

BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI GAUDIER

Algèbres de groupe du groupe additif

Bulletin de la S. M. F., tome 117, n° 2 (1989), p. 233-245

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_2_233_0

© Bulletin de la S. M. F., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ALGÈBRES DE GROUPE DU GROUPE ADDITIF

PAR

HENRI GAUDIER (*)

RÉSUMÉ. — Soit k un corps parfait de caractéristique positive, soient α le groupe additif et W l'anneau des vecteurs de Witt. Nous calculons l'algèbre de groupe et la W -algèbre de groupe de α au sens des k -schémas affines. Le résultat obtenu est ensuite étendu au cas sans caractéristique : nous obtenons alors une algèbre de puissances fractionnaires divisées sur l'anneau des gros vecteurs de Witt.

ABSTRACT. — Let k be a perfect field of positive characteristic, let α be the additive group and let W be the Witt vector ring. We compute the group algebra and the group W -algebra of α in the sense of affine schemes. The calculation is next extended to the characteristic-free case. We so obtain a \mathbf{W} -algebra with fractional divided powers, where \mathbf{W} denote the ring of the big Witt vectors.

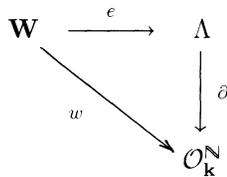
Soit \mathbf{k} un corps parfait de caractéristique p non nulle, \mathbf{W} le schéma en anneaux des gros vecteurs de Witt, et W le schéma en anneaux des p -vecteurs de Witt. On sait ([G2]) que le foncteur oubli qui à un \mathbf{k} -schéma en anneaux A associe son monoïde multiplicatif A^\times , admet un adjoint à gauche qui à un \mathbf{k} -monoïde X associe son algèbre de monoïde LX . De plus la catégorie des représentations de X dans un groupe unipotent commutatif est équivalente à la catégorie des LX -modules.

Le but de cet article est de déterminer explicitement l'algèbre de groupe $L\alpha$ du groupe additif α . On obtiendra ainsi une équivalence entre représentations de α et $L\alpha$ -modules. On détermine également la structure de l'anneau $W\alpha = L\alpha \otimes W$ (où le produit tensoriel est pris au sens des schémas en anneaux [G1]), ce qui donne une équivalence entre représentations W -linéaires de α et $W\alpha$ -modules. L'anneau $W\alpha$ obtenu peut être considéré comme l'algèbre des puissances divisées en une variable sur W avec des puissances fractionnaires à dénominateurs les puissances de p .

(*) Texte reçu le 10 décembre 1987, révisé le 15 mars 1988.
Henri GAUDIER, Université Louis Pasteur, IRMA, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.
Adresse actuelle : Département de mathématiques, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Le Mont Houy, 59326 Valenciennes Cedex, France.

Dans la première partie de l'article on définit les coefficients \ast -binômiaux : ce sont des éléments de $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$ qui ont un comportement analogue à celui des coefficients binômiaux et qui interviennent comme constantes de la multiplication dans $L\alpha$ et $W\alpha$. Dans les parties 2 et 3, on détermine les multiplications respectives de $L\alpha$ et $W\alpha$. Dans la quatrième partie on construit, hors caractéristique, un anneau $\mathbf{W}\alpha$ qui étend l'anneau $W\alpha$ et qui peut être considéré comme la \mathbf{W} -algèbre des puissances divisées en une variable avec des puissances fractionnaires quelconques.

Notations. — Soit \mathbf{k} l'anneau de base, qu'on commencera par supposer quelconque. On considère le triangle commutatif de \mathbf{k} -foncteurs en anneaux ([D.G. p. 639], [H p. 121]) :



où \mathbf{W} est l'anneau des gros vecteurs de Witt, Λ est le λ -anneau universel, $\mathcal{O}_{\mathbf{k}}$ est le foncteur identité, e est l'isomorphisme d'anneaux défini par :

$$e(x_1, \dots, x_n, \dots) = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i T^i)^{-1},$$

où w est donné par :

$$w_n(x_1, \dots, x_n, \dots) = \sum_{d|n} d x_d^{n/d},$$

et où $\partial_n(S)$ est le coefficient de T^{n-1} dans la série $\frac{d \log S}{dT}$. On sait que w et ∂ sont des isomorphismes si \mathbf{k} est une \mathbb{Q} -algèbre, par conséquent $\mathbf{W}(R)$ est isomorphe à $R^{\mathbb{N}}$ pour toute \mathbb{Q} -algèbre R .

On notera V_i (resp. F_i) les morphismes de décalage (resp. de Frobenius) de \mathbf{W} ou Λ , et σ le morphisme de Teichmüller $\mathcal{O}_{\mathbf{k}} \rightarrow \mathbf{W}$ défini par $\sigma(x) = (x, 0, \dots, 0, \dots)$, on sait que $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$. Enfin si i et j sont des entiers on notera $((i, j))$ le coefficient binomial $\binom{i+j}{i}$.

1. Coefficients $*$ -binômiaux et p -binômiaux

1.1. *Définition.* — Soient i et j deux entiers naturels, on appelle *coefficient $*$ -binomial* $*((i, j))$ l'unique élément de $\mathbf{W}(\mathbb{Q})$ tel qu'on ait pour tout $n : w_n(*((i, j))) = ((ni, nj))$. Si l est un entier non nul on posera également $*((i, j; l)) = *((i, j))/l$.

Dans la première partie de ce travail nous allons étudier ces coefficients $*$ -binômiaux et, en particulier, montrer qu'ils sont à composantes entières.

1.2. PROPOSITION. — Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a les identités suivantes :

(a) dans $\mathbf{W}(\mathbb{Q}[X, Y])$

$$(1.2.1) \quad \sigma((X + Y)^k) = \sum_{l \geq 1} \sum_{\substack{i+j=lk \\ (i,j,l)=1}} V_l(*((i, j; l)) \sigma(X^i Y^j));$$

(b) dans $\Lambda(\mathbb{Q}[X, Y])$

$$(1.2.2) \quad (1 - (X + Y)^k T)^{-1} = \prod_{\substack{r \geq 1 \\ l \geq 1}} \prod_{\substack{i+j=lk \\ (i,j,l)=1}} (1 - *((i, j; l))_r X^{ri} Y^{rj} T^{rl})^{-1}.$$

où les $*((i, j; l))_r$ sont les composantes de $*((i, j; l))$.

Puisque l'on est en caractéristique 0, il suffit de transformer les deux membres par w . Or si on désigne par D le membre de droite de (1.2.1), on a :

$$\begin{aligned} w_n(D) &= \sum_{l \in \mathbb{N}^*} \sum_{i,j} w_n V_l(l^{-1} *((i, j)) \sigma(X^i Y^j)), \\ &= \sum_{l|n} \sum_{i,j} w_{n/l} (*((i, j)) \sigma(X^i Y^j)), \end{aligned}$$

puisque $w_n V_l$ est égal à $l w_{n/l}$, si l divise n , et est nul sinon,

$$\begin{aligned} &= \sum_{l|n} \sum_{i,j} w_{n/l} (*((i, j))) w_{n/l} (\sigma(X^i Y^j)), \\ &= \sum_{l|n} \sum_{i,j} ((ni/l, nj/l)) X^{ni/l} Y^{nj/l}, \\ &= \sum_{ld=n} \sum_{\substack{i+j=lk \\ (i,j,l)=1}} ((di, dj)) X^{di} Y^{dj}, \\ &= \sum_{d|n} \sum_{\substack{di+dj=nk \\ (di,dj,n)=d}} ((di, dj)) X^{di} Y^{dj}, \\ &= (X + Y)^{nk} = w_n(\sigma(X + Y)^k). \end{aligned}$$

Ce qui démontre la relation (1.2.1). La relation (1.2.2) n'en est que la traduction par l'isomorphisme e .

1.3. COROLLAIRE. — Si l divise $i + j$ et si l, i et j sont premiers entre eux, le coefficient $*((i, j; l))$ appartient à $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$, et la relation (1.2.1) (resp. (1.2.2)) est vraie dans $\mathbf{W}(\mathbb{Z}[X, Y])$ (resp. $\Lambda(\mathbb{Z}[X, Y])$).

Il est facile de voir que pour tout entier n on a une décomposition

$$1 - (X + Y)^k T = \prod_{i=1}^n \prod_j (1 - M_{i,j} T^i) \pmod{T^{n+1}},$$

où les $M_{i,j}$ sont des monômes de degré total ki . Si l'on impose de plus que les monômes aient des degrés en X et Y distincts, alors une telle décomposition est unique dans \mathbb{Q} comme dans \mathbb{Z} . Passant à la limite sur n , on constate alors que cette décomposition est donnée par la formule (1.2.2), et que les coefficients de cette dernière sont donc dans \mathbb{Z} .

1.4. Coefficients ***-multinômiaux**. — Il est clair que la définition (1.1) peut s'étendre aux coefficients multinômiaux : si i_1, \dots, i_h sont des entiers et l un entier non nul, alors le coefficient ***-multinomial** $*((i_1, \dots, i_h; l))$ est défini par :

$$w_n(*((i_1, \dots, i_h; l))) = l^{-1}((ni_1, \dots, ni_h)).$$

Comme pour les coefficients binômiaux on a les formules :

$$(1.4.1) \quad \sigma(X_1 + \dots + X_h)^k = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_h = lk \\ (i_1, \dots, i_h, l) = 1}} V_l(*((i_1, \dots, i_h; l)) \sigma(X_1^{i_1} \dots X_h^{i_h})),$$

dans $\mathbf{W}(\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_h])$, et

$$(1.4.2) \quad (1 - (X_1 + \dots + X_h)^k T)^{-1} = \prod_{\substack{r \geq 1 \\ l \geq 1}} \prod_{\substack{i_1 + \dots + i_h = lk \\ (i_1, \dots, i_h, l) = 1}} (1 - *((i_1, \dots, i_h; l))_r X_1^{r i_1} \dots X_h^{r i_h} T^{r l})^{-1}.$$

dans $\Lambda(\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_h])$.

Et par le même raisonnement on conclut que les coefficients ***-multinômiaux** sont à composantes entières si $(i_1, \dots, i_k, l) = 1$ et si l divise $\sum_{\alpha=1}^h i_\alpha$.

On appellera enfin ***-factorielle**, et on désignera par $*h!$ le coefficient ***-multinomial** dans lequel $i_1 = \dots = i_h = l = 1$.

1.5. PROPOSITION. — *Les coefficients *-multinômiaux vérifient les relations suivantes :*

$$(1.5.1) \quad l^*((i_1, \dots, i_h; l)) = *((i_1, \dots, i_h)),$$

$$(1.5.2) \quad F_k^*((i_1, \dots, i_h; l)) = *((ki_1, \dots, ki_h; l)),$$

$$(1.5.3) \quad *((i_1, \dots, i_h; l)) = \frac{1}{l} \frac{*(i_1 + \dots + i_h)!}{*i_1! \dots *i_h!},$$

$$(1.5.4) \quad F_k(*h!) = \frac{*hk!}{(*k!)^h},$$

où F_k est le morphisme de Frobenius.

La relation (1.5.1) découle immédiatement de la définition. Pour la relation (1.5.2) on a :

$$\begin{aligned} w_m \circ F_k^*((i_1, \dots, i_h; l)) &= w_{mk}^*((i_1, \dots, i_h; l)) \\ &= l^{-1} ((mki_1, \dots, mki_h)) = w_m^*((ki_1, \dots, ki_h; l)). \end{aligned}$$

Pour la relation (1.5.3), puisque :

$$w_m(*i!) = \frac{(mi)!}{m!^i},$$

on a :

$$\begin{aligned} w_m \left(\frac{*(i_1 + \dots + i_h)!}{*i_1! \dots *i_h!} \right) &= \frac{(mi_1 + \dots + mi_h)!}{m!^{i_1 + \dots + i_h}} \times \frac{m!^{i_1} \dots m!^{i_h}}{(mi_1)! \dots (mi_h)!} \\ &= w_m^*((i_1, \dots, i_h)). \end{aligned}$$

La relation (1.5.4) se déduit des précédentes.

1.6. COROLLAIRE. — *Pour tout $n \in N^*$ on a :*

$$*n! = \prod_{i=1}^n *((i-1, 1)),$$

et $*n!$ est divisible par $n!$.

La première relation est une conséquence immédiate de (1.5.3). Et puisque $*((i-1, 1)) = i^*((i-1, 1; i))$ on a :

$$*n! = n! \prod_{i=1}^n *((i-1, 1; i)).$$

On remarquera que la première composante de $*n!/n!$ est égale à 1.

1.7. Coefficients p -binômiaux et p -multinômiaux. — Soit maintenant p un nombre premier, W l'anneau des p -vecteurs de Witt et V (resp. F) le décalage (resp. le Frobenius) dans W . Le morphisme $\pi : \mathbf{W} \rightarrow W$ tel que :

$$\pi(w_1, \dots, w_n, \dots) = (w_1, w_p, \dots, w_{p^n}, \dots),$$

est un homomorphisme d'anneaux. Il transforme donc la formule (1.2.1) en :

$$\pi \circ \sigma(X + Y)^k = \sum' \pi \circ V_l({}^*(i, j; l)) \sigma(X^i Y^j).$$

Posant alors $\tau = \pi \circ \sigma$ on obtient, puisque $\pi \circ V_l = V^s \circ \pi$ si $l = p^s$ et est nul sinon,

$$\tau(X + Y)^k = \sum^+ V^s(\pi[{}^*(i, j; p^s)]) \tau(X^i Y^j),$$

où la somme \sum^+ est étendue à tous les indices i, j et s tels que $i + j = p^s k$ et $s = 0$ ou $(i, j, p) = 1$. On en déduit alors :

COROLLAIRE. — *Appelons coefficients p -binômiaux les p -vecteurs de Witt ${}^p((i, j; s)) = \pi[{}^*(i, j; p^s)]$, et soit k un entier premier à p . Dans $W(\mathbb{Z}[X, Y])$, on a la relation :*

$$(1.7.1) \quad \tau(X + Y)^k = \sum'' V^s[{}^p((i, j; s)) \tau(X^i Y^j)],$$

où la somme \sum'' est étendue à tous les indices i, j et s tels que $i + j = p^s k$ et $(i, j, p) = 1$.

Si l'on définit les p -factorielles par ${}^p i! = \pi({}^* i!)$, on vérifie sans difficulté que les résultats de (1.5) et (1.6) restent valables quand on remplace les coefficients $*$ -binômiaux par les coefficients p -binômiaux et les $*$ -factorielles par les p -factorielles. Si $s = 0$ on écrira également ${}^p((i, j))$ au lieu de ${}^p((i, j; 0))$.

2. L'anneau de groupe du groupe additif

2.1. PROPOSITION. — *Il existe sur le groupe Λ une unique opération bilinéaire notée \star telle que :*

$$(2.1.1) \quad \frac{1}{1 - XT} \star \frac{1}{1 - YT} = \frac{(1 - XT)(1 - YT)}{1 - (X + Y)T}.$$

Cette opération est associative.

En effet le morphisme $\rho : \mathcal{O}_k \times \mathcal{O}_k \rightarrow \Lambda$ défini par :

$$\rho(a, b) = \frac{(1 - aT)(1 - bT)}{1 - (a + b)T}$$

vaut 1 si a ou b est nul; il se prolonge donc de façon unique en une opération bilinéaire sur Λ ([D.G. p. 631]).

En utilisant la formule (1.2.2) on obtient alors :

$$(2.1.2) \quad \frac{1}{1 - XT} \star \frac{1}{1 - YT} = \prod_{r>0} \prod_{\substack{i,j>0 \\ (i,j,i+j)=1}} \frac{1}{1 - {}^*(i, j; i + j)_r X^{ri} Y^{rj} T^{r(i+j)}}$$

2.2. — Soit maintenant \mathbb{P} l'anneau local de \mathbb{Z} en l'idéal $p\mathbb{Z}$. Supposons que k est une \mathbb{P} -algèbre.

Le groupe Λ admet alors une décomposition $\Lambda = W^{\mathbb{N}_p}$ ([D.G. p. 641]) telle que l'image de $(1 - XT)^{-1}$ est $\sum_{i \in \mathbb{N}_p} \tau(X^i) e_i$ ([G2]), où \mathbb{N}_p désigne l'ensemble des entiers premiers à p , et (e_i) la base (topologique) canonique de $W^{\mathbb{N}_p}$. L'opération \star de Λ se transporte en une opération notée également \star .

PROPOSITION. — Soient i et j deux entiers dans \mathbb{N}_p , et w et w' dans W . Dans $W^{\mathbb{N}_p}$ on a :

$$(2.2.1) \quad w e_i \star w' e_j = \sum_{k \in \mathbb{N}_p} \left(\sum V^s [{}^p(i p^t, j p^u; s)] F^t(w) F^u(w') \right) e_k,$$

où la somme \sum' est étendue aux entiers s, t et u tels que $i p^t + j p^u = k p^s$ et $\inf(s, t, u) = 0$.

Dans la décomposition $\Lambda = W^{\mathbb{N}_p}$, la relation (2.1.1) s'écrit :

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{N}_p} \tau(X^i) e_i \right) \star \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_p} \tau(Y^j) e_j \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}_p} \tau(X + Y)^k e_k - \sum_{i \in \mathbb{N}_p} \tau(X^i) e_i - \sum_{j \in \mathbb{N}_p} \tau(Y^j) e_j.$$

En utilisant (1.7.1), cette relation devient :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}_p} \tau(X^i) e_i \right) \star \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_p} \tau(Y^j) e_j \right) = \\ \sum_{k \in \mathbb{N}_p} \left(\sum_{\substack{i'+j'=kp^s \\ (i',j',p)=1}} V^s [{}^p((i',j');s)] \tau(X^{i'}) \tau(Y^{j'}) \right) e_k \\ - \sum_{i \in \mathbb{N}_p} \tau(X^i) e_i - \sum_{j \in \mathbb{N}_p} \tau(Y^j) e_j. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que les termes à retrancher sont ceux qui correspondent à i' ou j' nul. Compte tenu de l'unicité de l'opération \star montrée en (2.1), il suffit de vérifier que, si l'on utilise la formule (2.2.1) pour calculer $\left(\sum_{i \in \mathbb{N}_p} \tau(X^i) e_i \right) \star \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_p} \tau(Y^j) e_j \right)$, on obtient le même résultat que ci-dessus. Cette vérification est simple.

2.3. — Supposons maintenant que \mathbf{k} est un corps de caractéristique p . On sait que le groupe unipotent libre engendré par la droite affine est $\mathbf{Z}_p \times \Lambda$ ([G2]), avec l'immersion canonique $x \mapsto (1, 1/(1 - xT))$. Par conséquent il existe sur $\mathbf{Z}_p \times \Lambda$ une unique structure d'anneau qui en fait l'anneau de groupe du groupe additif, c'est à dire que l'on a :

$$\left(1, \frac{1}{1 - xT} \right) \star \left(1, \frac{1}{1 - yT} \right) = \left(1, \frac{1}{1 - (x + y)T} \right).$$

L'élément unité est $e_0 = (1, 1)$, et en décomposant $(1, 1/(1 - xT))$ en $e_0 + (0, 1/(1 - xT))$, on obtient :

$$\left(0, \frac{1}{1 - xT} \right) \star \left(0, \frac{1}{1 - yT} \right) = \left(0, \frac{(1 - xT)(1 - yT)}{1 - (x + y)T} \right).$$

On a donc démontré :

COROLLAIRE. — *L'algèbre de groupe du groupe additif est le groupe $L\alpha = \mathbf{Z}_p \times \prod_{i \in \mathbb{N}_p} W$ muni de la multiplication définie par la formule (2.2.1) et par*

$$(2.3.1) \quad ne_0 \star n'e_0 = nn'e_0 \quad \text{et} \quad ne_0 \star we_i = nwe_i.$$

2.4. *Remarques.*

1) Dans la PROPOSITION (2.2) les conditions sur s , t et u entraînent que deux d'entre eux sont nuls. La formule (2.2.1) peut donc s'écrire :

$$(2.4.1) \quad we_i \star w'e_j = \sum_{t>0} {}^p((ip^t, j)) F^t(w)w' e_{ip^t+j} + \sum_{u>0} {}^p((i, jp^u)) wF^u(w') e_{i+jp^u} + V^s[{}^p((i, j; s))ww'] e_{(i+j)p^{-s}},$$

où s est la valuation p -adique de $i + j$.

2) Désignons par $c_{i,j,k}(w, w')$ le coefficient de e_k dans $we_i \star w'e_j$. En utilisant (1.5.1), on obtient :

$$(2.4.2) \quad F^s(c_{i,j,k}(w, w')) = {}^p((ip^t, jp^u)) F^t(w)F^u(w'), \text{ si } kp^s = ip^t + jp^u \\ c_{i,j,k}(w, w') = 0 \quad \text{sinon.}$$

3. La W -algèbre du groupe additif

On suppose toujours que \mathbf{k} est un corps de caractéristique p . Si M est un groupe affine commutatif, on sait qu'il est équivalent de se donner une opération du groupe additif sur M ou de se donner une structure de $L\alpha$ -module ([G2]). Si maintenant M est un W -module affine, il est équivalent de se donner une opération W -linéaire du groupe additif ou de se donner une structure de $L\alpha$ -module compatible avec la structure de W -module et donc d'après ([G1]) une structure de $W \otimes L\alpha$ -module. Le but de cette partie est de donner une expression simple de cette W -algèbre.

3.1. LEMME. — *Le morphisme de groupe $W \otimes L\alpha \rightarrow W^{\mathbb{N}[1/p]}$ défini par*

$$(3.1.1) \quad w \otimes \left(ne_0 + \sum_{i \in \mathbb{N}_p} w_i e_i \right) \\ \longmapsto nw f_0 + \sum_{j \in \mathbb{N}[1/p]^*} F^{v(j)-}(w)F^{v(j)+}(w_{jp^{-v(j)}})f_j$$

est un isomorphisme. On note (f_j) la base canonique de $W^{\mathbb{N}[1/p]}$, si $j \in \mathbb{N}[1/p]^$, $v(j)$ désigne sa valuation p -adique, et si $n \in \mathbb{Z}$ on pose $n_+ = \sup(n, 0)$ et $n_- = \sup(-n, 0)$.*

En effet on a un isomorphisme $W \otimes W \xrightarrow{\sim} W^{\mathbb{Z}}$ par conséquent $W \otimes W^{\mathbb{N}_p} \xrightarrow{\sim} W^{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_p}$. Et la bijection $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}[1/p]^*$ définie par

$(n, i) \mapsto ip^n$ donne un isomorphisme $W \otimes W^{\mathbb{N}_p} \xrightarrow{\sim} W^{\mathbb{N}[1/p]^*}$ dont on vérifie aisément qu'il est donné par (3.1.1).

3.2. THÉORÈME. — Soit $W\alpha = W^{\mathbb{N}[1/p]}$ la W -algèbre de groupe du groupe additif. Si i et j sont dans $\mathbb{N}[1/p]$, posons $[i] = v_p(i)$, $[i, j] = \sup([i], [j])$ et $\delta(i, j) = [i, j] - [i + j]$. Alors la multiplication dans $W\alpha$ est donnée par :

$$(3.2.1) \quad xf_i \star yf_j = V^{\delta(i,j)} \left[p((ip^{[i,j]}, jp^{[i,j]}; \delta(i, j))) F^{[i,j]-[i]}(x) F^{[i,j]-[j]}(y) \right] f_{i+j}.$$

En raison de l'unicité de l'algèbre de groupe et du lemme (3.1), on sait qu'il existe une unique multiplication sur $W\alpha$ telle que le morphisme composé

$$\begin{array}{ccccc} W & \longrightarrow & W \otimes L\alpha & \longrightarrow & W\alpha \\ w & \longmapsto & w \otimes 1 & \longmapsto & wf_0 \end{array}$$

soit un morphisme d'anneau et que le morphisme composé

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \longrightarrow & W \otimes L\alpha & \longrightarrow & W\alpha \\ x & \longmapsto & 1 \otimes (e_0 + \sum_{i \in \mathbb{N}_p} \tau x^i e_i) & \longmapsto & \sum_{i \in \mathbb{N}[1/p]} \tau x^{ip^{[i]}} f_i \end{array}$$

transforme l'addition de α en la multiplication de $W\alpha$. Il suffit donc de vérifier que la multiplication donnée par (3.2.1) vérifie ces deux propriétés. Pour la première c'est évident. Pour la seconde on doit vérifier que :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}[1/p]} \tau(x + y)^{kp^{[k]}} f_k = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}[1/p]} \tau x^{ip^{[i]}} f_i \right) \star \left(\sum_{j \in \mathbb{N}[1/p]} \tau y^{jp^{[j]}} f_j \right).$$

On doit donc avoir pour tout k :

$$\tau(x + y)^{kp^{[k]}} = \sum_{i+j=k} V^{\delta(i,j)} \left[p((ip^{[i,j]}, jp^{[i,j]}; \delta(i, j))) F^{[i,j]-[i]}(\tau x^{ip^{[i]}}) F^{[i,j]-[j]}(\tau y^{jp^{[j]}}) \right] f_k.$$

Calculons alors la composante fantôme Φ_m :

$$\begin{aligned} (x + y)^{kp^{[k]+m}} &= \sum_{i+j=k} \Phi_m V^{\delta(i,j)} \left[p((ip^{[i,j]}, jp^{[i,j]}; \delta(i, j))) \tau x^{ip^{[i]}} \tau y^{jp^{[j]}} \right] \\ &= \sum_{\substack{i+j=k \\ \delta(i,j) \leq m}} \Phi_{m-\delta(i,j)} \left[p((ip^{[i,j]}, jp^{[i,j]}) \tau x^{ip^{[i]}} \tau y^{jp^{[j]}}) \right] \\ &= \sum_{\substack{i+j=k \\ \delta(i,j) \leq m}} ((ip^{m+[k]}, jp^{m+[k]}) x^{ip^{m+[k]}} y^{jp^{m+[k]}}). \end{aligned}$$

Il suffit alors de voir que l'on a simplement la formule du binôme pour achever la démonstration.

3.3. *Remarque.* — Il résulte du théorème que l'on a quelques soient i et j dans $\mathbb{N}[1/p]$:

$$(3.3.1) \quad F^{[i]}(x)f_i \star F^{[j]}(y)f_j = V^{\delta(i,j)} \left[{}^p((ip^{[i,j]}, jp^{[i,j]}; \delta(i, j))) \right] F^{[i+j]}(xy) f_{i+j}.$$

3.4. COROLLAIRE. — La sous-algèbre $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} Wf_i$ de $W\alpha$ est isomorphe à l'algèbre des puissances divisées en une variable sur W .

En effet si i et j sont entiers, on a en utilisant (3.2.1) et (1.5.3) :

$$({}^p i! f_i) \star ({}^p j! f_j) = {}^p((i, j)) {}^p i! {}^p j! f_{i+j} = {}^p(i + j)! f_{i+j}.$$

Par conséquent si l'on pose $X = 1.f_1$, on obtient ${}^p i! f_i = X^{*i}$. La sous-algèbre $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} Wf_i$ est donc analogue à l'algèbre des puissances divisées. Mais les factorielles et les coefficients binômiaux ont été remplacés par les p -factorielles et les coefficients p -binômiaux. Mais on a remarqué (1.6) que la première composante de ${}^* n! / n!$ est égale à 1, il en est de même pour ${}^p n! / n!$ qui est donc inversible, puisque l'on est en caractéristique p .

4. Algèbre des puissances fractionnaires divisées

Dans ce paragraphe \mathbf{k} est un anneau commutatif quelconque. La construction de $W\alpha$ peut s'étendre à l'anneau \mathbf{W} des gros vecteurs de Witt.

Soit \mathbb{Q}_+ l'ensemble des rationnels positifs ou nuls. Si i et j sont dans \mathbb{Q}_+ , on note $d(i)$ le dénominateur de i , $d(i, j)$ le p.p.c.m. de $d(i)$ et $d(j)$, et $\delta(i, j)$ le quotient $d(i, j) / d(i + j)$.

4.1. THÉORÈME. — Soit $\mathbf{W}\alpha$ le groupe $\prod_{\mathbb{Q}_+} \mathbf{W}$ et (f_i) sa base canonique :

1) la multiplication

$$(4.1.1) \quad xf_i \star yf_j = V_{\delta(i,j)} \left[{}^*(id(i, j), jd(i, j); \delta(i, j)) \right] F_{d(i,j)/d(i)}(x) F_{d(i,j)/d(j)}(y) f_{i+j}$$

fait de $\mathbf{W}\alpha$ un anneau commutatif;

2) le morphisme

$$x \mapsto \sum_{i \in \mathbb{Q}_+} \sigma(x^{id(i)}) f_i$$

est un homomorphisme du groupe additif α dans le groupe multiplicatif de $\mathbf{W}\alpha$.

La vérification est facile.

4.2 Remarques.

1) Comme dans le cas des p -vecteurs de Witt (cf. 3.3) la formule (4.1.1) entraîne :

$$F_{d(i)}(x)f_i \star F_{d(j)}(y)f_j = V_{\delta(i,j)} [*(id(i,j), jd(i,j); \delta(i,j))] F_{d(i+j)}(xy) f_{i+j}.$$

2) Il en résulte immédiatement que si i et j sont entiers on a :

$$x^*i! f_i \star y^*j! f_j = xy^*(i+j)! f_{i+j}.$$

Ce qui montre que le sous-anneau $\bigoplus_{i \in \mathbf{N}} \mathbf{W}f_i$ de $\mathbf{W}\alpha$ est analogue à l'algèbre des puissances divisées. De façon plus précise, on peut vérifier que l'idéal engendré par les $(f_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ muni des applications γ_n définies par :

$$\gamma_n(x f_i) = F_i(*n!/n!) x^n f_{ni},$$

est un idéal à puissances divisées au sens de [B].

4.3. — On peut également interpréter $\mathbf{W}\alpha$ tout entier en termes de puissances fractionnaires divisées. Soient i et $j \in \mathbf{Q}_+$, posons

$$*((i,j)) = \frac{1}{d(i,j)} V_{d(i,j)} *(id(i,j), jd(i,j)).$$

Alors $*((i,j))$ est dans $\mathbf{W}(\mathbf{Q})$, et il est facile de voir que la formule (1.5.2) reste valable. Supposons alors que \mathbf{k} soit de caractéristique 0 et soit $\overline{\mathbf{W}}\alpha$ le \mathbf{W} -module $\mathbf{W}^{\mathbf{Q}_+}$, de base \bar{f}_i , muni de la multiplication :

$$x\bar{f}_i \star y\bar{f}_j = *((i,j)) xy\bar{f}_{i+j}.$$

PROPOSITION. — $\overline{\mathbf{W}}\alpha$ est une \mathbf{W} -pseudo-algèbre (i.e. une algèbre sans unité) et le morphisme :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}\alpha &\longrightarrow \overline{\mathbf{W}}\alpha \\ x f_i &\longmapsto \frac{1}{d(i)} V_{d(i)}(x) \bar{f}_i \end{aligned}$$

est un homomorphisme injectif d'algèbres.

La vérification est aisée. On trouvera dans [G3] d'autres résultats concernant les algèbres $\mathbf{W}\alpha$, $\overline{\mathbf{W}}\alpha$ et les coefficients $*$ -binômiaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] BERTHELOT (Pierre). — Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$. — Berlin, Springer-Verlag, 1974 (*Lecture notes in Math.*, **407**).
- [D.G.] DEMAZURE (Michel) et GABRIEL (Pierre). — *Groupes algébriques*. — Paris, Masson et Amsterdam, North-Holland, 1970.
- [G1] GAUDIER (Henri). — Sur le produit tensoriel des groupes affines, *Manuscr. Math.*, t. **17**, 1975, p. 21–54.
- [G2] GAUDIER (Henri). — Groupes libres et algèbres de groupes en Géométrie algébrique, *Manuscr. Math.*, t. **25**, 1978, p. 79–86.
- [G3] GAUDIER (Henri). — Relèvement des coefficients binômiaux dans les vecteurs de Witt. — (Actes 18^{ième} session Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 1987), Publ. Math. IRMA Strasbourg, n^o **358**/5–18, 1988, p. 93–108.
- [H] HAZEWINKEL (Michiel). — *Formal groups and applications*. — New-York, Academic Press, 1978.
-