, t. **83**, 1986, p. 229–255.
- [7] MOEGLIN (C.), VIGNÉRAS (M.-F.) et WALDSPURGER (J.-L.). — Correspondances de Howe sur un corps p -adique, *Springer Lecture Notes*.
- [8] MOEGLIN (C.) et WALDSPURGER (J.-L.). — Sur l'involution de Zelevinski, *J. Reine Angew. Math.*, t. **372**, 1986, p. 136–177.
- [9] SAVIN (G.). — Local Shimura Correspondence, *Prépublication*.