

# BULLETIN DE LA S. M. F.

J. BERTIN

## Sur une formule de Shioda et Mitani

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 117, n° 1 (1989), p. 121-128

<[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1989\\_\\_117\\_1\\_121\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_1_121_0)>

© Bulletin de la S. M. F., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR UNE FORMULE DE SHIODA ET MITANI

PAR

J. BERTIN (\*)

---

RÉSUMÉ. — Soit  $X$  une variété abélienne de dimension 2 associée à un ordre d'une algèbre de quaternions rationnelle  $H$ . Lorsque  $H$  est un corps et lorsque  $X$  est simple, on détermine le nombre de classes de courbes de genre 2 dont la jacobienne est isomorphe à  $X$ .

ABSTRACT. — Let  $X$  be a two dimensional complex abelian variety associated to an order of rational quaternion algebra  $H$ . When  $H$  is a division ring, and  $X$  simple, we give a formula for the number of classes of curves of genus two whose jacobian is isomorphic to  $X$ .

### 1. Introduction

Soit  $X$  une variété abélienne de dimension 2 définie sur  $\mathbb{C}$ . Supposons que  $X$  soit isomorphe au produit de deux courbes elliptiques mutuellement isogènes, c'est-à-dire, selon une terminologie traditionnelle, supposons  $X$  singulière [3, théorème 4.1]. Une telle décomposition de  $X$  n'est pas unique en général; cependant, à isomorphisme près, leur nombre est fini. Ce nombre a été déterminé explicitement par SHIODA et MITANI (*loc. cit.* théorème 4.7).

Cela est à rapprocher d'un résultat général de NARASIMHAN et NORI qui affirme que, pour une variété abélienne  $X$  de dimension  $g$ , le nombre des classes modulo  $\text{Aut}(X)$  des courbes  $C$  lisses et irréductibles de genre  $g$ , contenues dans  $X$  et telles que  $\text{Jac}(C) \cong X$  est fini. Le nombre de classes ainsi défini est noté  $h_X$ .

Dans ce travail, nous allons déterminer  $h_X$  lorsque  $X$  est obtenue au moyen d'une algèbre de quaternions  $H$  sur  $\mathbb{Q}$ , déployée sur  $\mathbb{R}$ , et d'un ordre de  $H$  (SHIMURA [2]). Lorsque  $H = M_2(\mathbb{Q})$ , on retrouve essentiellement la situation étudiée par SHIODA et MITANI, ainsi que HAYASHIDA et NISHI [1].

---

(\*) Texte reçu le 14 octobre 1987, révisé le 20 avril 1988.

J. BERTIN, Institut FOURIER, Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S., B.P. 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.

Le résultat que nous allons obtenir sera valable lorsque  $H$  est un corps et  $X$  simple. Il semble qu'il y ait peu d'exemples de variétés abéliennes  $X$  avec  $h_X > 1$  pour lesquelles on puisse déterminer explicitement ce nombre.

## 2. Algèbres de quaternions et surfaces abéliennes

**2.1.** — Rappelons brièvement, et dans un cas très particulier, une construction de SHIMURA [2].

Soient  $H$  une algèbre de quaternions sur  $\mathbb{Q}$  et  $x \mapsto x'$  l'involution canonique. Pour  $x \in H$ , on note  $N(x) = xx'$  la *norme* de  $x$  et  $t(x) = x + x'$  la *trace* de  $x$ . On suppose dans la suite que  $H$  est un corps et  $H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$ . Appelons  $S$  l'ensemble des nombres premiers  $p$  qui sont ramifiés dans  $H$ , i.e. le complété  $p$ -adique  $H_p$  est un corps. On sait que  $S$  est fini avec un cardinal pair. Si  $I$  est un idéal (resp. un ordre, maximal, d'Eichler) de  $H$ , l'adhérence  $I_p$  de  $I$  dans  $H_p$  est un idéal (resp. un ordre maximal, d'Eichler) de  $H_p$ . La description qui suit est classique.

a) Si  $H_p$  est l'unique algèbre à division sur  $\mathbb{Q}_p$ , le corps  $H_p$  a une unique ordre maximal qui est le sous anneau compact maximal de  $H_p$ .

b)  $H_p = M_2(\mathbb{Q}_p)$ . Tout ordre maximal (resp. d'Eichler) est conjugué à l'ordre  $M_2(\mathbb{Z}_p)$ , resp. à l'ordre

$$\mathcal{O}_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_p) \mid c \in p^n \mathbb{Z}_p \right\}.$$

L'entier  $n$  est parfaitement déterminé; on appelle  $p^n$  le *niveau* de  $\mathcal{O}_n$ .

Pour un ordre d'Eichler  $\mathcal{O}$  de  $H$ , le niveau  $p^{n_p}$  de  $\mathcal{O}_p$  ( $p \notin S$ ) est égal à un pour presque tout  $p$ ; on appelle  $N = \prod_p p^{n_p}$  le *niveau* de  $\mathcal{O}$ . L'algèbre  $H$  étant indéfinie, on sait (Eichler) que les ordres d'Eichler de même niveau sont deux à deux conjugués et principaux. Le discriminant de  $\mathcal{O}$  est  $D = Nd$ , où  $d = \prod_{p \in S} p$ .

Considérons une involution  $\alpha \mapsto \alpha^*$  de  $H$ . Il existe  $\rho \in H$  avec  $\rho^2 \in \mathbb{Q}$ , déterminé à un facteur rationnel près, tel que  $\alpha^* = \rho^{-1} \alpha' \rho$ . La forme quadratique  $\alpha \mapsto t(\alpha \alpha^*)$  est définie positive si et seulement si  $\rho^2 < 0$  [2]; on dit que l'involution est *positive*.

**2.2.** — Fixons un isomorphisme  $H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} M_2(\mathbb{R})$ , i.e. une représentation réelle  $\chi : H \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ . Le plongement de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  permet de faire agir  $H$  sur  $\mathbb{C}^2$ . Considérons un ordre  $\mathcal{O}$  de  $H$ , maximal ou bien d'Eichler. Si  $\tau \in \mathbb{C}$  avec  $\text{Im } \tau > 0$ , posons  $\omega = {}^t[\tau, 1] \in \mathbb{C}^2$ . L'application  $\alpha \mapsto \chi(\alpha)\omega$  est une bijection  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  sur  $\mathbb{C}^2$  et l'image de  $\mathcal{O}$

$$D_\tau = \{ \chi(\alpha)\omega \mid \alpha \in \mathcal{O} \}$$

est un réseau dans  $\mathbb{C}^2$ .

Considérons le tore complexe  $X_\tau := \mathbb{C}^2/D_\tau$ ; à isomorphisme près, il ne dépend que de la classe de conjugaison de  $\mathcal{O}$ , c'est-à-dire du niveau. La construction montre que, si  $\alpha \in \mathcal{O}$ ,  $\chi(\alpha)$  définit un endomorphisme de  $X_\tau$ . On obtient ainsi une injection  $\chi : H \rightarrow \text{End}^0(X)$  et  $\chi(\alpha) \in \text{End}(X)$  si et seulement si  $\alpha \in \mathcal{O}$  (on note  $X$  à la place de  $X_\tau$ ). Rappelons que  $\text{End}^0(X)$  désigne la  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $\text{End}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ .

La structure complexe de  $\mathbb{C}^2$  détermine un élément  $\mu \in H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  par

$$\sqrt{-1}\xi = \chi(\alpha\mu)\omega \quad \text{si } \xi = \chi(\alpha)\omega.$$

On a  $\mu^2 = -1$  et  $\mu' = -\mu$ . L'élément  $\mu$ , qui est déterminé par le choix de  $\tau$ , détermine  $\omega$  (i.e.  $\tau$ ). En effet, on observe facilement que  $\omega$  est un vecteur propre relativement à la valeur propre  $+i$  de l'opérateur  $\chi(\mu)$ . Nous dirons, pour abrégé, que  $X (= X_\tau)$  est le tore complexe associé à  $(H, \mathcal{O}, \mu)$ . Pour préciser la dépendance de  $X_\tau$  en fonction de  $\tau$ , on remarquera que deux éléments  $\mu$  et  $\mu_1$  conjugués par une unité de  $\mathcal{O}$  ( $\exists \varepsilon \in \mathcal{O}^*, \mu_1 = \varepsilon\mu\varepsilon^{-1}$ ) définissent des tores complexes isomorphes; pour plus de détails voir [2].

PROPOSITION 1. — Soit  $X$  un tore complexe associé à un triplet  $(H, \mathcal{O}, \mu)$ . Alors  $X$  est simple si et seulement si  $\mathbb{R}(\mu) \cap H = \mathbb{Q}$ .

*Preuve.* — La non simplicité de  $X$  signifie qu'il existe une droite  $\ell$  de  $\mathbb{C}^2$  telle que  $D \cap \ell$  est un réseau de  $\ell$  ( $D$  est le réseau des périodes de  $X$ ). Il revient au même de dire qu'il existe  $\xi \in \mathbb{C}^2$  et  $z \in \mathbb{C}^*$ , avec  $z$  et  $z\xi \in D$  et  $z$  non nul, c'est-à-dire  $\xi$  et  $z\xi$  sont  $\mathbb{R}$  indépendants. Supposons  $\xi = \chi(\alpha)\omega$  où  $\alpha \in \mathcal{O}$  et  $z = p + iq$  ( $q \neq 0$ ). On a

$$z\xi = \chi(\alpha)(z\omega) = \chi(\alpha(p + q\mu))\omega.$$

On a donc  $\beta := \alpha(p + q\mu) \in \mathcal{O}$ . L'algèbre  $H$  étant une algèbre à division, on tire de là :

$$p + q\mu = \alpha^{-1}\beta \in \mathbb{R}(\mu) \cap H$$

et  $p + q\mu \notin \mathbb{Q}$ . La réciproque est claire.

Ainsi, par la PROPOSITION 1, un "membre général" de la famille  $X_\tau$  est simple. Dans les paragraphes qui suivent, nous supposons cette hypothèse satisfaite.

PROPOSITION 2. — La représentation  $\chi$  fournit des isomorphismes  $H \xrightarrow{\sim} \text{End}^0(X)$  et  $\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \text{End}(X)$ .

*Preuve.* — Ceci découle de suite du fait que  $\text{End}^0(X)$  est une algèbre à division.

*Remarque.* — Lorsque la condition de la proposition n'est pas satisfaite,  $\mathbb{R}(\mu) \cap H$  est un sous-corps quadratique imaginaire de  $H$ . Si  $K$  est ce sous-corps, on vérifie que  $\text{End}^0(X)$  est isomorphe à  $M_2(K)$ .

### 3. Le groupe de Neron-Severi

**3.1.** — Dans [2], SHIMURA décrit les polarisations de  $X$  au moyen d'éléments  $\rho \in H$  avec  $\rho^2 < 0$ . Le même principe va nous conduire à une description du groupe  $NS(X)$  ou de l'espace vectoriel  $NS(X) \otimes \mathbb{Q}$  avec sa forme d'intersection.

Il est bien connu que le groupe  $NS(X)$  s'identifie au groupe des formes  $\mathbb{R}$ -bilinéaires et alternées sur  $V = \mathbb{C}^2$  qui sont entières sur le réseau  $D$ . Si  $L \in \text{Pic}(X)$  représente  $\ell \in NS(X)$ , la forme associée à  $\ell$  coïncide avec la forme de Riemann  $E$  de  $L$ . Comme on suppose  $X$  simple, la forme  $E(= E_\ell)$  est non dégénérée si  $\ell \neq 0$ . L'involution de Rosati associée à  $\ell$ , i.e. l'adjonction relativement à  $E$ , induit une involution  $\alpha \mapsto \alpha^*$  sur  $H$ , distincte de l'involution canonique. Il existe  $\rho \in H$  avec  $\rho' = -\rho$  tel que  $\alpha^* = \rho^{-1}\alpha'\rho$ . On peut en fait choisir  $\rho$  de telle sorte que, pour  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $H$ , on ait

$$E_\ell(\alpha, \beta) = t(\rho\alpha\beta').$$

Dans ce cas,  $\rho$  est déterminé de manière unique par  $\ell$ . Notons  $H_0$  le sous-espace vectoriel des quaternions purs. L'application qui à  $\ell$  associe l'élément  $\rho$  précédent est un isomorphisme de  $NS^0(X)$  sur  $H_0$ . Dans la suite, nous identifierons ces deux objets. On notera que le cône ample coïncide avec  $\{\rho \in H_0 \mid \rho^2 < 0\}$ . Soit  $\rho \in NS^0(X)$ . Alors  $\rho \in NS(X)$  si et seulement si  $t(\rho\alpha\beta') \in \mathbb{Z}$  pour  $\alpha$  et  $\beta \in \mathcal{O}$ , c'est-à-dire si  $\rho$  appartient au module complémentaire (différente inverse) de  $\mathcal{O}$ , module que nous noterons dans la suite  $\overline{\mathcal{O}}$ .

**3.2.** — On note  $(\alpha \cdot \beta)$  la forme intersection sur  $NS^0(X)$ .

**PROPOSITION 3.** — *Soit  $D$  le discriminant réduit de l'ordre  $\mathcal{O}$ . Si  $\alpha$  et  $\beta \in NS^0(X)$ , on a*

- i)  $(\alpha \cdot \beta) = -D(\alpha\beta + \beta\alpha)$  ;
- ii)  $(\alpha^2) = 2DN(\alpha)$ .

*Preuve.* — Il suffit de vérifier (ii) pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}$ , c'est-à-dire pour une isogénie. Le degré de  $\alpha$  est égal à  $N(\alpha)^2$ . L'opération "image réciproque" par  $\alpha$  définit un endomorphisme de  $NS(X)$ , qui, compte tenu des identifications permises, est

$$\alpha^{-1}(\rho) = \alpha'\rho\alpha.$$

Alors, pour  $\rho_1, \rho_2 \in NS^0(X)$ , et pour  $\alpha \in H$ , on a

$$(\alpha^{-1} \rho_1 \alpha \cdot \alpha^{-1} \rho_2 \alpha) = (\rho_1 \cdot \rho_2).$$

Il découle facilement de cette propriété que la forme d'intersection sur  $NS^0(X)$  est proportionnelle à la forme bilinéaire sur  $H_0$  déduite de la norme. Il y a donc un  $c \in \mathbb{Q}$ ,  $c > 0$ , tel que pour tout  $\alpha \in H_0$

$$(\alpha^2) = cN(\alpha).$$

Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$ ; par le théorème de Riemann-Roch  $\chi(\mathcal{L}) = (\mathcal{L}^2)/2$ , et, lorsque  $\mathcal{L}$  est ample,

$$\chi(\mathcal{L}) = h^0(\mathcal{L}) = \sqrt{\text{disc}(E^{\mathcal{L}})},$$

où  $\text{disc}()$  désigne le discriminant. Si  $[\mathcal{L}] = \rho$  appartient au cône ample de  $NS^0(X)$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Disc}(E_\rho) &= |\overline{\mathcal{O}}/\rho\mathcal{O}| \\ &= |\overline{\mathcal{O}}/\rho\overline{\mathcal{O}}| |\overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}| = N(\rho)^2 D^2 \end{aligned}$$

d'où il vient  $(\rho^2) = 2DN(\rho)$ , c'est-à-dire  $c = 2D$ .

*Remarque.* — Lorsque l'hypothèse de généralité de la PROPOSITION 1 est non satisfaite, on peut identifier le  $\mathbb{Q}$  espace vectoriel  $NS(X) \otimes \mathbb{Q}$  avec l'espace vectoriel des formes hermitiennes binaires à coefficients dans le corps quadratique imaginaire  $K$ .

#### 4. Calcul du nombre de classes

**4.1.** — Considérons une surface abélienne  $X$  et soit  $C$  une courbe sur  $X$  avec  $(C^2) = 2$ . On sait que, soit  $C$  est irréductible lisse (de genre 2) et  $X \cong \text{Jac}(C)$ , soit  $C$  est somme de deux courbes elliptiques. Ce dernier cas ne pouvant se produire si  $X$  est simple. Ainsi, sous les hypothèses des paragraphes précédents, si  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$  avec  $\mathcal{L}^2 = 2$ , il existe une courbe  $C$  lisse, irréductible et de genre 2 telle que  $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(\pm C)$ . La courbe  $C$  est déterminée à une translation près par  $\rho = c_1(\mathcal{L})$ . Supposons maintenant que  $C_1$  et  $C_2$  sont deux courbes irréductibles lisses et de genre 2 telles que  $\text{Jac}(C_1) \cong \text{Jac}(C_2) \cong X$ . Si on identifie  $C_1$  et  $C_2$  avec des courbes de  $X$ , alors  $C_1 \cong C_2$  si et seulement s'il existe  $f \in \text{Aut}(X)$  tel que  $f(C_1) = C_2$  à une translation près. Cela résulte par exemple du théorème de Torelli. Si  $\rho_i$  est la classe de  $C_i$  dans  $NS(X) = \overline{\mathcal{O}} \cap H_0$ , l'isomorphisme  $C_1 \cong C_2$

équivalait alors à l'existence d'une unité  $\alpha \in \mathcal{O}^*$  telle que  $\rho_2 = \alpha' \rho_1 \alpha$ . Désignons par  $G$  l'ensemble suivant

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \rho \in \overline{\mathcal{O}} \mid \rho' = -\rho \text{ et } (\rho^2) = 2 \right\} \\ &= \left\{ \rho \in \overline{\mathcal{O}} \mid \rho' = -\rho \text{ et } N(\rho) = D^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Si  $\rho \in G$  alors  $-\rho \in G$ . Il est clair que pour  $\rho \in G$  et  $\alpha \in \mathcal{O}^*$ ,  $(\rho, \alpha) \mapsto \alpha' \rho \alpha$  définit une opération de  $\mathcal{O}^*$  sur  $G$ . Notons  $G|_{\mathcal{O}^*}$  l'ensemble des classes.

PROPOSITION 4. — *Le nombre de classes  $h_X$  de  $X$  est donné par*

$$2h_X = \text{Card}(G|_{\mathcal{O}^*}).$$

L'ordre  $\mathcal{O}$  est principal, alors  $\rho \in G$  si et seulement si  $\rho$  engendre l'idéal  $\overline{\mathcal{O}}$  et si  $\rho' = -\rho$ . Il est plus commode de travailler avec la différente  $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{O}}^{-1}$ . L'application  $\rho \mapsto \rho^{-1}$  applique  $G$  sur l'ensemble des  $\rho \in \mathcal{V}$  de polynôme caractéristique  $T^2 + D$ . En particulier, on a :

$$\begin{aligned} 2h_X &= \text{nombre des classes de conjugaisons modulo } \mathcal{O}^* \\ &\text{d'éléments } \rho \in \mathcal{V} \text{ de polynôme caractéristique } T^2 + D. \end{aligned}$$

Un élément de ce type définit un plongement du corps quadratique imaginaire  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  dans  $H$  tel que l'image  $\rho$  de  $\sqrt{-D}$  soit un élément de  $\mathcal{O}$ . Nous nous autorisons à identifier  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  à son image  $\mathbb{Q}(\rho)$  dans  $H$ . Posons  $B = \mathbb{Z}[\sqrt{-D}]$ , et, si  $D \equiv -1 \pmod{4}$ ,  $C = \mathbb{Z}[1 + \sqrt{-D}/2]$ . L'ordre maximal de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  est  $B$  si  $D \not\equiv -1 \pmod{4}$  et  $C$  si  $D \equiv -1 \pmod{4}$ . On notera que, dans tous les cas,  $\mathcal{O} \cap \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  contient  $B$ , donc

$$(*) \quad \mathcal{O} \cap \mathbb{Q}(\sqrt{-D}) = \begin{cases} B & \text{si } D \not\equiv -1 \pmod{4}, \\ B \text{ ou } C & \text{si } D \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Il est clair que les classes de conjugaison modulo  $\mathcal{O}^*$  d'éléments de  $\mathcal{O}$  de polynôme caractéristique  $T^2 + D$  sont en bijection avec les classes de conjugaison des plongements de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  dans  $H$  soumis à (\*). Il s'agit de déterminer parmi ces plongements ceux dont l'image  $\rho$  de  $\sqrt{-D}$  appartient à  $\mathcal{V}$ .

Pour tout discriminant fondamental  $D$ , on note  $h_D$  le nombre de classes d'idéaux du corps quadratique de discriminant  $D$ , cf. la formule de DIRICHLET [5, p. 79].

4.2. — Retournons à l'algèbre de quaternions  $H/\mathbb{Q}$ ; soit  $d$  son discriminant. Soit  $\mathcal{O}$  un ordre d'Eichler de niveau  $N$  sans facteur carré; le discriminant de  $\mathcal{O}$  est  $D = Nd$ .

THÉORÈME. — Soit  $X$  une surface abélienne simple associée à l'ordre d'Eichler  $\mathcal{O}$ , de l'algèbre de quaternions indéfinie  $H$ . Le nombre  $h_X$  des classes de courbe de genre 2 contenues dans  $X$  (dont  $X$  est la jacobienne) est donné par

$$h_X = \begin{cases} \frac{1}{2}h_{-4D} & \text{si } D \not\equiv -1 \pmod{4}, \\ h_{-D} & \text{si } D \equiv -1 \pmod{8}, \\ 2d_{-D} & \text{si } D \equiv -3 \pmod{8}, \end{cases}$$

où  $D = Nd$  est le discriminant de  $\mathcal{O}$ .

**4.3. Preuve du théorème.** — Déterminons les composants locaux  $\mathcal{V}_p$  de la différentielle  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{O}$ . Si  $\rho \in S$ ,  $\mathcal{O}_p$  est l'unique ordre maximal du corps de quaternions  $H_p$  et  $\mathcal{V}_p$  est l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_p$ . Si  $p \mid N$ ,  $N$  étant sans facteur carré, on peut après conjugaison supposer que (paragraphe 2)

$$\mathcal{O}_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_p) \mid c \in p\mathbb{Z}_p \right\}.$$

La différentielle  $\mathcal{V}_p$  de  $\mathcal{O}_p$  est l'idéal entier engendré par  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ .

Considérons maintenant un plongement de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  dans  $H$  tel que l'image  $\rho$  de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  appartienne à  $\mathcal{O}$ . Si  $p$  est un nombre premier qui divise  $d$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  est ramifié sur  $\mathbb{Q}_p$ , et il est facile de voir que  $\rho$  est une uniformisante de  $H_p$ , i.e. engendre l'idéal maximal. Si  $p \mid N$  et  $H_p = M_2(\mathbb{Q}_p)$ , on peut supposer que  $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_p$ . Comme le polynôme caractéristique de  $\rho$  est  $T^2 + D$ , on a

$$a + d = 0 \quad \text{et} \quad a^2 + pbc = -D \in p\mathbb{Z}_p.$$

Alors  $a$  et  $d \in p\mathbb{Z}_p$  et  $\rho \in \mathcal{V}_p$ . Si  $(p, D) = 1$ ,  $\mathcal{O}_p$  est un ordre maximal de  $M_2(\mathbb{Q}_p)$  et  $\rho$  est une unité de  $\mathcal{O}_p$ .

Appelons  $N_B$  (resp.  $N_C$ ) le nombre des classes de plongements maximaux de  $B$  (resp.  $C$ ) dans  $\mathcal{O}$  [4]. Il découle de la discussion qui précède l'énoncé du théorème que

$$2h_X = \begin{cases} N_B & \text{si } D \not\equiv -1 \pmod{4}, \\ N_B + N_C & \text{si } D \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Le calcul du nombre  $N_B$  (resp.  $N_C$ ) se fait par une spécialisation de la formule des traces d'Eichler. Si on tient compte du fait que l'ordre  $\mathcal{O}$  est principal, la formule est la suivante [4, p. 92]

$$N_B = h_B \prod_p m_p(B)$$



et la formule analogue pour  $N_C$ . Dans le membre de droite  $m_p(B)$  désigne le nombre de classes modulo  $\mathcal{O}_p^*$  de plongements locaux maximaux de  $B_p$  dans  $\mathcal{O}_p$ .

Si  $(p, D) = 1$ ,  $\mathcal{O}_p$  est maximal et  $H_p = M_2(\mathbb{Q}_p)$ ; alors  $m_p(B) = m_p(c) = 1$  (*loc. cit.* théorème 3.2). Si  $p \mid d$  et  $(p, N) = 1$ , l'extension  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{-D})$  de  $\mathbb{Q}_p$  est ramifiée, par suite  $m_p(B) = m_p(C) = 1$ . Si  $p \mid N$ , on a  $m_p(B) = 1$  lorsque  $B_p$  est maximal. Mais l'ordre  $B_p$  est non maximal que pour  $p = 2$  et  $Nd \equiv -1 \pmod{4}$ , cela ne peut donc se produire si  $p \mid N$ . Par suite, dans tous les cas  $m_p(B) = m_p(C) = 1$ . On obtient ainsi  $N_B = h_B$  et  $N_C = h_C$ , où  $h_B$  (resp.  $h_C$ ) est le nombre de classes d'idéaux de l'ordre  $B$  (resp.  $C$ ). Pour déterminer  $h_B$  lorsque  $B$  n'est pas maximal on peut utiliser la formule de DEDEKIND [5, p. 74]. Le conducteur de l'ordre  $B$  étant  $2C$ , cette formule s'écrit

$$\frac{h_B}{h_C} = 2(C^* : B^*)^{-1} \left(1 - \frac{1}{2}\chi_{-D}(2)\right)$$

où  $B^*$  et  $C^*$  sont les groupes d'unités de  $B$  et  $C$ . Le cas  $D = 3$  est exclu puisque  $D = Nd$  et  $d = \prod_{p \in S} p$ , l'ensemble  $S$  des nombres premiers ramifiés ayant un cardinal pair. La valeur du symbole  $\chi_{-D}(2)$  est [5, p. 38]

$$\chi_{-D}(2) = \begin{cases} 1 & \text{si } D \equiv -1 \pmod{8}, \\ -1 & \text{si } D \equiv -5 \pmod{8}. \end{cases}$$

Par suite on obtient

$$h_B = \begin{cases} h_C & \text{si } D \equiv -1 \pmod{8}, \\ 3h_C & \text{si } D \equiv -5 \pmod{8}, \end{cases}$$

d'où  $h_X = h_{-D}$  si  $D \equiv -1 \pmod{8}$  et  $h_X = 2h_{-D}$  si  $D \equiv -5 \pmod{8}$ .

*Remarque.* — De manière analogue au cas réductible, on a  $h_X \rightarrow \infty$  lorsque  $D \rightarrow \infty$  [1].

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] HAYASHIDA (T.) and NISHI (M.). — Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves, *J. Math. Soc. Japan*, t. **17**, 1967, p. 1-16.
- [2] SHIMURA (G.). — On the theory of automorphic functions, *Ann. of Math.*, t. **70**, 1959, p. 101-144.
- [3] SHIODA (T.) and MITANI (N.). — Singular abelian surfaces and binary quadratic forms, *Lectures Notes in Math.*, **412**, 1974.
- [4] VIGNERAS (M.F.). — Arithmétique des Algèbres de Quaternions, *Lectures Notes in Math.*, **800**, 1980.
- [5] ZAGIER (D.). — *Zetafunktionen und quadratische Körper*. — Springer Verlag, 1981.