

BULLETIN DE LA S. M. F.

PATRICE LE CALVEZ

Propriétés générales des applications déviant la verticale

Bulletin de la S. M. F., tome 117, n° 1 (1989), p. 69-102

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_1_69_0

© Bulletin de la S. M. F., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES APPLICATIONS DÉVIA NT LA VERTICALE

PAR

PATRICE LE CALVEZ (*)

RÉSUMÉ. — Nous étudions les difféomorphismes de l'anneau qui dévient la verticale (et dont c'est la seule propriété). Nous donnons d'abord des résultats du même type que ceux démontrés par Birkhoff sur les ouverts annulaires invariants, en particulier nous montrons qu'il existe généralement un ensemble d'Aubry–Mather sur la frontière de ceux-ci. Comme applications nous obtenons d'abord des conditions suffisantes d'existence d'un intervalle de nombres de rotation, nous démontrons ensuite le résultat suivant : si l'on perturbe un difféomorphisme déviant la verticale, préservant l'aire et admettant une région d'instabilité, on conserve un intervalle de nombres de rotation.

ABSTRACT. — We study twist maps of the annulus without any other property, such as being area-preserving or dissipative, and especially the Aubry–Mather sets and their rotation numbers. We first give results about infinite annular open sets invariant by a twist map, and show how to get an Aubry–Mather set on their boundary. Applying these results, we give, in a first part, sufficient conditions to get an interval of rotation numbers; and we show, in a second part, that if we perturb an area-preserving twist map which has a region of instability, we still have a large interval of rotation numbers.

On s'intéresse, dans ce qui suit, à la dynamique des difféomorphismes de l'anneau qui dévient la verticale mais qui n'ont pas d'autre propriété, comme celle, par exemple, de préserver ou de diminuer les aires. On s'intéresse plus particulièrement aux ensembles d'Aubry–Mather de ces applications et à leurs nombres de rotation.

Le premier paragraphe est consacré à des notations et à des rappels. On redonne notamment la définition et les propriétés des ensembles d'Aubry–Mather d'une application déviant la verticale et on rappelle des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'ensembles d'Aubry–Mather de nombre de rotation rationnel fixé.

Dans le second paragraphe on montre des résultats sur les ouverts annulaires, non nécessairement bornés, invariants par une application

(*) Texte reçu le 18 septembre 1987, révisé le 10 octobre 1988.

P. LE CALVEZ, Université Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

déviante la verticale, résultats du même type que ceux de la théorie de Birkhoff, dans le cas de préservation des aires. Ainsi obtient-on, non plus des graphes continus invariants comme dans ce dernier cas, mais des ensembles d'Aubry-Mather.

On utilise ces résultats dans le troisième paragraphe pour faire apparaître des ensembles analogues aux attracteurs de Birkhoff, définis dans le cas dissipatif, et en déduire alors des résultats du même type sur les nombres de rotation. Ainsi peut-on démontrer, ou redémontrer, l'existence d'un intervalle de rotation dès que l'on a un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation irrationnel hyperbolique, une orbite périodique non ordonnée, ou certaines intersections homoclines.

Finalement, dans le dernier paragraphe, on généralise un résultat déjà montré dans le cas dissipatif et obtenu alors grâce aux propriétés des attracteurs de Birkhoff; on montre que si l'on perturbe légèrement une application déviante la verticale, préservant les aires, et possédant une région d'instabilité, on a encore un grand nombre d'ensembles d'Aubry-Mather.

Il est à noter que l'on n'utilise ici que des méthodes topologiques.

1. Définitions, rappels

Notations. — On considère le tore $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'anneau $\mathbf{A} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ muni de sa structure de variété orientée habituelle, le revêtement universel $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de \mathbf{A} , et les applications :

$$\pi : \tilde{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathbf{A}, (\tilde{\theta}, r) \longmapsto (\tilde{\theta} + \mathbb{Z}, r) \quad \text{et} \quad \tilde{T} : \tilde{\mathbf{A}} \longrightarrow \tilde{\mathbf{A}}, (\tilde{\theta}, r) \longmapsto (\tilde{\theta} + 1, r).$$

On considère ensuite la sphère

$$S^2 = \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 = 1 \right\};$$

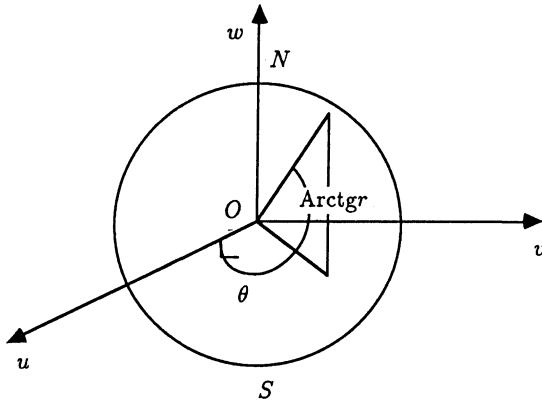
le plongement Φ de \mathbf{A} dans S^2 , défini pour tout (θ, r) appartenant à \mathbf{A} , par la relation :

$$\Phi((\theta, r)) = \left(\frac{\cos 2\pi\theta}{\sqrt{(1+r^2)}}, \frac{\sin 2\pi\theta}{\sqrt{(1+r^2)}}, \frac{1}{\sqrt{(1+r^2)}} \right),$$

et les points $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$.

On définit les projections :

$$\begin{aligned} p_1 : \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbb{T}^1, (\theta, r) \longmapsto \theta \quad \text{et} \quad p_2 : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}, (\theta, r) \longmapsto r; \\ \tilde{p}_1 : \tilde{\mathbf{A}} &\longrightarrow \mathbb{R}, (\tilde{\theta}, r) \longmapsto \tilde{\theta} \quad \text{et} \quad \tilde{p}_2 : \tilde{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathbb{R}, (\tilde{\theta}, r) \longmapsto r. \end{aligned}$$



On considère pour tout point $x = (\theta, r)$ de \mathbf{A} (resp. $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r)$ de $\tilde{\mathbf{A}}$) les ensembles :

$$\begin{aligned} D(x) &= \{\theta\} \times \mathbb{R} \quad (\text{resp. } D(\tilde{x}) = \{\tilde{\theta}\} \times \mathbb{R}), \\ D_S(x) &= \{\theta\} \times]-\infty, r] \quad (\text{resp. } D_S(\tilde{x}) = \{\tilde{\theta}\} \times]-\infty, r]), \\ D_N(x) &= \{\theta\} \times [r, +\infty[\quad (\text{resp. } D_N(\tilde{x}) = \{\tilde{\theta}\} \times [r, +\infty[). \end{aligned}$$

On dira qu'un ensemble compact X de \mathbf{A} *sépare* \mathbf{A} , si et seulement si $\mathbf{A} \setminus X$ admet deux composantes connexes non bornées. Si M est un réel suffisamment grand, l'une d'entre elles contient $\mathbb{T}^1 \times]-\infty, -M]$, on la note $U(X)$, l'autre contient $\mathbb{T}^1 \times [M, +\infty[$, on la note $V(X)$.

On écrira pour toutes parties X et Y d'un espace topologique E , respectivement $\text{Ad}(X)$, $\text{Int}(X)$, $\text{Fr}(X)$, $X \setminus Y$ pour l'adhérence, l'intérieur, la frontière de X , et pour l'ensemble des points de X qui ne sont pas dans Y .

On dit qu'un difféomorphisme f de \mathbf{A} , de classe C^1 , homotope à l'identité, *dévie la verticale à droite* si, un relèvement \tilde{f} de f à $\tilde{\mathbf{A}}$ étant choisi, on a les relations suivantes :

i) pour tout \tilde{x} appartenant à $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\partial/\partial r \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}(\tilde{x}) > 0,$$

ii) pour tout $\tilde{\theta}$ appartenant à \mathbb{R}

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}((\tilde{\theta}, r)) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{p}_2 \circ \tilde{f}((\tilde{\theta}, r)) = +\infty,$$

iii) pour tout $\tilde{\theta}$ appartenant à \mathbb{R}

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}((\tilde{\theta}, r)) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \tilde{p}_2 \circ \tilde{f}((\tilde{\theta}, r)) = -\infty.$$

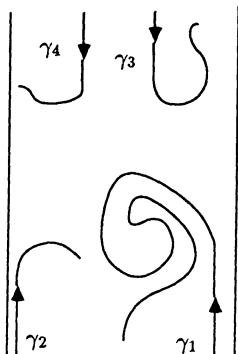
On notera \mathcal{K} l'ensemble des difféomorphismes de classe C^1 de \mathbf{A} homotopes à l'identité, qui dévient la verticale à droite, et $\tilde{\mathcal{K}}$ l'ensemble

des difféomorphismes de $\tilde{\mathbf{A}}$ qui relèvent un élément de \mathcal{K} . Chacun de ces ensembles sera muni de la topologie compacte-ouverte. Puisque tout élément f de \mathcal{K} est un difféomorphisme de \mathbf{A} homotope à l'identité, il existe un unique homéomorphisme de S^2 qui coïncide avec $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$ sur $S^2 \setminus \{N, S\}$; celui-ci, noté \hat{f} , laisse fixes les points N et S . De plus si f appartient à \mathcal{K} et si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{K} convergeant vers f , alors la suite $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers \hat{f} .

Rappels sur les chemins positifs et négatifs. — Une notion importante dans l'étude des applications déviant la verticale est celle de chemin positif et négatif. Ceux-ci ont été définis dans l'étude des régions d'instabilité, ils étaient alors issus d'un bord de cette région (voir HERMAN [He], LE CALVEZ [L2]). Dans l'étude qui nous concerne, on s'intéresse à l'anneau \mathbf{A} tout entier et non pas à une région d'instabilité, on va ainsi définir ce que l'on appelle des chemins positifs et négatifs issus de l'infini.

Définition. — Un *chemin positif* issu de S (resp. N) est un plongement $\gamma :]-\infty, 0] \rightarrow \mathbf{A}$ de classe C^1 , vérifiant les propriétés suivantes :

- i) il existe τ appartenant à $] - \infty, 0]$ tel que, pour tout t inférieur à τ , on ait $\gamma'(t) = v$ (resp. $\gamma'(t) = -v$), où v est le vecteur vertical $(0, 1)$,
- ii) le relèvement à \mathbb{R} de l'angle que fait v (resp. $-v$) avec $\gamma'(t)$ qui est nul en τ est strictement positif, pour t strictement supérieur à τ .

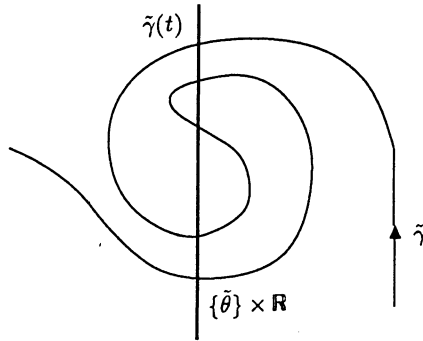


Exemple de deux chemins positifs γ_1 et γ_3 , issus respectivement de S et de N et de deux chemins négatifs γ_2 et γ_4 , issus respectivement de S et de N .

Par analogie avec les chemins positifs et négatifs issus du bord d'une région d'instabilité, on a, par la même démonstration, le résultat suivant (voir HERMAN [He]) :

PROPOSITION 1.1. — Soit γ un chemin positif (resp. négatif) issu de S et $\tilde{\gamma}$ un relèvement de γ dans $\tilde{\mathbf{A}}$. Soit t un réel négatif tel que $\tilde{\gamma}(]-\infty, t[)$ ne rencontre pas $D(\gamma(t)) = \{\tilde{\theta}\} \times \mathbb{R}$, alors :

- i) $\tilde{\gamma}(]-\infty, t[)$ est inclus dans $]\tilde{\theta}, +\infty[\times \mathbb{R}$ (resp. $]-\infty, \tilde{\theta}[\times \mathbb{R}$),
- ii) $\tilde{\gamma}(]t, 0])$ ne rencontre pas $D_N(\tilde{\gamma}(t))$.



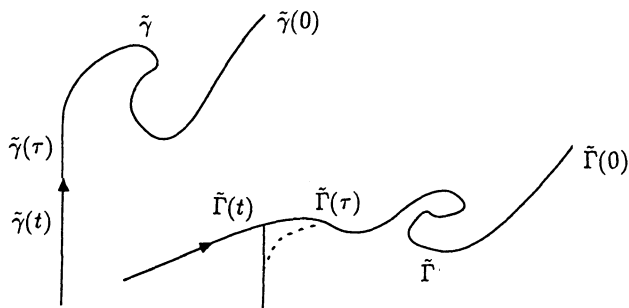
On va continuer par un autre résultat, dont l'analogie pour un chemin positif ou négatif issu du bord d'une région d'instabilité a déjà été montré, et pour cela on introduit la définition suivante :

Définition. — On dira qu'une partie U de \mathbf{A} est un *anneau* si l'ensemble $\hat{U} = \Phi(U) \cup \{S\}$ est une partie ouverte, connexe et simplement connexe de S^2 . Si U est un anneau, on définit l'ensemble U^- (resp. U^+) des points de U accessibles par un chemin négatif (resp. positif) à valeur dans U ; on définit aussi l'ensemble U^0 des points x de U tels que $D_S(x)$ soit contenu dans U et l'application $\mu_U : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui, à tout point θ de \mathbb{T}^1 associe $\mu_U(\theta) = \sup(p_2(U^0 \cap (\{\theta\} \times \mathbb{R})))$. Chacun des ensembles U , U^- , U^+ et U^0 est une partie ouverte et connexe de \mathbf{A} .

PROPOSITION 1.2. — Pour tout anneau U de \mathbf{A} l'intersection de U^- et de U^+ est égale à U^0 . De plus, si f appartient à \mathcal{K} et si U est invariant par f , alors $f(U^-)$ et $f^{-1}(U^+)$ sont inclus respectivement dans U^- et dans U^+ .

Démonstration. — La première partie de cette proposition se démontre exactement comme dans l'étude des régions d'instabilité ou dans celle des attracteurs de Birkhoff (voir BIRKHOFF [Bi] ou LE CALVEZ [L2]), il suffit pour cela d'utiliser les propriétés des chemins positifs et négatifs montrés alors et la simple connexité de l'ensemble $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$. Pour montrer la seconde partie de la proposition on considère un chemin négatif γ :

$]-\infty, 0] \rightarrow A$ à valeur dans U , vérifiant $\gamma'(t) = v$ pour t inférieur à τ , où τ est un réel négatif. Le chemin $\Gamma = f \circ \gamma$ est à valeur dans U mais ne vérifie plus les conditions des chemins négatifs issus de S . Cependant si t_1 est suffisamment petit, la verticale $D_S(\Gamma(t_1))$ sera contenue dans U , puisque U est un anneau et puisque f dévie la verticale. On peut alors montrer que le relèvement à \mathbb{R} de l'angle que fait v avec $\Gamma'(t)$, qui en t_1 est entre $-\pi$ et 0 est toujours négatif (voir LE CALVEZ [L2]) et on construit alors facilement un chemin négatif issu de S à valeur dans U , aboutissant en $\Gamma(0)$ (voir la figure ci-dessous dessinée dans le revêtement \tilde{A}).



Rappels sur les ensembles d'Aubry-Mather. — On dira qu'une partie compacte Ξ de A , invariante par f est un *ensemble f -ordonné*, si la restriction de p_1 à Ξ est injective et si l'ordre alors défini naturellement par la première projection sur $\tilde{\Xi} = \pi^{-1}(\Xi)$ est préservé par un relèvement \tilde{f} de f (voir CHENCINER [Che]), il existe alors un réel $\tilde{\rho}$, appelé *nombre de rotation* de Ξ pour \tilde{f} , qui vérifie, pour tout k appartenant à \mathbb{Z} et tout \tilde{x} appartenant à $\tilde{\Xi}$ la relation :

$$-1 < \tilde{p}_1(\tilde{f}^k(\tilde{x})) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) - k\tilde{\rho} < 1.$$

Ce nombre dépend du relèvement choisi mais sa partie fractionnaire en est indépendante. Si de plus Ξ est minimal (i.e. si tout point de Ξ a une orbite dense dans Ξ) on dit que Ξ est un *ensemble d'Aubry-Mather* de f (ou de \tilde{f}). En particulier tout fermé invariant f -ordonné contient un ensemble d'Aubry-Mather de même nombre de rotation. Si $\tilde{\rho}$ est irrationnel l'ensemble Ξ est alors soit le graphe d'une fonction continue de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} (on dira alors plus simplement par la suite que c'est un graphe invariant), soit un ensemble de Cantor; dans le cas où $\tilde{\rho}$ est rationnel c'est l'orbite d'un point périodique de période égale au dénominateur de la forme irréductible de $\tilde{\rho}$.

On définit alors, pour toute application \tilde{f} de $\tilde{\mathcal{K}}$, l'ensemble $R(\tilde{f})$ des nombres de rotation des ensembles d'Aubry–Mather de \tilde{f} et l'ensemble $R'(\tilde{f})$ des nombres de rotation des graphes continus invariants de \tilde{f} . L'ensemble $R'(\tilde{f})$ est inclus dans $R(\tilde{f})$, et chacun des deux est fermé (voir KATOK [K]). D'autre part, si $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\tilde{\mathcal{K}}$ convergeant vers \tilde{f} , si $(\tilde{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle convergeant vers $\tilde{\rho}$ et formée, pour tout entier n , d'un point de $R(\tilde{f}_n)$ (resp. $R'(\tilde{f}_n)$), alors $\tilde{\rho}$ appartient à $R(\tilde{f})$ (resp. $R'(\tilde{f})$). Enfin, si \tilde{f} admet un graphe invariant C de nombre de rotation $\tilde{\rho}$, alors les ensembles d'Aubry–Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}'$ strictement supérieur (resp. strictement inférieur) à $\tilde{\rho}$ appartiennent à $V(C)$ (resp. à $U(C)$) et si $\tilde{\rho}$ est irrationnel, il n'y a qu'un ensemble d'Aubry–Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}$.

On connaît des conditions nécessaires et suffisantes pour que $R(\tilde{f})$ contienne un rationnel donné. La première de ces conditions est un résultat de Hall (voir HALL [Ha]), qui exprime qu'un rationnel $\tilde{\rho} = p/q$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, appartient à $R(f)$ si et seulement s'il existe un point \tilde{x} de $\tilde{\mathcal{A}}$ tel que $\tilde{f}^q(\tilde{x}) = \tilde{T}^p(\tilde{x})$; un tel point est alors appelé un *point de type* (p, q) . En réalité le résultat de Hall s'applique sous des hypothèses différentes : f est de classe C^2 , laisse invariants les graphes de deux applications continues ψ^- et ψ^+ de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} , vérifiant $\psi^- < \psi^+$ et $\tilde{\rho}$ est compris entre les deux nombres de rotation de ces graphes. On se ramène à ces hypothèses en utilisant une méthode déjà employée dans le cas dissipatif (voir LE CALVEZ [L1]), on approxime d'abord f par une application g de classe C^3 appartenant à \mathcal{K} , puis en utilisant un champ de vecteur convenable, on construit une application vérifiant les hypothèses énoncées plus haut et qui n'a pas d'autre ensemble d'Aubry–Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}$ que ceux de g . On conclut ensuite en faisant tendre g vers f .

Il faut donc trouver des conditions pour que \tilde{f} admette un point de type (p, q) . Pour cela on définit

$$\tilde{K}_{p,q} = \{\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{A}} \mid \tilde{p}_1(\tilde{f}^q(\tilde{x})) = \tilde{p}_1(\tilde{x}) + p\}.$$

Son image $K_{p,q} = \pi(\tilde{K}_{p,q})$ est alors compacte et sépare \mathbb{A} , ceci parce que l'application f dévie la verticale à droite et que l'on a donc les relations :

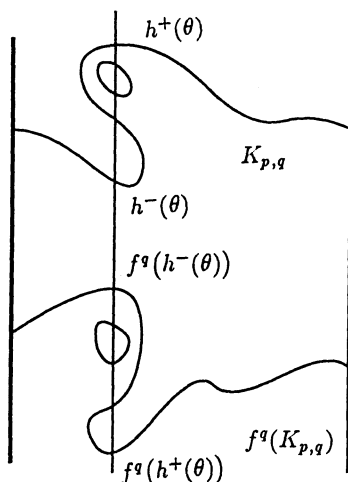
$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^q(\tilde{x})) > \tilde{p}_1(\tilde{x}) + p \quad \cdot \quad (\text{resp. } \tilde{p}_1(\tilde{f}^q(\tilde{x})) < \tilde{p}_1(\tilde{x}) + p),$$

dès que $\tilde{p}_2(\tilde{x})$ est suffisamment grand (resp. petit).

Si on note f l'application relevée par \tilde{f} on obtient les résultats suivants dont la démonstration faite dans le cas dissipatif reste encore valable ici (voir LE CALVEZ [L1]).

PROPOSITION 1.3. — Si on définit, pour tout θ appartenant à \mathbb{T}^1 , les points $h^-(\theta)$ et $h^+(\theta)$ de $K_{p,q} \cap \{\theta\} \times \mathbb{R}$ d'ordonnée respectivement minimale et maximale et si on considère un point $x = (\theta, r)$ de $K_{p,q}$ alors :

$$p_2(f^q(h^+(\theta))) \leq p_2(f^q(x)) \leq p_2(f^q(h^-(\theta))).$$



La démonstration de cette proposition (voir LE CALVEZ [L 1]) est basée sur les propriétés des courbes positives et négatives. On en déduit, comme conséquence, les résultats suivants :

PROPOSITION 1.4. — Toute partie fermée de $K_{p,q}$ qui sépare \mathbb{A} contient chacun des points $h^-(\theta)$ et $h^+(\theta)$, où θ décrit \mathbb{T}^1 . En particulier $K_{p,q}$ a une composante connexe et une seule qui sépare \mathbb{A} .

Démonstration. — On sait, par la définition de h^- , que l'ensemble $D_S(h^-(\theta))$ ne rencontre $K_{p,q}$ qu'au point $h^-(\theta)$, on sait d'autre part, grâce à la PROPOSITION 1.3, qu'il en est de même de $f^{-q}(D_N(f^q(h^-(\theta))))$. Ainsi, si L est une partie fermée de $K_{p,q}$ séparant \mathbb{A} , le premier de ces ensembles est contenu dans $U(L) \setminus \{h^-(\theta)\}$, le second dans $V(L) \cup \{h^-(\theta)\}$: on en déduit que leur point commun $h^-(\theta)$ est contenu dans L . On raisonne de même pour $h^+(\theta)$.

Il suffit, pour montrer la proposition, d'exhiber une partie connexe de $K_{p,q}$ qui sépare \mathbb{A} ; la composante connexe de $K_{p,q}$ qui la contient aura alors la même propriété, et ce sera la seule, puisqu'aucune autre composante connexe ne rencontre les graphes de h^- et de h^+ . Or, on

montre facilement (voir LE CALVEZ [L1]) que la frontière de la composante connexe non bornée de $\mathbb{A} \setminus \text{Ad}(U(K_{p,q}))$ est fermée, contenue dans $K_{p,q}$ et sépare \mathbb{A} . \square

On note alors $\Lambda_{p,q}$ la composante connexe de $K_{p,q}$ qui sépare \mathbb{A} et on obtient, comme conséquence des deux résultats précédents, la condition suivante pour que \tilde{f} admette un point de type (p, q) et donc pour que le réel $\tilde{\rho} = p/q$ appartienne à $R(\tilde{f})$:

PROPOSITION 1.5. — *Si \tilde{f} est un élément de $\tilde{\mathcal{K}}$ qui admet un point de type (p, q) , alors tout ensemble fermé connexe L inclus dans $K_{p,q}$ et séparant \mathbb{A} (en particulier $\Lambda_{p,q}$), rencontre son image par f^q .*

Si \tilde{f} est un élément de $\tilde{\mathcal{K}}$ qui n'a pas de point de type (p, q) , alors deux cas sont possibles :

i) *pour tout θ appartenant à \mathbb{T}^1 , $p_2(f^q(h^-(\theta))) < p_2(h^-(\theta))$; dans ce cas, la verticale $D_S(x)$ de tout point x de $f^q(K_{p,q})$ est incluse dans $U(K_{p,q})$, l'ensemble $f^q(\mathbb{A} \setminus V(K_{p,q}))$ est inclus dans $U(K_{p,q})$, en particulier $f^q(\Lambda_{p,q})$ aussi ;*

ii) *pour tout θ appartenant à \mathbb{T}^1 , $p_2(f^q(h^+(\theta))) > p_2(h^+(\theta))$; dans ce cas, la verticale $D_N(x)$ de tout point x de $f^q(K_{p,q})$ est incluse dans $V(K_{p,q})$, l'ensemble $f^q(\mathbb{A} \setminus U(K_{p,q}))$ est inclus dans $V(K_{p,q})$, en particulier $f^q(\Lambda_{p,q})$ aussi.*

Démonstration. — Supposons d'abord que \tilde{f} n'ait pas de point de type (p, q) . Dans ce cas, l'application $p_2 \circ f - p_2$ ne s'annule pas sur $K_{p,q}$, a fortiori elle ne s'annule pas sur $\Lambda_{p,q}$ et, comme cet ensemble est connexe, elle garde dessus un signe constant. Si ce signe est négatif on a alors la relation $p_2(f^q(h^-(\theta))) < p_2(h^-(\theta))$, pour tout point θ de \mathbb{T}^1 , puisque $\Lambda_{p,q}$ contient l'image de h^- . La définition de h^- et la PROPOSITION 1.3 prouvent alors que la verticale $D_S(x)$ de tout point x de $f^q(K_{p,q})$ est disjointe de $K_{p,q}$; on en déduit alors que $f^q(K_{p,q})$ est inclus dans $U(K_{p,q})$ et que $f^q(\Lambda_{p,q})$ est inclus dans $U(\Lambda_{p,q})$. Si par contre ce signe est positif, on montre de la même façon que l'on a la condition ii).

Supposons maintenant que \tilde{f} ait un point de type (p, q) . L'image par π de ce point appartient alors à l'ensemble $K_{p,q} \cap f^q(K_{p,q})$. Il existe donc, grâce à la remarque précédente, deux éléments θ_0 et θ_1 de \mathbb{T}^1 tels que :

$$p_2(f^q(h^-(\theta_0))) \geq p_2(h^-(\theta_0)) \quad \text{et} \quad p_2(f^q(h^+(\theta_1))) \leq p_2(h^+(\theta_1)).$$

On en déduit, grâce à la PROPOSITION 1.4, que l'application $p_2 \circ f^q - p_2$ s'annule sur toute partie fermée connexe L de $K_{p,q}$ séparant \mathbb{A} , que celle-ci contient donc l'image par π d'un point de type (p, q) , image qui appartient à $f^q(L) \cap L$. \square

M. CASDAGLI a trouvé une autre condition pour que $\tilde{\rho} = p/q$ appartienne à $R(\tilde{f})$, relation que l'on utilisera aussi par la suite :

PROPOSITION 1.6. — Soit L une partie fermée connexe de $K_{p,q}$ séparant \mathbf{A} alors \tilde{f} admet un point de type (p, q) si et seulement si $f(L)$ rencontre L .

Démonstration (voir CASDAGLI [Ca]). — Supposons que L soit une partie fermée connexe de $K_{p,q}$ séparant \mathbf{A} et que $f(L)$ ne rencontre pas L ; l'ensemble $f(L)$ appartient alors, soit à $U(L)$, soit à $V(L)$. Dans le premier cas on obtient $f(U(L)) \subset U(L)$, d'où l'on tire $f^2(L) \subset f(U(L)) \subset U(L)$, et, par une récurrence immédiate, la relation $f^q(L) \subset U(L)$. La PROPOSITION 1.5 permet alors de conclure que \tilde{f} n'a pas de point de type (p, q) . Dans le second cas $f(V(L))$ est contenu dans $V(L)$, on montre alors que $f^q(L)$ est contenu dans $V(L)$ et un résultat analogue.

Supposons maintenant que $f(L)$ rencontre L , choisissons un point x appartenant à $f(L) \cap L$, un point $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r)$ appartenant à $\pi^{-1}(\{x\})$ et définissons $\tilde{x}' = (\tilde{\theta}', r') = \tilde{f}^{-1}(\tilde{x})$. Puisque f dévie la verticale, le point \tilde{x} est l'unique point d'intersection de $f(\{\tilde{\theta}'\} \times \mathbb{R})$ et de $\{\tilde{\theta}\} \times \mathbb{R}$, de même le point $\tilde{T}^p(\tilde{x})$ est l'unique point d'intersection de $f(\{\tilde{\theta}' + p\} \times \mathbb{R})$ et de $\{\tilde{\theta} + p\} \times \mathbb{R}$. Mais puisque x appartient à $f(L) \cap L$ et puisque L est contenu dans $K_{p,q}$, le point $\tilde{f}^q(\tilde{x})$ appartient aussi à $f(\{\tilde{\theta}' + p\} \times \mathbb{R}) \cap \{\tilde{\theta} + p\} \times \mathbb{R}$. On en déduit $\tilde{f}^q(\tilde{x}) = \tilde{x} + p$. \square

Notons, pour finir, la proposition suivante :

PROPOSITION 1.7. — Soit Ξ un ensemble d'Aubry-Mather de \tilde{f} de nombre de rotation $\tilde{\rho}'$. Alors si $\tilde{\rho}'$ est inférieur (resp. supérieur) à p/q l'ensemble Ξ est disjoint de $V(K_{p,q})$ (resp. $U(K_{p,q})$). En particulier si \tilde{f} n'a pas de point de type (p, q) et si $\tilde{\rho}'$ est inférieur (resp. supérieur) à p/q , Ξ est contenu dans $U(K_{p,q})$ (resp. $V(K_{p,q})$) et donc dans $U(\Lambda_{p,q})$ (resp. $V(\Lambda_{p,q})$).

Démonstration. — Supposons que f admette un ensemble d'Aubry-Mather Ξ rencontrant $V(K_{p,q})$; il existe alors un \tilde{x} appartenant à $\pi^{-1}(\Xi)$ tel que $\tilde{p}_1(\tilde{f}^q(\tilde{x})) > \tilde{p}_1(\tilde{x}) + p$. Comme Ξ est f -ordonné, on en déduit par une récurrence immédiate la relation :

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^{(k+1)q}(\tilde{x})) > \tilde{p}_1(\tilde{f}^{kq}(\tilde{x})) + p, \quad \text{pour tout entier } k,$$

puis la relation :

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^{kq}(\tilde{x})) > \tilde{p}_1(\tilde{x}) + kp, \quad \text{pour tout entier } k,$$

et, finalement, on montre que le nombre de rotation $\tilde{\rho}'$ de Ξ est supérieur à p/q . On montre de même que si Ξ rencontre $U(K_{p,q})$, alors $\tilde{\rho}'$ est inférieur à p/q .

Supposons maintenant que f n'ait pas de point de type (p, q) ; on sait alors, grâce à la PROPOSITION 1.5, que l'une des conditions suivantes est vraie :

- i) $f^q(\mathbf{A} \setminus V(K_{p,q})) \subset U(K_{p,q})$ et donc $f^{-q}(\mathbf{A} \setminus U(K_{p,q})) \subset V(K_{p,q})$,
- ii) $f^q(\mathbf{A} \setminus U(K_{p,q})) \subset V(K_{p,q})$ et donc $f^{-q}(\mathbf{A} \setminus V(K_{p,q})) \subset U(K_{p,q})$.

Comme Ξ est invariant par f^q , on obtient dans les deux cas le résultat demandé. \square

Rappel de topologie du plan. — Nous rappelons le résultat suivant (voir NEWMAN [N], par exemple).

PROPOSITION 1.8. — *Si X est un ensemble fermé et connexe de S^2 , toute composante connexe de $S^2 \setminus X$ est simplement connexe. Si U est un ensemble ouvert et simplement connexe de S^2 , sa frontière est connexe.*

2. Étude des anneaux invariants par les difféomorphismes déviant la verticale

On s'intéresse dans ce paragraphe aux anneaux invariants par un élément de \mathcal{K} .

PROPOSITION 2.1. — *Soient f un élément de \mathcal{K} et U un anneau distinct de \mathbf{A} invariant par f , alors l'un des ensembles $p_2(U^-)$ ou $p_2(U^+)$ est majoré; en particulier $p_2(U^0)$ est majoré et l'application μ_U est à valeur réelle.*

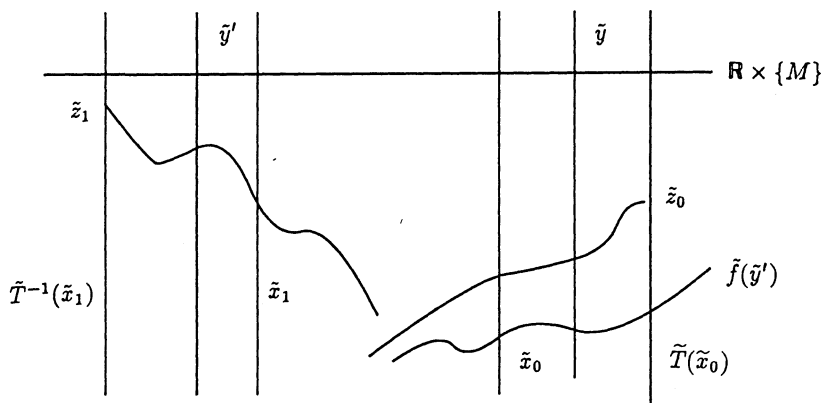
Démonstration. — On suppose que f appartienne à \mathcal{K} et que U est un anneau distinct de \mathbf{A} et invariant par f , on va commencer par montrer que $p_2(U^0)$ est majoré, ce qui implique en particulier que l'application μ_U (voir PARAGRAPHE 1) est à valeur réelle et bornée. On choisit un point x_0 appartenant à $\mathbf{A} \setminus U$, un relèvement \tilde{f} de f à $\tilde{\mathbf{A}}$, un point \tilde{x}_0 appartenant à $\pi^{-1}(\{x_0\})$ et on pose $\tilde{x}_1 = \tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_0)$.

Puisque f dévie la verticale à droite, la courbe $\tilde{f}(D(\tilde{T}^{-1}(\tilde{x}_1)))$ doit rencontrer la droite $D(\tilde{T}(\tilde{x}_0))$ en un point que l'on note \tilde{z}_0 ; on définit alors $\tilde{z}_1 = \tilde{f}^{-1}(\tilde{z}_0)$. Chacun des ensembles $\tilde{p}_2(\tilde{f}^{-1}(D_S(\tilde{z}_0)))$ et $\tilde{p}_2(\tilde{f}(D_S(\tilde{z}_1)))$ est alors majoré, on choisit un majorant commun M et on va montrer que U^0 est contenu dans $\mathbb{T}^1 \times]M, +\infty[$.

On considère pour cela un point y appartenant à $\mathbb{T}^1 \times]M, +\infty[$ et on note \tilde{y} et \tilde{y}' les points de $\pi^{-1}(\{y\})$ qui vérifient

$$\tilde{p}_1(\tilde{x}_0) < \tilde{p}_1(\tilde{y}) \leq \tilde{p}_1(\tilde{x}_0) + 1 \quad \text{et} \quad \tilde{p}_1(\tilde{x}_1) - 1 \leq \tilde{p}_1(\tilde{y}') < \tilde{p}_1(\tilde{x}_1).$$

Puisque $p_2(y)$ est strictement supérieur à M , les ensembles $\tilde{f}(D_S(\tilde{y}'))$ et $D_S(\tilde{y})$ s'intersectent, et leur réunion divise le plan en deux régions connexes et simplement connexes. Celle dont l'image par p_2 est majorée contient le point x_0 , ainsi sa frontière n'est pas contenue dans $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ puisque \tilde{U} est simplement connexe et puisque \tilde{x}_0 n'appartient pas à \tilde{U} . Par conséquent, le point y ne peut pas appartenir à U^0 .



Pour montrer que l'un des ensembles $p_2(U^-)$ ou $p_2(U^+)$ est majoré on va raisonner par l'absurde, on va supposer qu'aucun d'entre eux ne l'est et on en déduira que $p_2(f(U^-) \cap U^+)$ ne l'est pas non plus. Puisque par la PROPOSITION 1.2, l'ensemble $f(U^-) \cap U^+$ est contenu dans U^0 , on aura obtenu une contradiction.

Fixons un réel M_0 . Puisque f dévie la verticale à droite, il existe, pour tout $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r)$ appartenant à \tilde{A} , un réel $M_{\tilde{x}}$ tel que

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}(\tilde{\theta}, M_{\tilde{x}})) > \tilde{p}_1(\tilde{f}(\tilde{x})) + 1.$$

Ainsi, grâce à la compacité de $f^{-1}(\mathbb{T}^1 \times \{M_0\})$, on en déduit qu'il existe un réel M_1 tel que pour tout $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r)$ appartenant à $f^{-1}(\mathbb{R} \times \{M_0\})$ on ait :

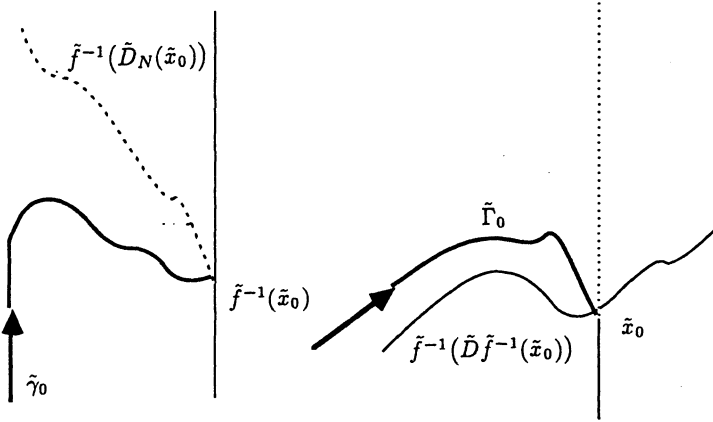
$$\text{pour tout } R > M_1, \quad \tilde{p}_1(\tilde{f}(\tilde{\theta}, R)) > \tilde{p}_1(\tilde{f}(\tilde{x})) + 1.$$

Choisissons maintenant M_2 tel que $\mathbb{T}^1 \times [M_1, +\infty[\supset f^{-1}(\mathbb{T}^1 \times \{M_2\})$. Puisque, par hypothèse, $p_2(U^-)$ n'est pas majoré, il en est de même de $p_2(f(U^-))$ et on peut trouver un chemin négatif $\gamma_0 :]-\infty, 0] \rightarrow U$, issu de S , tel que $p_2(f(\gamma_0(0)))$ soit supérieur à M_2 . Le chemin $\Gamma_0 = f \circ \gamma_0$

vérifie alors $\lim_{t \rightarrow -\infty} p_2(\Gamma_0(t)) = -\infty$. On peut donc toujours supposer, quitte à restreindre γ_0 que l'on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma_0(]-\infty, 0[) \text{ est inclus dans } \mathbb{T}^1 \times]-\infty, M_2[, \\ \Gamma_0(0) \text{ appartient à } \mathbb{T}^1 \times \{M_2\}. \end{aligned}$$

On considère alors un relèvement \tilde{f} de f à \tilde{A} et un relèvement $\tilde{\gamma}_0$ de γ_0 ; on définit alors $\tilde{\Gamma}_0 = \tilde{f} \circ \tilde{\gamma}_0$ et on pose $\tilde{x}_0 = \tilde{\Gamma}_0(0)$. Les ensembles $\tilde{\Gamma}_0(]-\infty, 0[)$ et $D_N(\tilde{x}_0)$ ne se rencontrant pas, il en est de même des ensembles $\tilde{\gamma}_0(]-\infty, 0[)$ et $\tilde{f}^{-1}(D_N(\tilde{x}_0))$. On en déduit, grâce à la PROPOSITION 1.1, que $\tilde{\gamma}_0(]-\infty, 0[)$ est inclus dans $]-\infty, \tilde{p}_1(\tilde{x}_0)] \times \mathbb{R}$ et que $\tilde{\Gamma}_0(]-\infty, 0[)$ se trouve donc situé au-dessus de l'ensemble $\tilde{f}(D(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_0)))$.



De même, puisque $p_2(U^+)$ n'est pas majoré, on peut trouver un chemin positif $\gamma_1 :]-\infty, 0] \rightarrow U$, issu de S , vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_1(]-\infty, 0[) \text{ est inclus dans } \mathbb{T}^1 \times]-\infty, M_2[, \\ \gamma_1(0) \text{ appartient à } \mathbb{T}^1 \times \{M_2\}. \end{aligned}$$

On considère alors le point \tilde{x}_1 appartenant à $\pi^{-1}(\{\gamma_1(0)\})$ qui vérifie

$$\tilde{p}_1(\tilde{x}_0 - 1) \leq \tilde{p}_1(\tilde{x}_1) < \tilde{p}_1(\tilde{x}_0),$$

et le relèvement $\tilde{\gamma}_1$ de γ_1 qui aboutit en \tilde{x}_1 . On sait, grâce à la PROPOSITION 1.1, que $\tilde{\gamma}_1(]-\infty, t_1[)$ est inclus dans $[\tilde{p}_1(\tilde{x}_1), +\infty[\times \mathbb{R}$. Comme

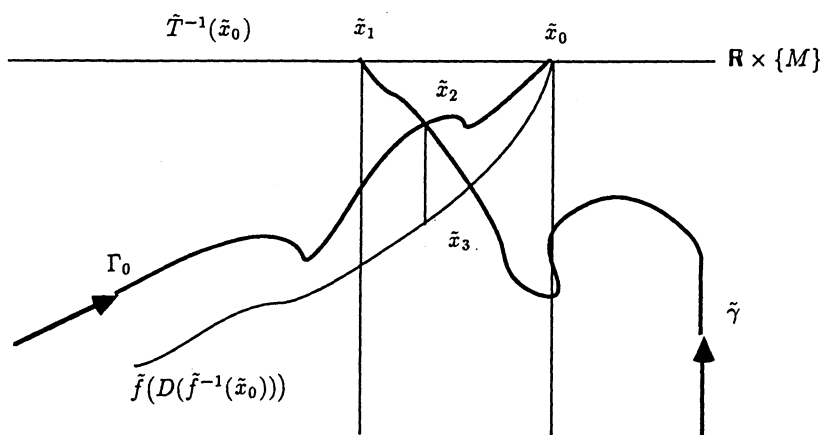
il est aussi contenu dans $\mathbb{T}^1 \times]-\infty, M]$, il doit rencontrer l'ensemble $\tilde{\Gamma}_0]-\infty, t_0[$ en un point \tilde{x}_2 situé au-dessus de $\tilde{f}(D(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_0)))$ et vérifiant :

$$\tilde{p}_1(\tilde{x}_0) - 1 \leq \tilde{p}_1(\tilde{x}_2) < \tilde{p}_1(\tilde{x}_0).$$

On pose alors $\tilde{x}_3 = D_S(\tilde{x}_2) \cap \tilde{f}(D(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_0)))$. Le point $\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_3)$ appartient à $D_S(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_0))$, le point $\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_0)$ appartient à $\mathbb{T}^1 \times [M_1, +\infty[$ et on a :

$$\tilde{p}_1(\tilde{x}_0) < \tilde{p}_1(\tilde{x}_3) + 1.$$

De la définition même de M_1 , on déduit que le segment vertical joignant $\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_0)$ à $\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_3)$ est disjoint de $\tilde{f}^{-1}(\mathbb{R} \times \{M_0\})$, et donc que $\tilde{p}_2(\tilde{x}_3)$ est supérieur à M_0 . Comme M_0 est arbitraire, on a montré que $p_2(f(U^-) \cap U^+)$ n'était pas majoré et ainsi achevé la démonstration.



Remarque. — Dans la première partie de la démonstration, quand on a considéré les ensembles $\tilde{f}(D_S(\tilde{y}))$ et $D_S(\tilde{y})$, on ne s'est servi que de l'inclusion $f(U) \subset U$ pour montrer que U^0 était borné, on aurait pu montrer d'ailleurs le même résultat avec la relation $f^{-1}(U) \subset U$. Ainsi, si f appartient à \mathcal{K} et si U est un anneau distinct de \mathbb{A} tel que $f(U)$ ou $f^{-1}(U)$ soit inclus dans U , alors $p_2(U_0)$ est majoré.

Dans le cas où f préserve une mesure chargeant les ouverts, on peut préciser le résultat précédent.

THÉORÈME 1. — Soient f un élément de \mathcal{K} préservant une mesure chargeant les ouverts et U un anneau invariant par f et distinct de \mathbb{A} ; alors trois cas sont possibles :

- i) l'application μ_U est continue à droite mais n'est pas continue, U^+ et U^0 sont égaux, $p_2(U^-)$ n'est pas majoré;
- ii) l'application μ_U est continue à gauche mais n'est pas continue, U^- et U^0 sont égaux, $p_2(U^+)$ n'est pas majoré;
- iii) l'application μ_U est continue, les ensembles U^+ , U^- et U^0 sont égaux.

De plus l'alternative obtenue est indépendante de l'anneau choisi, elle ne dépend que de f .

Démonstration. — Soient f un élément de \mathcal{K} , qui préserve une mesure ζ chargeant les ouverts, et U un anneau distinct de \mathbb{A} et invariant par f . On sait déjà, grâce à la PROPOSITION 2.1, que μ_U est à valeur réelle et que l'un des ensembles $p_2(U^-)$ ou $p_2(U^+)$ est majoré. On suppose, par exemple, que $p_2(U^+)$ est majoré et on va montrer, d'une part que μ_U est continue à droite, d'autre part que U^+ et U^0 sont égaux.

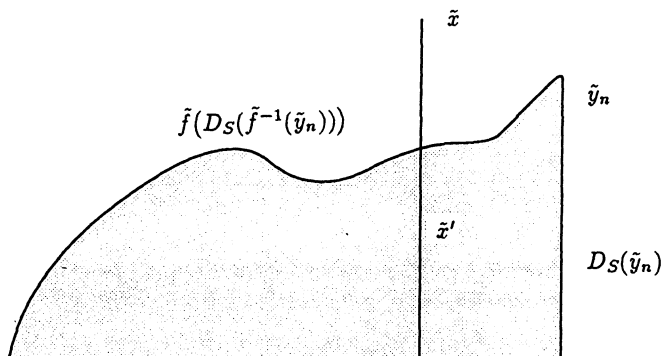
L'ouvert $W = U^0 \text{Ad}(f(U^0))$ est contenu dans $E = U^- \setminus f(U^-)$; en effet, d'une part U^0 est inclus dans U^- , d'autre part tout point qui est à la fois dans U^0 et dans $f(U^-)$ est dans $U^+ \cap f(U^-)$, il est donc dans $f(U^+) \cap f(U^-)$, c'est-à-dire dans $f(U^0)$.

Comme $f(U^-)$ est inclus dans U^- , la suite $(f^k(E))_{k \in \mathbb{Z}}$ est formée d'ensembles disjoints et il en est de même de la suite $(f^k(W))_{k \in \mathbb{Z}}$. Or tout élément de la suite $(f^{-n}(W))_{n \in \mathbb{N}}$ est contenu dans U^+ et ne rencontre pas $\text{Ad}(f(U^0))$, en particulier il est disjoint de $\mathbb{T}^1 \times]-\infty, M]$ pour M assez petit. Mais l'ensemble $p_2(U^+)$ étant majoré, et la mesure ζ préservée par f chargeant les ouverts, on en déduit que W est vide, c'est-à-dire que U^0 est inclus dans $\text{Ad}(f(U^0))$.

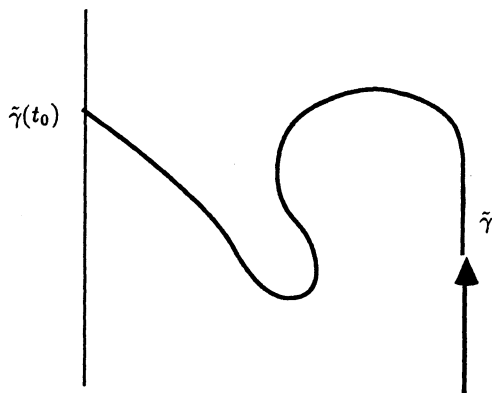
On peut alors montrer que μ_U est continue à gauche. Pour cela on considère les ensembles $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ et $\tilde{U}^0 = \pi^{-1}(U^0)$, et le relèvement $\tilde{\pi}_U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de μ_U . Puisque U^0 est ouvert, l'application μ_U est semi-continue inférieurement; ainsi pour montrer que μ_U est continue à droite, il suffit de prendre une suite $(\tilde{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $\tilde{\theta}$ par valeur strictement supérieure, telle que $(\tilde{\mu}_U(\tilde{\theta}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel r et de montrer que $r \leq \tilde{\mu}_U(\tilde{\theta})$.

On commence par considérer la suite $\tilde{x}_n = (\tilde{\theta}_n, \tilde{\mu}_U(\tilde{\theta}_n) - (n+1)^{-1})$ pour $n \in \mathbb{N}$. Cette suite est à valeur dans \tilde{U}^0 et converge vers $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r)$. Puisque U^0 est inclus dans $\text{Ad}(f(U^0))$, on peut trouver une suite $(\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeur dans $\tilde{U}_0 \cap \tilde{f}(\tilde{U}_0)$, convergeant vers \tilde{x} et vérifiant $\tilde{p}_1(\tilde{y}_n) > \tilde{\theta}$, pour tout entier n . Considérons un point $\tilde{x}' = (\tilde{\theta}, r')$ avec $r' < r$ et un entier n assez grand, les ensembles $D_S(\tilde{y}_n)$ et $\tilde{f}(D_S(\tilde{f}^{-1}(\tilde{y}_n)))$ divisent alors le plan en deux régions connexes et simplement connexes dont l'une a une image par p_2 qui est majorée et contient x' . Comme sa frontière est à valeur dans \tilde{U} et comme \tilde{U} est simplement connexe, on en déduit que \tilde{x}'

appartient à U et finalement que $\tilde{\mu}_U(\tilde{\theta}) \geq r$ (voir figure ci-dessous).



Pour montrer maintenant que $U^+ = U^0$, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un chemin positif $\gamma :]-\infty, 0] \rightarrow U$ tel que $\gamma(0)$ n'appartienne pas à U^0 . On choisit alors un relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ et on considère le réel t_0 appartenant à $]-\infty, 0]$ tel que $\tilde{\gamma}(]-\infty, t_0[)$ soit contenu dans \tilde{U}^0 et tel que $\tilde{\gamma}(t_0)$ n'appartienne pas à \tilde{U}^0 , réel qui existe puisque \tilde{U}^0 est ouvert et puisque $\tilde{\gamma}(0)$ n'appartient pas à \tilde{U}^0 . Les ensembles $\tilde{\gamma}(]-\infty, t_0[)$ et $D_N(\tilde{\gamma}(t_0))$ sont alors disjoints et $\tilde{\gamma}(]-\infty, t_0[)$ est inclus dans $] \tilde{p}_1(\tilde{\gamma}(t_0)), +\infty[\times \mathbb{R}$ (voir PROPOSITION 1.1). La contradiction provient alors de la continuité à droite de l'application $\tilde{\mu}_U$ au point $\tilde{p}_1(\tilde{\gamma}(t_0))$.



De façon analogue, on montre, dans le cas où $p_2(U^-)$ est majoré, que μ_U est continue à gauche et que les ensembles U^- et U^0 sont égaux. Ainsi, tout anneau invariant par f et distinct de \mathbb{A} , vérifie l'une des trois possibilités énoncées dans la proposition et qui correspond au

cas où l'un des ensembles $p_2(U^+)$ ou $p_2(U^-)$, ou alors les deux, sont majorés. Remarquons que la démonstration précédente prouve aussi, dans le premier cas, que l'ensemble U^0 n'est pas contenu dans $\text{Ad}(f^{-1}(U^0))$ et donc que la mesure de $U^0 \setminus \text{Ad}(f^{-1}(U^0))$ est non nulle, dans le second cas, que U^0 n'est pas contenu dans $\text{Ad}(f(U^0))$ et que la mesure de $U^0 \setminus \text{Ad}(f(U^0))$ est non nulle.

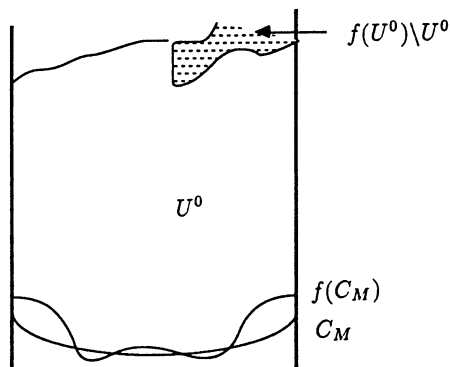
Il reste à montrer que l'alternative obtenue ne dépend que de f . Pour cela on suppose que U est un anneau invariant par f , distinct de \mathbb{A} , et que le graphe $C_M = \mathbb{T}^1 \times \{M\}$ est contenu dans $U^0 \cap f^{-1}(U^0) \cap f(U^0)$ et de mesure nulle. On considère alors l'ouvert $W = U^0 \cap V(C_M)$. Puisque l'ensemble C_M est de mesure nulle et contenu dans $U^0 \cap f^{-1}(U^0) \cap f(U^0)$. Si U^0 est contenu dans $f(U^0)$, on a

$$\begin{aligned} \zeta(f(W)) - \zeta(W) &= \zeta(V(f(C_M)) \cap U(C_M)) \\ &\quad - \zeta(U(f(C_M)) \cap V(C_M)) + \zeta(f(U^0) \setminus U^0) \end{aligned}$$

et si $f(U^0)$ est contenu dans U^0 , on a

$$\begin{aligned} \zeta(f(W)) - \zeta(W) &= \zeta(V(f(C_M)) \cap U(C_M)) \\ &\quad - \zeta(U(f(C_M)) \cap V(C_M)) - \zeta(U^0 \setminus f(U^0)). \end{aligned}$$

Puisque f préserve la mesure ζ , la quantité à gauche est nulle et le signe de $\zeta(V(f(C_M)) \cap U(C_M)) - \zeta(U(f(C_M)) \cap V(C_M))$ ne dépend que de la propriété i), ii) ou iii) vérifiée par U .



Supposons maintenant que U' soit un autre anneau invariant par f et distinct de \mathbb{A} , il existe un réel M tel que $\mathbb{T}^1 \times]-\infty, M]$ soit contenu dans

les ensembles suivants : U^0 , $f^{-1}(U^0)$, $f(U^0)$, U'^0 , $f^{-1}(U'^0)$ et $f(U'^0)$. Comme la mesure de $\mathbb{T}^1 \times [M-1, M]$ est finie, il existe M' , inférieur à M , tel que $\mathbb{T}^1 \times \{M\}$ soit de mesure nulle. La remarque faite plus haut prouve alors que U et U' vérifient la même propriété i), ii) ou iii). \square

Exemple. — On note $C^1(\mathbb{T}^1)$ l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^1 et de période 1. On définit ensuite, pour tout φ appartenant à $C^1(\mathbb{T}^1)$, l'application

$$\tilde{f}_\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (\tilde{\theta}, r) \longmapsto (\tilde{\theta} + r, r + \varphi(\tilde{\theta} + r)),$$

qui est un élément de $\tilde{\mathcal{K}}$ qui préserve la mesure de Lebesgue (voir HERMAN [He]); on note alors f_φ l'élément de \mathcal{K} relevé par \tilde{f}_φ . Pour tout entier M , l'image de $C_M = \mathbb{T}^1 \times \{M\}$ est le graphe de l'application $\varphi_M : x \mapsto \varphi(x) + M$. En particulier, on a :

$$\zeta(V(f(C_M)) \cap U(C_M)) - \zeta(U(f(C_M)) \cap (C_M)) = - \int_0^1 \varphi(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta}.$$

Ainsi, si $\int_0^1 \varphi(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta}$ est strictement positif (resp. strictement négatif, resp. nul), tout anneau U distinct de \mathbb{A} et invariant par f vérifie la condition i) (resp. ii), resp. iii)).

Notons d'ailleurs, dans le cas où $\int_0^1 \varphi(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta}$ est nul, et toujours grâce à la préservation de la mesure, que l'ensemble $\Lambda_{p,q}$ défini au paragraphe 1 rencontre son image par f_φ , pour tout couple (p, q) appartenant à $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$ d'entiers premiers entre eux. L'ensemble $R(\tilde{f}_\varphi)$ contient donc \mathbb{Q} (voir PROPOSITION 1.6), et, comme cet ensemble est fermé, il est égal à \mathbb{R} .

3. Étude des nombres de rotation des éléments de \mathcal{K}

Si f est un élément de \mathcal{K} qui préserve une mesure chargeant les ouverts et possède un anneau invariant distinct de \mathbb{A} , nous savons alors, grâce au théorème précédemment démontré, que trois cas sont possibles et que l'un d'entre eux correspond au cas où la frontière de l'anneau est le graphe d'une application continue de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} . L'application f possède alors un ensemble d'Aubry-Mather sur ce graphe; nous allons voir que cette dernière propriété est encore vraie dans les autres cas, en établissant une analogie avec l'étude des attracteurs de Birkhoff. Nous allons montrer plus généralement le résultat suivant :

PROPOSITION 3.1. — *Soit \tilde{f} un élément de $\tilde{\mathcal{K}}$, et U un anneau distinct de \mathbb{A} , invariant par le difféomorphisme \tilde{f} de \mathbb{A} relevé par \tilde{f} et tel que U^0*

soit égal à l'un des ensembles U^- ou U^+ . Alors le graphe de μ_U contient un ensemble d'Aubry-Mather de \tilde{f} , les ensembles d'Aubry-Mather contenus dans ce graphe ont même nombre de rotation $\tilde{\rho}$, les ensembles d'Aubry-Mather contenus dans U ont un nombre de rotation inférieur ou égal à $\tilde{\rho}$, les ensembles d'Aubry-Mather disjoints de U ont un nombre de rotation supérieur ou égal à $\tilde{\rho}$.

Si $\tilde{\rho}$ est irrationnel, il n'y a qu'un seul ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}$.

Enfin, pour tout \tilde{x} appartenant à $\pi^{-1}(A \setminus U)$ et pour tout k appartenant à \mathbb{N} , on a

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^k(\tilde{x})) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \geq -1 + k\tilde{\rho}, \quad \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{x})) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \leq 1 - k\tilde{\rho}.$$

Démonstration. — On suppose que \tilde{f} est un élément de \tilde{K} et que l'application f relevée par \tilde{f} laisse invariant un anneau U distinct de A , tel que U^0 soit égal à U^+ ; le cas où U^0 est égal à U^- se traitant de façon analogue en considérant \tilde{f}^{-1} au lieu de \tilde{f} .

Puisque U^0 est égal à U^+ , l'inclusion $f^{-1}(U^+) \subset U^+$ de la PROPOSITION 1.2 s'écrit ici $f^{-1}(U^0) \subset U^0$, ainsi l'image par f^{-1} de tout point de U radialement accessible est elle-même radialement accessible.

Or cette propriété se retrouve dans l'étude des attracteurs de Birkhoff, c'est même cette propriété essentielle qui permet de montrer les principaux résultats sur ces ensembles (voir LE CALVEZ [L2]). En particulier tous les arguments employés dans cette étude sont encore valables ici. On commence par établir que le graphe de μ_U contient son image par f^{-1} , et même l'adhérence de celle-ci, et que l'ordre défini sur ce graphe par la projection p_1 est préservé par f^{-1} (voir [L2, § 4]). On en déduit alors l'existence d'un ensemble d'Aubry-Mather sur ce graphe et d'un nombre de rotation commun à tous les ensembles d'Aubry-Mather de ce graphe (voir [L2, § 5]).

On a alors les inégalités suivantes, pour tout \tilde{x} appartenant à $\pi^{-1}(A \setminus U)$ et pour tout k appartenant à \mathbb{N} (voir [L2, § 5]) :

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^k(x)) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \geq -1 + k\tilde{\rho}, \quad \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{x})) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \leq 1 - k\tilde{\rho}.$$

Finalement on montre que si $\tilde{\rho}$ est irrationnel, il n'y a qu'un seul ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}$ (voir [L2, § 5]).

Ce nombre $\tilde{\rho}$ a une autre interprétation : si H est un difféomorphisme de $\Phi(U) \cup \{S\}$ sur $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$, défini par le théorème de Riemann, l'application $H^{-1} \circ \hat{f} \circ H$, définie sur D , se prolonge en un homéomorphisme de $\text{Ad}(D)$ préservant l'orientation, et la restriction

de celui-ci à la frontière de D admet $\tilde{\rho} + \mathbb{Z}$ comme nombre de rotation (voir [L2, § 5 et § 6]). \square

On peut déduire de la PROPOSITION 3.1 certains résultats. On a, par exemple, la proposition suivante qui caractérise les applications sans ensemble d'Aubry-Mather (voir aussi BOYLAND[B] dans le cas d'un anneau borné).

PROPOSITION 3.2. — *Tout élément f de \mathcal{K} qui n'a pas d'ensemble d'Aubry-Mather doit vérifier l'une des deux conditions suivantes :*

i) *pour tout point x de \mathbb{A} ,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(f^{-n}(x)) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(f^n(x)) = +\infty,$$

ii) *pour tout point x de \mathbb{A} ,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(f^{-n}(x)) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(f^n(x)) = -\infty.$$

Démonstration. — Supposons que f soit un élément de \mathcal{K} qui n'ait pas d'ensemble d'Aubry-Mather, choisissons alors un relèvement \tilde{f} de f à $\tilde{\mathbb{A}}$ et considérons les ensembles $\tilde{K}_0 = \{\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{A}} \mid \tilde{p}_1(\tilde{f}(\tilde{x})) = \tilde{p}_1(\tilde{x})\}$ et $K_0 = \pi(\tilde{K}_0)$. Puisque f dévie la verticale à droite, les ensembles $\{\theta\} \times \mathbb{R}$ et $\tilde{f}(\{\theta\} \times \mathbb{R})$ se coupent en un point et un seul, pour tout réel θ , et l'ensemble K_0 est le graphe d'une application continue de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} . Puisque f n'a pas d'ensemble d'Aubry-Mather, on sait, par la PROPOSITION 1.5, que $f(K_0)$ ne rencontre pas K_0 et est donc contenu dans $U(K_0)$ ou $V(K_0)$. On va supposer que $f(K_0)$ est inclus dans $V(K_0)$ et montrer la propriété i). On obtient par analogie la propriété ii) si on suppose que $f(K_0)$ est inclus dans $U(K_0)$.

Puisque $f(K_0)$ est contenu dans $V(K_0)$, la suite $(f^n(U(K_0)))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et l'ensemble $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U(K_0))$ est un anneau invariant par f . D'autre part, puisque K_0 est un graphe, l'ensemble $U(K_0)$ est inclus dans W^0 , en particulier dans W^- . Les images $f^n(U(K_0))$, où n décrit \mathbb{N} , sont donc contenues dans W^- et il en est de même de W . Ainsi W^+ est égal à $W^+ \cap W^-$, c'est-à-dire à W^0 . On conclut alors, en utilisant la PROPOSITION 3.1 et le fait que f n'a pas d'ensemble d'Aubry-Mather, que W est égal à \mathbb{A} . Ainsi, pour tout réel M , il existe un entier n tel que $\mathbb{T}^1 \times]-\infty, M]$ soit inclus dans $U(f^n(K_0))$; autrement dit, la suite $(\hat{f}^n(\Phi(K_0)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\{N\}$ pour la distance de Hausdorff.

On montre de même que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^{-n}(V(K_0))) = \mathbb{A}$ et donc que la suite $(\hat{f}^{-n}(\Phi(K_0)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\{S\}$. On établit alors facilement la condition i). \square

On va conclure ce paragraphe par trois propositions qui utilisent le lemme suivant :

LEMME. — Soient \tilde{f} un élément de $\tilde{\mathcal{K}}$ et $\tilde{\rho}$ un réel appartenant à la frontière de l'ensemble $R(\tilde{f}) \cap]-\infty, \tilde{\rho}]$ dans l'ensemble $R(\tilde{f})$. Il existe alors un anneau W distinct de \mathbb{A} et invariant par l'application f relevée par \tilde{f} , vérifiant l'une des égalités $W^+ = W^0$ ou $W^- = W^0$ et tel que le nombre défini par la PROPOSITION 3.1 sur le graphe de μ_W soit égal à $\tilde{\rho}$. De plus, W ne contient aucun ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}$.

Démonstration. — Supposons que \tilde{f} soit un élément de $\tilde{\mathcal{K}}$ et que $\tilde{\rho}$ appartienne à $R(\tilde{f}) \cap]-\infty, \tilde{\rho}]$. Notons f l'élément de \mathcal{K} relevé par \tilde{f} . Puisque $R(\tilde{f})$ est fermé, il existe une suite $(\tilde{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $\tilde{\rho}$, vérifiant $\tilde{\rho}_n \leq \tilde{\rho}$ pour tout entier n , suite formée de nombres rationnels qui n'appartiennent pas à $R(\tilde{f})$. Pour tout n , on écrit $\tilde{\rho}_n = p_n/q_n$, où $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, et on définit alors l'ensemble

$$\tilde{K}_n = \{\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{A}} \mid \tilde{p}_1(\tilde{f}^{q_n}(\tilde{x})) = \tilde{p}_1(\tilde{x}) + p_n\},$$

l'image $K_n = \pi(\tilde{K}_n)$ et la composante connexe Λ_n de K_n qui sépare \mathbb{A} .

Puisque, pour tout entier n , le réel $\tilde{\rho}_n$ n'appartient pas à $R(\tilde{f})$, on peut supposer, grâce à la PROPOSITION 1.6, et quitte à extraire une sous-suite de la suite initiale, que l'une des propriétés suivantes est vraie

- i) pour tout entier n , $f(\Lambda_n) \subset V(\Lambda_n)$;
- ii) pour tout entier n , $f(\Lambda_n) \subset U(\Lambda_n)$.

Montrons d'abord la proposition dans le cas où la propriété i) est vérifiée. Dans ce cas, $U(\Lambda_n)$ est inclus dans $f(U(\Lambda_n))$ et l'on en déduit que l'ensemble $W_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(U(\Lambda_n))$ est un anneau invariant. Rappelons que la verticale $D_S(x)$ de tout point x appartenant à $U(\Lambda_n)$ est contenue dans $f^{q_n}(U(\Lambda_n))$ (voir PROPOSITION 1.5) et donc que $U(\Lambda_n)$ est contenu dans W_n^0 . Puisque, pour tout k appartenant à \mathbb{N} , $f^k(W_n^0)$ est contenu dans W_n^- , il en est de même de $W_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^k(U(\Lambda_n))$. Ainsi, W_n^+ , qui est l'intersection de W_n^+ et de W_n^- , est égal à W_n^0 .

Considérons un ensemble d'Aubry-Mather Ξ de \tilde{f} de nombre de rotation $\tilde{\rho}$, il n'est contenu dans aucun des ensembles $U(\Lambda_n)$, puisque $\tilde{\rho}_n$ est inférieur à $\tilde{\rho}$ (voir PROPOSITION 1.7) et est donc disjoint de $W_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^k(U(\Lambda_n))$. L'ensemble W_n est donc distinct de \mathbb{A} et vérifie ainsi toutes les hypothèses de la PROPOSITION 3.1 : le graphe de μ_W possède un ensemble d'Aubry-Mather dont le nombre de rotation $\tilde{\rho}'_n$ vérifie, pour tout k appartenant à \mathbb{Z} et tout \tilde{x} appartenant à $\tilde{\mathbb{A}} \setminus \tilde{W}_n$, où $\tilde{W}_n = \pi^{-1}(W_n)$, l'inégalité : $-1 + k\tilde{\rho}_n \leq \tilde{p}_1(\tilde{f}^k(\tilde{x})) - \tilde{p}_1(\tilde{x})$.

Cet ensemble d'Aubry-Mather n'étant pas contenu dans $U(\Lambda_n)$, on sait, par la PROPOSITION 3.2, que $\tilde{\rho}'_n$ est supérieur à $\tilde{\rho}_n$; d'autre part, comme Ξ n'est pas contenu dans W_n , on sait que $\tilde{\rho}'_n$ est inférieur à $\tilde{\rho}$. Ainsi, la suite $(\tilde{\rho}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle vers $\tilde{\rho}$.

Considérons maintenant une valeur d'adhérence \widehat{X} de la suite $(\widehat{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où \widehat{X}_n est la frontière de l'ouvert $\Phi(W_n) \cup \{S\}$. C'est un ensemble fermé connexe de S^2 , invariant par \tilde{f} , limite d'une suite extraite $(\widehat{X}_{n_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ de la suite $(\widehat{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Considérons un minorant m de la suite $(\tilde{\rho}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un réel M tel que tout point x de $\mathbb{R} \times]-\infty, M]$ vérifie l'inégalité $\tilde{p}_1(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x})) \geq 1 - m$. Puisque, pour tout k appartenant à \mathbb{N} et tout \tilde{x} appartenant à $\tilde{A} \setminus \tilde{W}_n$, on a $\tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{x})) \leq 1 - k\tilde{\rho}_n$, l'ensemble $\mathbb{T}^1 \times]-\infty, M]$ doit être contenu dans W_n , on en déduit que le point S n'appartient pas à \widehat{X} . On peut alors définir la composante connexe \widehat{W} de $S^2 \setminus \widehat{X}$ qui contient S , elle ne contient pas N puisqu'aucun des ensembles $\widehat{W}_{n_\ell} = \Phi(W_{n_\ell}) \cup \{S\}$ ne le fait, elle ne contient pas non plus $\Phi(\Xi)$ pour une raison analogue; ainsi l'anneau $W = \Phi^{-1}(\widehat{W})$ est invariant par f , est distinct de A et ne contient pas Ξ .

Montrons que W^+ est égal à W^0 . Il suffit pour cela de montrer que si $\gamma :]-\infty, 0] \rightarrow W$ est un chemin positif, alors $\gamma(0)$ appartient à W^0 . Par définition de W , ce chemin doit être contenu dans W_{n_ℓ} , dès que ℓ est assez grand, il est donc contenu dans W_n^0 puisque W_n^+ est égal à W_n^0 , et comme $f^{-1}(W_n^0)$ est inclus dans $W_n^+ = W_n^0$, on a la propriété suivante :

il existe un entier L tel que, pour tout entier ℓ supérieur à L et tout point x de $\gamma(]-\infty, 0])$, l'ensemble $f(D_S(f^{-1}(x)))$ soit contenu dans W_{n_ℓ} .

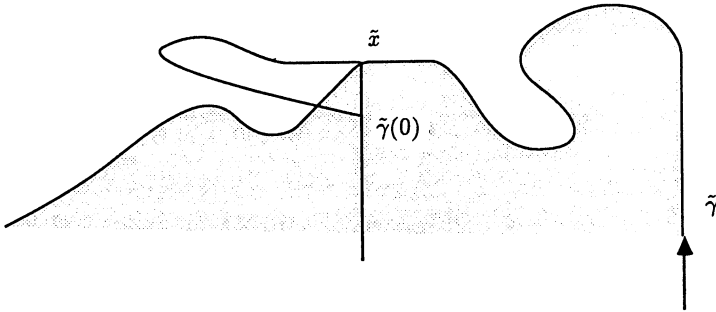
Choisissons maintenant un relèvement $\tilde{\gamma} :]-\infty, 0] \rightarrow \tilde{A}$ de γ et le premier point $\tilde{x} = \tilde{\gamma}(t_0)$ où $\tilde{\gamma}$ atteint $D(\tilde{\gamma}(0))$. L'ensemble $\tilde{f}(D_S(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}))) \cup \tilde{\gamma}(]-\infty, t_0])$ délimite alors une région connexe et simplement connexe, dont l'image par \tilde{p}_2 est majorée, et qui est contenue dans \tilde{W}_{n_ℓ} pour tout ℓ supérieur à L ; la définition de W prouve alors que cette région est contenue dans $\pi^{-1}(W)$. En particulier $D_S(x)$ est inclus dans W , et comme par la PROPOSITION 1-1 on sait que $\gamma(0)$ appartient à $D_S(x)$, on en déduit que $\gamma(0)$ appartient à W^0 (voir la figure sur la page suivante).

On peut maintenant appliquer la PROPOSITION 3.1 : il existe un ensemble d'Aubry-Mather situé sur le graphe de μ_W , on note $\tilde{\rho}'$ son nombre de rotation. Puisque tout ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}$ est disjoint de W , on sait déjà que $\tilde{\rho}'$ est inférieur ou égal à $\tilde{\rho}$. D'autre part, on sait que pour tout entiers ℓ et k et pour tout \tilde{x} appartenant à $\pi^{-1}(\text{Fr } W_{n_\ell})$, on a

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^k(\tilde{x})) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \geq 1 + k\tilde{\rho}'_{n_\ell}$$

on en déduit, par un passage à la limite et en utilisant la convergence de $(\tilde{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\tilde{\rho}$ et celle de $(\widehat{X}_{n_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ vers \widehat{X} , que pour tout entier k et pour tout \tilde{x} appartenant à $\pi^{-1}(\text{Fr } W)$, on a :

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^k(\tilde{x})) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \geq -1 + k\tilde{\rho}.$$



Le point \tilde{x} appartient à $\pi^{-1}(\{x\})$.

Ainsi, $\tilde{\rho}'$ est supérieur ou égal à $\tilde{\rho}$. Ces deux nombres sont donc égaux.

Dans le cas où c'est la propriété ii) qui est vérifiée, on construit de façon analogue un ouvert W , vérifiant cette fois-ci l'égalité $W^- = W^0$. \square

PROPOSITION 3.3. — Soit \tilde{f} un élément de $\tilde{\mathcal{K}}$ et $\tilde{\rho}$ un nombre irrationnel appartenant à la frontière de $R(\tilde{f})$, alors \tilde{f} n'a qu'un ensemble d'Aubry–Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}$ et celui-ci n'est pas hyperbolique.

Démonstration. — Soit \tilde{f} un élément de $\tilde{\mathcal{K}}$ et $\tilde{\rho}$ un nombre irrationnel appartenant à la frontière de $R(\tilde{f})$, on note alors f l'application de \mathcal{K} relevée par \tilde{f} . On va montrer la proposition dans le cas où $\tilde{\rho}$ appartient à la frontière de $] - \infty, \tilde{\rho}] \cap R(\tilde{f})$, le cas où $\tilde{\rho}$ appartient à la frontière de $[\tilde{\rho}, +\infty[\cap R(\tilde{f})$ se traitant de façon analogue.

On sait, d'après le lemme précédent, qu'il existe un anneau W différent de \mathbf{A} , invariant par f , vérifiant $W^+ = W^0$ ou $W^- = W^0$, et tel que le nombre de rotation défini sur le graphe de μ_W soit égal à $\tilde{\rho}$. On sait donc, grâce à la PROPOSITION 3.2, que \tilde{f} n'a qu'un seul ensemble d'Aubry–Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}$, il reste à montrer que celui-ci, noté Ξ , n'est pas hyperbolique.

La raison provient encore de l'étude des attracteurs de Birkhoff, on montre en effet que l'ensemble d'Aubry–Mather associé au nombre de rotation inférieur ou supérieur d'un attracteur de Birkhoff n'est jamais hyperbolique quand ce nombre est irrationnel (voir LE CALVEZ [L2]). L'argument essentiel dans la démonstration de ce résultat est le fait que la variété instable de cet ensemble est alors contenu dans l'attracteur. Pour conclure dans le cas présent, il suffit de montrer que si l'anneau W construit dans le lemme vérifie $W^+ = W^0$ (resp. $W^- = W^0$) et si Ξ est

hyperbolique, la variété instable (resp. stable) de Ξ est disjointe de W et d'utiliser ensuite les arguments employés dans le cas des attracteurs de Birkhoff.

On garde les mêmes notations que dans le lemme, on suppose en particulier que $W^+ = W^0$, et on considère un point x appartenant à $W^u(\Xi) \cap W$. La définition de W prouve qu'il existe un entier ℓ tel que x appartienne à W_{n_ℓ} et donc un entier k_0 tel que $f^{-k_0}(x)$ soit contenu dans $U(\Lambda_{n_\ell})$. Comme la suite $(f^k(U(\Lambda_{n_\ell})))_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante, on en déduit, en considérant la suite $(f^{-k}(x))_{k \geq k_0}$ et le fait que x est dans la variété instable de Ξ , que Ξ est inclus dans l'adhérence de $U(\Lambda_{n_\ell})$. En particulier Ξ ne rencontre pas $V(\Lambda_{n_\ell})$, ce qui contredit la PROPOSITION 1.7, puisque $\tilde{\rho}$ est supérieur à $\tilde{\rho}_{n_1}$. \square

On a le résultat du même type suivant sur les nombres de rotation, qui a également été démontré indépendamment par BOYLAND [Bo].

PROPOSITION 3.4. — Soit \tilde{f} un élément de $\tilde{\mathcal{K}}$ et $\tilde{\rho}$ un nombre rationnel appartenant à la frontière de $R(\tilde{f})$ et s'écrivant $\tilde{\rho} = p/q$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux.

Alors, l'image par π de l'orbite de tout point de type (p, q) est un ensemble d'Aubry-Mather.

Démonstration. — On suppose que \tilde{f} est un élément de $\tilde{\mathcal{K}}$, dont l'ensemble de rotation $R(\tilde{f})$ contient dans sa frontière un nombre rationnel $\tilde{\rho} = p/q$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, et on considère l'application f relevée par \tilde{f} . On va supposer de plus que $\tilde{\rho}$ appartient à la frontière de $] - \infty, \tilde{\rho}] \cap R(\tilde{f})$ et que l'anneau W qui est construit dans le lemme montré plus haut vérifie $W^0 = W^+$, les autres cas se traitant de façon analogue.

Considérons un ensemble d'Aubry-Mather Ξ inclus dans le graphe de μ_W et écrivons $\pi^{-1}(\Xi) = \{\tilde{y}_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, où la suite $(\tilde{p}_1(\tilde{y}_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ est strictement croissante. Utilisant les résultats de la PROPOSITION 1.2, à savoir le fait que le graphe de μ_W et l'ensemble W^0 sont envoyés dans eux-mêmes par f^{-1} préserve sur le graphe de μ_W l'ordre donné par la projection p_1 , on peut montrer par récurrence le résultat suivant (voir LE CALVEZ [L1]) :

si $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r)$ appartient à $\tilde{W}^0 = \pi^{-1}(W^0)$, si \tilde{y} est l'unique point de $\{\tilde{\theta}\} \times \mathbb{R}$, dont l'image par π appartient au graphe de μ_W , et si k est un entier naturel, on a l'inégalité

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{x})) > \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{y})).$$

De même, si l'ensemble $\{f^{-k}(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ est disjoint de W , on a l'inégalité

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{x})) \leq \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{y})).$$

Considérons maintenant un point $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r)$ de type (p, q) , définissons le point \tilde{y} de $\{\tilde{\theta}\} \times \mathbb{R}$ dont l'image par π appartient au graphe de μ_W et les deux points \tilde{y}_{i_0} et \tilde{y}_{i_0+1} qui vérifient

$$\tilde{p}_1(\tilde{y}_{i_0}) \leq \tilde{\theta} < \tilde{p}_1(\tilde{y}_{i_0+1}).$$

Puisque $x = \pi(\tilde{x})$ est périodique, l'ensemble $\{f^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est contenu dans W ou alors disjoint de cet ensemble. Supposons qu'il soit contenu (resp. disjoint), on sait déjà que pour tout entier k appartenant à \mathbb{N} , on a la relation :

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{y}_{i_0})) \leq \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{y})) < \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{y}_{i_0+1})),$$

on obtient ainsi, pour tout entier k ,

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{y}_{i_0})) < \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{x}))$$

resp.

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{x})) < \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{y}_{i_0+1})).$$

Supposons qu'il existe un entier k_0 tel que

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k_0}(\tilde{x})) \geq \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k_0}(\tilde{y}_{i_0+1}))$$

resp.

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k_0}(\tilde{y}_{i_0})) > \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k_0}(\tilde{x})).$$

Alors, pour tout entier k , on a

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^{k_0-k}(\tilde{x})) \geq \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k_0-k}(\tilde{y}_{i_0+1}))$$

resp.

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k_0-k}(\tilde{y}_{i_0})) > \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k_0-k}(\tilde{x})).$$

Il en résulte une contradiction en choisissant k tel que $k_0 + k$ soit un multiple de q , puisque \tilde{x} , \tilde{y}_{i_0} et \tilde{y}_{i_0+1} sont des points de type (p, q) .

Ainsi chaque point de l'orbite de \tilde{x} est encadré, quand on projette par \tilde{p}_1 , par les itérés correspondant de \tilde{y}_{i_0} et de \tilde{y}_{i_0+1} , et comme \tilde{y}_{i_0} et \tilde{y}_{i_0+1} appartiennent à l'ensemble $\pi^{-1}(\Xi)$, la projection par π de l'orbite de \tilde{x} est aussi un ensemble d'Aubry-Mather. \square

Terminons par la démonstration d'un cas particulier d'un résultat de ARONSON, CHORY, HALL et MC GEHEE [ACHM] (voir également HOCKETT et HOLMES [HH]).

PROPOSITION 3.5. — *Soit \tilde{f} un élément de $\tilde{\mathcal{K}}$ qui possède un ensemble d'Aubry-Mather Ξ , de nombre de rotation rationnel $\tilde{p} = p/q$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, vérifiant la propriété suivante :*

l'ensemble Ξ est formé d'une orbite périodique hyperbolique et l'on peut écrire $\pi^{-1}(\Xi) = \{\tilde{x}_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, où la suite $(\tilde{p}_1(\tilde{x}_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ est strictement croissante, et où la variété stable de \tilde{x}_0 et la variété instable de \tilde{x}_1 se coupent transversalement.

Il existe alors un réel ϵ strictement positif, tel que l'intervalle $[\tilde{\rho} - \epsilon, \tilde{\rho}]$ soit contenu dans $R(\tilde{f})$.

Démonstration. — On va raisonner par l'absurde et supposer qu'en plus des hypothèses de la proposition, le nombre $\tilde{\rho}$ appartient à la frontière de $] - \infty, \tilde{\rho}] \cap R(\tilde{f})$. Si on note f l'élément de \mathcal{K} relevé par \tilde{f} , on sait, grâce au lemme montré plus haut, qu'il existe un ouvert W distinct de \mathbb{A} , invariant par f , vérifiant $W^0 = W^+$ ou $W^0 = W^-$ et tel que le nombre de rotation qui est alors défini sur le graphe de μ_W est égal à $\tilde{\rho}$. On sait d'autre part, que l'ensemble Ξ est disjoint de W , et, utilisant un raisonnement analogue à celui employé dans la démonstration de la PROPOSITION 3.3, qu'il en est de même de sa variété instable dans le cas où $W^0 = W^+$ (et stable dans le cas où $W^0 = W^-$).

Plaçons nous dans le cas où $W^0 = W^+$, considérons un ensemble d'Aubry-Mather Ξ' , contenu dans le graphe de μ_W et un point \tilde{y} appartenant à $\pi^{-1}(\Xi')$ et vérifiant

$$\tilde{p}_1(\tilde{y}) < \tilde{p}_1(\tilde{x}_1).$$

Puisque la variété stable de \tilde{x}_0 et la variété instable de \tilde{x}_1 se coupent transversalement, il en est de même, pour tout entier i , de la variété stable de \tilde{x}_i et de la variété instable de \tilde{x}_{i+1} . On en déduit, en utilisant le λ -lemme, d'une part que la variété stable de \tilde{x}_i et la variété instable de \tilde{x}_j se coupent dès que $i < j$, d'autre part que \tilde{x}_i appartient à l'adhérence de $W^u(\tilde{x}_j)$.

Pour obtenir une contradiction, on considère un point \tilde{x}_i vérifiant $\tilde{p}_1(\tilde{x}_i) < \tilde{p}_1(\tilde{y})$ et un paramétrage $\tilde{\gamma} : [0, +\infty[\rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$ de la branche de $W_u(\tilde{x}_1)$ adhérente à \tilde{x}_i , qui vérifie $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_1$. On peut alors considérer le premier point $\tilde{z} = \tilde{\gamma}(t_0)$ de rencontre de $\tilde{\gamma}$ avec la verticale $D(\tilde{y})$. Puisque \tilde{y} est radialement accessible, $\tilde{p}_2(\tilde{z})$ est supérieur à $\tilde{p}_2(\tilde{y})$, et on en déduit, grâce à la remarque faite dans la démonstration de la PROPOSITION 3.4, que l'on a l'inégalité $\tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{z})) \leq \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-k}(\tilde{y}))$ pour tout entier positif k .

En écrivant cette inégalité pour $k = 2q$, on en déduit la relation $\tilde{p}_1(\tilde{f}^{-2q}(\tilde{z})) \leq \tilde{p}_1(\tilde{y}) - 2p$, soit encore $\tilde{p}_1(\tilde{f}^{-2q}(\tilde{T}^{2p}(\tilde{z}))) \leq \tilde{p}_1(\tilde{y})$. Comme le point $\tilde{f}^{-2q}(\tilde{T}^{2p}(\tilde{z}))$ est égal à $\tilde{\gamma}(t)$ avec t strictement plus petit que t_0 , on contredit ainsi la définition de ce dernier réel. \square

4. Persistance des ensembles d'Aubry-Mather

Dans l'étude des attracteurs de Birkhoff, on montre que si l'on contracte faiblement et radialement dans une région d'instabilité une application déviant la verticale et préservant une mesure qui charge les ouverts, l'application ainsi obtenue possède encore un grand nombre d'ensembles d'Aubry-Mather. Plus précisément, l'ensemble de rotation de celle-ci contient l'intervalle délimité par les deux nombres de rotation inférieur et supérieur de son attracteur de Birkhoff (voir LE CALVEZ [L1]). Nous allons généraliser ce résultat au cas d'une perturbation quelconque et non plus seulement au cas d'une contraction.

Définition. — On note \mathcal{K}_0 l'ensemble des applications f appartenant à \mathcal{K} et vérifiant la condition suivante :

la frontière de tout anneau invariant par f et distinct de \mathbb{A} est le graphe d'une application continue de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} .

On définit alors l'ensemble $\tilde{\mathcal{K}}_0$ des difféomorphismes de $\tilde{\mathbb{A}}$ relevant un élément de \mathcal{K}_0 .

Exemples. — On sait, grâce à la PROPOSITION 2.2, qu'il y a un grand nombre d'éléments de \mathcal{K}_0 parmi les applications appartenant à \mathcal{K} qui préservent une mesure chargeant les ouverts; par exemple, celles qui admettent un graphe invariant, ou bien encore toutes les applications de la forme f_φ , où φ est un élément de $C^1(\mathbb{T}^1)$ vérifiant $\int_0^1 \varphi(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0$.

Appartiennent aussi à \mathcal{K}_0 tous les éléments f de \mathcal{K} qui n'admettent aucun anneau invariant distinct de \mathbb{A} . Une condition pour qu'il en soit ainsi est la propriété d'intersection suivante :

(I) *l'image par f de toute partie X de \mathbb{A} , compacte, connexe et séparant \mathbb{A} , rencontre chacun des ensembles $U(X)$ et $V(X)$.*

En effet, supposons que f admette un anneau U distinct de \mathbb{A} et invariant par f et montrons qu'elle ne vérifie pas la propriété (I). L'un des ensembles $p_2(U^-)$ ou $p_2(U^+)$ est majoré (voir PROPOSITION 2.1). Si c'est $p_2(U^-)$, on peut considérer la composante connexe W^- de $S^2 \setminus \text{Ad}(\Phi(U^-))$ qui contient N ; elle est simplement connexe puisque U^- et donc $\text{Ad}(\Phi(U^-))$ sont connexes, ainsi l'ensemble $Y^- = \Phi^{-1}(\text{Fr } W^-)$ est compact, connexe et sépare \mathbb{A} . Puisque $f(U^-)$ est contenu dans U^- , l'ensemble W^- est contenu dans $f(W^-)$; ainsi $f(Y^-)$ ne rencontre pas $V(Y^-)$. Si c'est $p_2(U^+)$ qui est majoré, on construit de la même façon un ensemble Y^+ compact, connexe, séparant \mathbb{A} et tel que $f(Y^+)$ ne rencontre pas $U(Y^+)$.

Notons que l'ensemble de rotation d'une application vérifiant la condition (I) est égal à \mathbb{R} ; en effet cet ensemble est fermé et contient tous les

rationnels, à cause de la PROPOSITION 1.6 et de la condition d'intersection vérifiée par f .

Nous allons montrer dans ce paragraphe le théorème suivant, qui est le résultat principal de notre étude, et où les ensembles $R(\tilde{f})$ et $R'(\tilde{f})$ sont définis au PARAGRAPHE 1.

THÉORÈME 2. — Soient \tilde{f} un élément de $\tilde{\mathcal{K}}_0$ et Z un ensemble compact contenu dans l'intérieur de $R(\tilde{f}) \setminus R'(\tilde{f})$.

Il existe alors un voisinage \mathcal{W} de \tilde{f} dans $\tilde{\mathcal{K}}$ tel que l'ensemble Z soit contenu, dans $R(\tilde{g}) \setminus R'(\tilde{g})$ pour tout \tilde{g} appartenant à \mathcal{W} .

Démonstration. — Puisque Z est compact et ne rencontre pas $R'(\tilde{f})$, et puisque $R'(\tilde{g})$ varie semi-continûment inférieurement avec \tilde{g} (voir PARAGRAPHE 1), il existe un voisinage \mathcal{W}_1 de \tilde{f} dans $\tilde{\mathcal{K}}$ tel que, pour tout \tilde{g} appartenant à \mathcal{W}_1 , l'ensemble Z ne rencontre pas $R'(\tilde{g})$. Il suffit donc, pour montrer la proposition, de trouver un voisinage \mathcal{W}_2 de \tilde{f} dans $\tilde{\mathcal{K}}$ tel que Z soit contenu dans l'ensemble de rotation $R(\tilde{g})$ de toute application \tilde{g} de \mathcal{W}_2 . Définissons, pour tout ϵ strictement positif, l'ensemble Z_ϵ des réels situés à une distance inférieure ou égale à ϵ d'au moins un point de Z . Cet ensemble est compact, il contient Z , il est égal à l'adhérence de $Z_\epsilon \cap \mathbb{Q}$ et est inclus dans $R(\tilde{f})$ dès que ϵ est assez petit. Ainsi, quitte à agrandir l'ensemble Z , on peut supposer, dans les hypothèses, qu'il est égal à l'adhérence de l'ensemble de ses rationnels. Il suffit alors de montrer l'existence d'un voisinage \mathcal{W}_2 de \tilde{f} dans $\tilde{\mathcal{K}}$, tel que l'ensemble de rotation de toute application \tilde{g} appartenant à \mathcal{W}_2 contient $Z \cap \mathbb{Q}$, ceci parce que $R(\tilde{g})$ est toujours fermé quand \tilde{g} appartient à $\tilde{\mathcal{K}}$.

On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe une suite $(\tilde{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels et une suite $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\tilde{\mathcal{K}}$ convergeant vers \tilde{f} , telles que pour tout entier n , \tilde{f}_n n'ait pas d'ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}_n$. On va établir une contradiction. Pour tout entier n , on écrit $\tilde{\rho}_n = p_n/q_n$, où $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, on note f_n l'élément de \mathcal{K} relevé par \tilde{f}_n et on note de même f l'application relevée par \tilde{f} .

Dans le cas où la suite $(\tilde{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, la contradiction est facile à obtenir, comme le montre le résultat suivant.

LEMME 1. — Pour tout nombre rationnel $\tilde{\rho}$ appartenant à $R(\tilde{f}) \setminus R'(\tilde{f})$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout n supérieur ou égal à n_0 , l'application \tilde{f}_n admet un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}$. De plus, il existe un réel strictement positif M tel que, pour tout n supérieur ou égal à n_0 , les ensembles d'Aubry-Mather de \tilde{f}_n de nombre de rotation $\tilde{\rho}$ sont contenus dans $\mathbb{T}^1 \times [-M, M]$.

Démonstration. — On écrit $\tilde{p} = p/q$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux et on définit, pour tout entier n , l'ensemble

$$\tilde{K}_n = \{\tilde{x} \in \tilde{A} \mid \tilde{p}_1(\tilde{f}_n^q(\tilde{x})) = \tilde{p}_1(\tilde{x}) + p\}$$

son image $K_n = \pi(\tilde{K}_n)$ et la composante connexe Λ_n de K_n qui sépare A (voir PROPOSITION 1.4).

Puisque f dévie la verticale à droite, il existe un réel M strictement positif, tel que pour tout \tilde{x} appartenant à $\mathbb{R} \times \{M\}$ (resp. $\mathbb{R} \times \{-M\}$), on ait :

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^q(\tilde{x})) > \tilde{p}_1(\tilde{x}) + p, \quad (\text{resp. } \tilde{p}_1(\tilde{f}^q(\tilde{x})) < \tilde{p}_1(\tilde{x}) + p).$$

La suite $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers \tilde{f} sur tout compact, on en déduit qu'il existe un entier n_1 , tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_1 et pour tout \tilde{x} appartenant à $\mathbb{R} \times \{M\}$ (resp. $\mathbb{R} \times \{-M\}$), on ait :

$$p_1(\tilde{f}_n^q(\tilde{x})) > \tilde{p}_1(\tilde{x}) + p \quad (\text{resp. } \tilde{p}_1(\tilde{f}_n^q(\tilde{x})) < \tilde{p}_1(\tilde{x}) + p).$$

L'ensemble Λ_n est donc disjoint de $\mathbb{T}^1 \times \{-M\}$ et de $\mathbb{T}^1 \times \{M\}$ quand n est supérieur ou égal à n_1 ; il est en fait contenu dans $\mathbb{T}^1 \times]-M, M[$.

En effet, fixons un point θ de \mathbb{T}^1 et notons $h^-(\theta)$ et $h^+(\theta)$ les points de $K_n \cap (\{\theta\} \times \mathbb{R})$ d'ordonnées respectivement minimale et maximale ; la verticale $D_S(h^-(\theta))$ (resp. $D_N(h^+(\theta))$) ne rencontre pas $\mathbb{T}^1 \times \{M\}$ (resp. $\mathbb{T}^1 \times \{-M\}$) et le point $h^-(\theta)$ (resp. $h^+(\theta)$) doit donc appartenir à $\mathbb{T}^1 \times]-\infty, M[$ (resp. $\mathbb{T}^1 \times]-M, +\infty[$). Comme l'ensemble Λ_n est connexe, il contient ces deux points (voir PROPOSITION 1.4) et ne rencontre ni $\mathbb{T}^1 \times \{M\}$, ni $\mathbb{T}^1 \times \{-M\}$; il est contenu dans $\mathbb{T}^1 \times]-M, M[$.

Pour montrer le LEMME 1, il suffit de montrer que l'ensemble Λ_n rencontre son image par f_n dès que n est assez grand (PROPOSITION 1.6). On va raisonner par l'absurde et supposer que cette propriété n'est pas vérifiée.

Puisque la suite $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est formée de parties de l'ensemble compact $\mathbb{T}^1 \times [-M, M]$, elle est relativement compacte pour la distance de Hausdorff et on peut donc extraire une suite $(\Lambda_{n_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ de la suite $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que :

- i) pour tout entier ℓ , Λ_{n_ℓ} est contenu dans $\mathbb{T}^1 \times [-M, M]$;
- ii) pour tout entier ℓ , $f_{n_\ell}(\Lambda_{n_\ell})$ ne rencontre pas Λ_{n_1} ;
- iii) la suite $(\Lambda_{n_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge pour la distance de Hausdorff.

Les propriétés de la distance de Hausdorff (voir CHOQUET [Cho]) permettent d'affirmer que la limite Λ de cette suite est compacte, connexe, sépare \mathbf{A} et est contenue dans l'ensemble $K = \pi^{-1}(\tilde{K})$ où

$$\tilde{K} = \{\tilde{x} \in \mathbf{A} \mid \tilde{p}_1(\tilde{f}^q(\tilde{x})) = \tilde{p}_1(\tilde{x}) + p\}.$$

On sait déjà que $f(\Lambda)$ rencontre Λ puisque, par hypothèse, $\tilde{\rho}$ appartient à $R(\tilde{f})$ (voir PROPOSITION 1.6). Si l'on montre que $f(\Lambda)$ rencontre à la fois $U(\Lambda)$ et $V(\Lambda)$, on en déduira, dès que ℓ est assez grand, que l'ensemble $f(\Lambda_{n_\ell})$ rencontre $U(\Lambda_{n_\ell})$ et $V(\Lambda_{n_\ell})$ et qu'il rencontre donc Λ_{n_ℓ} ; on aura ainsi obtenu une contradiction.

Supposons, par exemple, que $f(\Lambda)$ ne rencontre pas $U(\Lambda)$; la suite $(f^k(U(\Lambda)))_{k \in \mathbb{N}}$ est alors croissante et l'ensemble $W = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^k(U(\Lambda))$ est un anneau invariant par f . Soit x un point de $f(\Lambda) \cap \Lambda$; comme il est périodique (voir PROPOSITION 1.6) et comme $f^{-1}(U(\Lambda))$ est inclus dans $U(\Lambda)$, son orbite est disjointe de $U(\Lambda)$. En particulier, W ne contient pas x , il est distinct de \mathbf{A} et sa frontière est un graphe invariant par f , puisque f appartient à \mathcal{K}_0 . L'ensemble Λ , qui contient x , n'est pas contenu dans W . Par contre il rencontre son adhérence, puisque la frontière de $U(\Lambda)$ est à la fois dans \overline{W} et dans Λ ; ainsi Λ doit rencontrer la frontière de W . Le nombre de rotation induit sur ce graphe est donc égal à p/q , puisque Λ est inclus dans K , ce qui contredit le fait que $\tilde{\rho} = p/q$ n'appartient pas à $R'(\tilde{f})$.

En considérant maintenant l'ensemble $W' = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(U(\Lambda))$, on montre de même que $f(\Lambda)$ rencontre $V(\Lambda)$, ce qui conclut la démonstration. \square

Suite de la démonstration du théorème. — Dans le cas où la suite $(\tilde{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante, on utilise une méthode analogue à la précédente; on construit une suite $(\Lambda'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles compacts et connexes de \mathbf{A} , ne rencontrant pas leur image par f_n .

On définit ainsi l'ensemble :

$$K'_n = \{\tilde{x} \in \tilde{\mathbf{A}} \mid \tilde{p}_1(\tilde{f}_n^{q_n}(\tilde{x})) = \tilde{p}_1(\tilde{x}) + q_n\}$$

son image $K'_n = \pi(\tilde{K}'_n)$ et la composante connexe Λ'_n de K'_n qui sépare \mathbf{A} .

La situation ici est cependant plus compliquée que dans le LEMME 1. En effet, si la suite $(\tilde{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas constante, la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée et il est impossible de contrôler Λ'_n : la suite $(\Lambda'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas toujours bornée et, dans ce cas, n'admet pas de valeur d'adhérence. C'est pourquoi on va se placer sur la sphère S^2 : on étudie la suite $(\Phi(\Lambda'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ qui, elle, est relativement compacte, puisque S^2 est compacte et on utilise ensuite les résultats du PARAGRAPHE 2.

Puisque \tilde{f}_n n'a pas d'ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}_n$, les ensembles $f_n(\Lambda'_n)$ et Λ'_n sont disjoints, pour tout entier n (voir PROPOSITION 1.6). On peut donc, quitte à extraire une sous-suite de la suite initiale, supposer que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- i) pour tout entier n , $U(\Lambda'_n)$ est inclus dans $f_n(U(\Lambda'_n))$,
- ii) pour tout entier n , $U(\Lambda'_n)$ est inclus dans $f_n^{-1}(U(\Lambda'_n))$.

On suppose que la condition i) est vraie, le cas de la condition ii) se traitant de façon analogue. On définit, pour tout entier n , l'anneau $W_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_n^k(U(\Lambda'_n))$ qui est invariant par f_n et l'ensemble \hat{X}_n , frontière de $\Phi(W_n) \cup \{S\}$, qui est fermé et connexe.

On peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que les deux conditions suivantes sont vraies :

- iii) la suite $(\tilde{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\tilde{\rho}$, appartenant à Z ;
- iv) la suite $(\hat{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, pour la distance de Hausdorff vers un ensemble fermé non vide et connexe \hat{X} de S^2 .

On va montrer que $\Phi^{-1}(\hat{X})$ contient un graphe invariant de nombre de rotation $\tilde{\rho}$, ce qui contredira le fait que $\tilde{\rho}$ n'appartient pas à $R'(\tilde{f})$.

LEMME 2. — *L'ensemble \hat{X} est différent de $\{N\}$.*

Démonstration. — Puisque $\tilde{\rho}$ appartient à l'intérieur de $R(\tilde{f}) \setminus R'(\tilde{f})$, on peut trouver un nombre rationnel $\tilde{\rho}^+$ dans $R(\tilde{f}) \setminus R'(\tilde{f})$, strictement supérieur à $\tilde{\rho}$. On sait, grâce au LEMME 1, qu'il existe un entier n_0 et un réel M_0 , tels que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , on ait $\tilde{\rho}_n < \tilde{\rho}^+$ et, qu'en plus, \tilde{f}_n admette un ensemble d'Aubry-Mather Ξ_n^+ , de nombre de rotation $\tilde{\rho}^+$, contenu dans $\mathbb{T}^1 \times [-M_0, M_0]$. Par la PROPOSITION 1.7, on sait que Ξ_n^+ ne rencontre pas $U(\Lambda_n)$, on en déduit qu'il ne rencontre pas W_n . Ainsi $\mathbb{T}^1 \times]-\infty, M_0]$ n'est jamais contenu dans W_n et rencontre donc sa frontière, ce qui prouve que l'ensemble $\hat{X} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{X}_n$ ne se réduit pas au point N . \square

LEMME 3. — *Le point S n'appartient pas à \hat{X} .*

Démonstration. — On sait, d'après le lemme précédent, que l'anneau W_n est distinct de \mathbf{A} , dès que n est assez grand. Or on a établi, dans la démonstration du lemme énoncé au PARAGRAPHE 3, d'une part que l'ensemble W_n^- était égal à W_n , d'autre part que le nombre de rotation $\tilde{\rho}'_n$, défini par la PROPOSITION 3.1 sur le graphe de μ_W , était supérieur à $\tilde{\rho}_n$. On en déduit, pour tout point \tilde{x} de $\pi^{-1}(\mathbf{A} \setminus W_n)$, les inégalités :

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}_n(\tilde{x})) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \geq \tilde{\rho}'_n - 1 \geq \tilde{\rho}_n - 1.$$

Puisque la suite $(\tilde{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, on peut la minorer par un

réel m , puis trouver M tel que, pour tout point \tilde{x} de $\mathbb{R} \times \{M\}$, on ait :

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}(\tilde{x})) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) < m - 1.$$

Pour n assez grand, on aura alors la relation

$$p_1(\tilde{f}_n(\tilde{x})) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) < m - 1,$$

pour tout point \tilde{x} de $\mathbb{R} \times \{M\}$ et même de $\mathbb{R} \times]-\infty, M]$, puisque f dévie la verticale à droite.

Finalement, on en déduit, dès que n est assez grand, que W_n contient $\mathbb{T}^1 \times]-\infty, M]$, et donc que S n'appartient pas à \hat{X} .

Fin de la démonstration de la proposition. — Puisque S n'appartient pas à \hat{X} , on peut considérer la composante connexe \widehat{W} de $S^2 \setminus \hat{X}$ qui contient S . Cette composante connexe est simplement connexe, puisque \hat{X} est connexe; elle ne contient pas N , puisqu'aucun des ensembles $\widehat{W}_n = \Phi(W_n) \cup \{S\}$ ne le fait et elle est distincte de $S^2 \setminus \{N\}$, puisque \hat{X} ne se réduit pas au point N . D'autre part, la suite $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers \hat{f} , la suite $(\hat{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \hat{X} et chacun des \hat{X}_n est invariant par \hat{f}_n ; on en déduit que \hat{X} est invariant par \hat{f} , de même que \widehat{W} . L'ensemble $W = \Phi^{-1}(\widehat{W})$ est donc un anneau distinct de \mathbf{A} et invariant par f et sa frontière est un graphe, puisque f appartient à \mathcal{K}_0 . On va montrer que le nombre de rotation induit sur ce graphe, noté $\tilde{\rho}'$, est en fait égal à $\tilde{\rho}$.

On a montré, dans le LEMME 2, qu'il existait, pour tout rationnel $\tilde{\rho}^+$ strictement supérieur à $\tilde{\rho}$, un entier n et une suite bornée $(\Xi_n^+)_{n \geq n_0}$ d'ensemble d'Aubry-Mather de \tilde{f}_n de nombre de rotation $\tilde{\rho}^+$, tous disjoints de W_n . Choisissons une valeur d'adhérence de cette suite, c'est un ensemble d'Aubry-Mather de \tilde{f} de nombre de rotation $\tilde{\rho}^+$ qui est disjoint de W . Il se trouve donc situé au-dessus de la frontière de W , et on a l'inégalité $\tilde{\rho}' \leq \tilde{\rho}^+$. Comme on peut choisir $\tilde{\rho}^+$ aussi près que l'on veut de $\tilde{\rho}$, on obtient $\tilde{\rho}' \leq \tilde{\rho}$.

De même, on a remarqué dans le LEMME 3 que l'on avait l'inégalité

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}_n^k(\tilde{x})) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \geq k\tilde{\rho}_n - 1$$

pour tout couple d'entiers naturels (k, n) et pour tout point \tilde{x} appartenant à $\pi^{-1}(\mathbf{A} \setminus W_n)$. Si l'on fixe k et si l'on considère un point x appartenant à la frontière de W , on peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\text{Fr}(W_n)$ convergeant vers x ; on en déduit alors, pour tout point \tilde{x} de $\pi^{-1}(\{x\})$, l'inégalité

$$\tilde{p}_1(\tilde{f}^k(\tilde{x})) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \geq k\tilde{\rho} - 1.$$

Le nombre de rotation $\tilde{\rho}'$ induit sur la frontière de W est donc supérieur à $\tilde{\rho}$; il est finalement égal à ce nombre, ce qui contredit le fait que $\tilde{\rho}$ n'appartient pas à $R'(\tilde{f})$. \square

On conclut par deux corollaires.

COROLLAIRE 4.1. — *Supposons que f soit un élément de \mathcal{K} qui préserve une mesure chargeant les ouverts et qui admette une région d'instabilité (voir PARAGRAPHE 1), délimitée par les graphes de deux applications ψ^- et ψ^+ ($\psi^- < \psi^+$). Considérons alors un relèvement \tilde{f} de f et les nombres de rotation $\tilde{\rho}^-$ et $\tilde{\rho}^+$ ($\tilde{\rho}^- < \tilde{\rho}^+$) induits sur ces graphes.*

Alors, pour tout fermé Z contenu dans $]\tilde{\rho}^-, \tilde{\rho}^+[$, il existe un voisinage \mathcal{W} de \tilde{f} dans $\tilde{\mathcal{K}}$ tel que, pour tout \tilde{g} appartenant à \mathcal{W} , l'ensemble Z soit contenu dans $R(\tilde{g}) \setminus R'(\tilde{g})$.

Démonstration. — Puisque f préserve une mesure chargeant les ouverts et admet un graphe invariant, c'est un élément de \mathcal{K}_0 (voir THÉORÈME 1). D'autre part, le résultat fondamental d'Aubry et de Mather sur les orbites quasi-périodiques (voir CHENCINER [Che]) exprime que l'intervalle $[\tilde{\rho}^-, \tilde{\rho}^+]$ est inclus dans $R(\tilde{f})$. Le fait que la couronne délimitée par les graphes de ψ^- et de ψ^+ soit une région d'instabilité exprime que l'intervalle $]\tilde{\rho}^-, \tilde{\rho}^+[$ est disjoint de $R'(\tilde{f})$. Il n'y a plus qu'à appliquer la PROPOSITION 4.1. \square

COROLLAIRE 4.2. — *Munissons l'ensemble $C^1(\mathbb{T}^1)$ de la topologie de la convergence uniforme et supposons que l'élément φ_0 de $C^1(\mathbb{T}^1)$ vérifie $\int_0^1 \varphi_0(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0$ et soit tel que f_{φ_0} n'ait pas de graphe invariant.*

Il existe alors un voisinage \mathcal{V} , l'ensemble $R(\tilde{f}_\varphi) \setminus R'(\tilde{f}_\varphi)$ soit égal à \mathbb{R} .

Démonstration. — Si φ_0 est un élément de $C^1(\mathbb{T}^1)$ vérifiant

$$\int_0^1 \varphi_0(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0,$$

on sait d'une part que f_{φ_0} appartient à \mathcal{K}_0 , d'autre part que $R(\tilde{f}_{\varphi_0})$ est égal à \mathbb{R} . Si de plus f_{φ_0} n'a pas de graphe invariant, l'ensemble $R'(\tilde{f}_{\varphi_0})$ est vide.

Puisque l'application de $C^1(\mathbb{T}^1)$ dans $\tilde{\mathcal{K}}_0$, qui à φ associe l'application \tilde{f}_φ est manifestement continue, on obtient, en appliquant la PROPOSITION 4.1, un voisinage \mathcal{V} de φ_0 dans $C^1(\mathbb{T}^1)$, tel que, pour tout φ appartenant à \mathcal{V} , l'ensemble $R(\tilde{f}_\varphi) \setminus R'(\tilde{f}_\varphi)$ contienne $[0, 1]$. Pour montrer le COROLLAIRE, il suffit de remarquer que si φ appartient à $C^1(\mathbb{T}^1)$, si k appartient à \mathbb{Z} et si $\tilde{\rho}$ appartient à $R(\tilde{f}_\varphi)$ (resp. $R'(\tilde{f}_\varphi)$), alors $\tilde{\rho} + k$ appartient à $R(\tilde{f}_\varphi)$ (resp. $R'(\tilde{f}_\varphi)$). En effet, si X est un ensemble invariant f_φ -ordonné de nombre de rotation $\tilde{\rho}$, l'ensemble

$$K_k = \{\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r) \in \tilde{\mathbf{A}} \mid (\tilde{\theta}, r - k) \in X\}$$

est un ensemble f_φ -ordonné de nombre de rotation $\tilde{\rho} + k$. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [ACHM] ARONSON (D.G.), CHORY (M.A.), HALL (G.R.), and MCGEHEE (R.P.). — Bifurcation from an invariant circle for two parameters families of maps of the plane : a computer assisted study, *Comm. Math. Phys.*, **83**, 1982.
- [Bi] BIRKHOFF (G.D.). — Sur quelques courbes fermées remarquables, *Bull. Soc. Math. France*, **60**, 1932, p. 1–26. — et *Collected Math. Papers*, vol. **II**, p. 444–461.
- [Bo] BOYLAND (P.L.). — Rotations sets and Morse decomposition in twist maps, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, t. **8**, 1988, p. 33–61.
- [Ca] CASDAGLI (M.). — Periodic orbits for dissipative twist maps, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, t. **7**, 1987, p. 165–173.
- [Che] CHENCINER (A.). — [Séminaire Bourbaki, n° **622**], *Astérisque*, vol. 121–123, *Soc. Math. France*, 1985, p. 147–170.
- [Cho] CHOQUET (G.). — *Lectures on analysis*, vol. **II**. — New-York, W.A. Benjamin, Inc., 1969.
- [Ha] HALL (G.R.). — A topological version of a theorem of Mather on twist maps, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, t. **4**, 1984, p. 585–603.
- [He] HERMAN (M.). — Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, *Astérisque*, vol. **103–104**, *Soc. Math. France*, 1983.
- [HH] HOCKETT (K.) and HOLMES (P.). — Josephson's junction, annulus maps, Birkhoff attractors, horseshoes and rotation sets, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, t. **6**, 1986, p. 205–239.
- [K] KATOK (A.). — Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorem, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, t. **2**, 1982, p. 185–194.
- [L1] LE CALVEZ (P.). — Existence d'orbites quasi-périodiques dans les attracteurs de Birkhoff, *Comm. Math. Phys.*, t. **106**, 1986, p. 383–394.
- [L2] LE CALVEZ (P.). — Propriétés des attracteurs de Birkhoff, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, t. **8**, 1987, p. 241–310.
- [N] NEWMAN (M.H.). — *Elements of the topology of plane sets of points*. — Cambridge, Cambridge University Press, 1939.