

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-YVES ETESSE

Dualité plate pour les surfaces à coefficients dans un groupe de type multiplicatif

Bulletin de la S. M. F., tome 117, n° 1 (1989), p. 19-58

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_1_19_0

© Bulletin de la S. M. F., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DUALITÉ PLATE POUR LES SURFACES À COEFFICIENTS DANS UN GROUPE DE TYPE MULTIPLICATIF

PAR

JEAN-YVES ETESSE (*)

RÉSUMÉ. — Dans le cas d'une surface propre et lisse sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$ nous généralisons le théorème de dualité plate pour les racines p^n -ièmes de l'unité, dû à J. S. MILNE, en prenant cette fois pour coefficients un groupe de type multiplicatif quelconque. L'outil essentiel pour cette dualité est le complexe de De Rham–Witt à coefficients dans le cristal de Dieudonné du groupe de type multiplicatif considéré.

ABSTRACT. — In the case of a proper smooth surface over a perfect field of characteristic $p > 0$ we generalize the flat duality theorem for p^n -th roots of unity, due to J. S. MILNE, by taking as coefficients any multiplicative type group. To establish that duality, the essential tool is the De Rham–Witt complex with coefficients in the Dieudonné crystal of the multiplicative type group considered.

Table des Matières

INTRODUCTION

I.— DÉFINITION DE L'ACCOUPLEMENT DE DUALITÉ

1. Énoncé et méthode de la démonstration
2. Comparaison entre $\mathbb{D}(G)$, $\mathbb{D}(G^*)$ et $\mathbb{D}(G^{t*})$
 1. Isomorphisme $\mathbb{D}(G^{t*}) \simeq \mathbb{D}(G)$
 2. Morphisme $\gamma_n : \mathbb{D}(G^*)_n \rightarrow \mathbb{D}(G)_n^\vee$
3. Construction de l'accouplement
4. Compatibilités

II.— THÉORÈMES DE DUALITÉ

1. Rappels sur la cohomologie fppf

(*) Texte reçu le 1^{er} juillet 1987.

J.-Y. ETESSE, IRMAR, Unité associée au CNRS n° 305, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.

- 2. Dualité plate pour G et dualité étale pour les $\nu_n(E, i)$
 - 2.1. Cas des surfaces
 - 2.2. Cas m quelconque
- 3. Conséquences
 - Dualité pour les faisceaux de cohomologie
 - Cas où la base est un corps fini
 - Cas où la base est un corps algébriquement clos

BIBLIOGRAPHIE

Introduction

0.1. — Soit X un schéma propre et lisse sur $S = \operatorname{Spec} k$, où k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Si l'on veut établir un théorème de dualité pour la cohomologie plate de X , la catégorie naturelle des coefficients est la catégorie des schémas en groupes commutatifs, finis localement libres sur X ; la partie de p -torsion présentant, seule, des phénomènes spécifiques à la cohomologie plate, on ne considère que des p -groupes.

La motivation initiale de ce travail réside, lorsque X est une surface, dans l'extension du théorème de dualité, établi par MILNE ([24, 5.2]), pour la cohomologie plate de X à valeurs dans le faisceau μ_{p^n} des racines p^n -ièmes de l'unité : nous établissons ici une dualité avec pour coefficients un p -groupe fini localement libre G de type multiplicatif sur X .

Plus précisément, désignons par S_{parf} le topos parfait de S , par X_{fppf} le topos fppf de X , par π le morphisme de topos $X_{\text{fppf}} \rightarrow S_{\text{parf}}$ et par \mathcal{F} la catégorie des faisceaux abéliens de S_{parf} ; le foncteur

$$L \longrightarrow L^\sim = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{F}}(L, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

est une auto-dualité de la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée $D(\mathcal{F})$ formée de complexes bornés dont la cohomologie est constituée de groupes quasi-algébriques, au sens de SERRE [27]. Le théorème de Milne [24, 5.2] exprime l'existence d'un système compatible d'isomorphismes

$$\mathbb{R}\pi_*(\mu_{p^n}) \simeq (\mathbb{R}\pi_*(\mu_{p^n}))^\sim[-4].$$

Alors que les groupes μ_{p^n} doivent être considérés comme auto-duaux, la dualité pour le groupe G est fournie par le foncteur

$$G \longrightarrow G^t = G^{**},$$

où $*$ est la dualité de Cartier et $^\sim$ la dualité de Pontryagin des groupes étales. Avec ces définitions nous établissons :

THÉORÈME. — *Il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathbb{R}\pi_*(G^t) \simeq (\mathbb{R}\pi_*(G))^\vee[-4].$$

Plus généralement, si X est de dimension m sur k et si H est un groupe p -divisible de type multiplicatif sur X , le théorème de dualité ci-dessus est conséquence d'un théorème de dualité liant les faisceaux étales $\nu_n(\mathbb{D}(H^*), i)$ et $\nu_n(\mathbb{D}(H^{t*}), m - i)$ associés aux cristaux de Dieudonné $\mathbb{D}(H^*)$ et $\mathbb{D}(H^{t*})$ (cf. [3], [4]) : ces faisceaux sont définis à partir des points fixes d'un opérateur de Frobenius et d'un opérateur de Cartier sur les complexes de De Rham-Witt à coefficients dans $\mathbb{D}(H^*)$ et $\mathbb{D}(H^{t*})$ (cf. [12] et [15]). Ce dernier théorème permettra en outre, dans un prochain travail [15 bis], des évaluations p -adiques sur la fonction L associée au cristal de Dieudonné d'un groupe p -divisible étale sur X .

Je tiens à remercier ici l'I.H.E.S. pour l'hospitalité qu'il m'a offerte durant le printemps 1983 : une grande partie de ce travail y a été réalisée dans son ambiance stimulante.

Mes remerciements vont naturellement à Pierre BERTHELOT qui m'a, entre autres, permis d'éviter maints écueils.

1. Définition de l'accouplement de dualité

0. — Soient X un schéma propre et lisse de dimension m sur $S = \text{Spec } k$ (k corps parfait de caractéristique $p > 0$) et G (resp. H) un p -groupe fini localement libre (resp. un groupe p -divisible de hauteur h) de type multiplicatif sur X . Définissons le dual de G par $G^t = G^{**}$, où $*$ est la dualité de Cartier et $^\vee$ la dualité de Pontryagin des groupes étales. Le p -groupe G^t est lui aussi localement libre de type multiplicatif, de même que le groupe $p^n G$ et le noyau, $G(n)$, de la multiplication par p^n sur G ; en particulier pour $G = H(n)$, la famille des $H^t(n) := (H(n))^t$ est aussi un groupe p -divisible de type multiplicatif et de hauteur h sur X .

Si $W_n \Omega^\bullet$ est le complexe de DE RHAM-WITT de X [21], on considérera les faisceaux étales suivants sur X [15, I et III 2]

$$\begin{aligned} \nu_n(i) &= \text{Ker} \left\{ 1 - F : W_n \Omega^i \longrightarrow W_n \Omega^i / dV^{n-1} \Omega^{i-1} \right\} \\ &= \text{Ker} \left\{ C - 1 : F(W_{n+1} \Omega^i) \longrightarrow W_n \Omega^i \right\}, \\ \tilde{\nu}_n(i) &= \text{Ker} \left\{ 1 - F : W_n \Omega^i \longrightarrow W_n \Omega^i / dW_n \Omega^{i-1} \right\}. \end{aligned}$$

Il est clair que $\nu_n(i) \subset \tilde{\nu}_n(i)$.

1. Énoncé et méthode de la démonstration. — Soient X_{fppf} le (gros) topos fppf de X , $X_{\text{ét}}$ le (petit) topos étale de X et $\alpha : X_{\text{fppf}} \rightarrow X_{\text{ét}}$ le morphisme canonique.

Le but du I est d'établir la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1. — *Si X est de dimension 2 sur S , il existe un accouplement canonique, fonctoriel en G ,*

$$(1.1.1) \quad R^1\alpha_*(G) \times R^1\alpha_*(G^t) \longrightarrow \nu_n(2),$$

indépendant de l'entier n choisi tel que $p^n G = 0$, i.e. tel que le diagramme suivant commute :

$$(1.1.2) \quad \begin{array}{ccc} R^1\alpha_*(G) \times R^1\alpha_*(G^t) & \longrightarrow & \nu_n(2) \\ \parallel & & \downarrow p \\ R^1\alpha_*(G) \times R^1\alpha_*(G^t) & \longrightarrow & \nu_{n+1}(2). \end{array}$$

En particulier, dans le cas d'un groupe p -divisible H , cet accouplement fait commuter le diagramme

$$(1.1.3) \quad \begin{array}{ccc} R^1\alpha_*(H(n)) \times R^1\alpha_*(H^t(n)) & \longrightarrow & \nu_n(2) \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ R^1\alpha_*(H(n+1)) \times R^1\alpha_*(H^t(n+1)) & \longrightarrow & \nu_{n+1}(2), \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est induite par l'inclusion $H(n) \hookrightarrow H(n+1)$ et celle du milieu, par la projection $H^t(n+1) \twoheadrightarrow H^t(n)$.

Rappelons quelques notations [15]. Les F -cristaux $E = \mathbb{D}(H^*)$ et $E = \mathbb{D}(G^*)$ sont munis d'isomorphismes $\Phi : E^\sigma \xrightarrow{\sim} E$; le cas $E = \mathbb{D}(H^*)$ équivaut à un F -cristal unité [26, VI, 3.1.2.1]. Nous posons [15, II, 1.1.7] $E_n = E_{(X, W_n(X), \delta)}$, où δ désigne les puissances divisées canoniques sur $VW_{n-1}\mathcal{O}$, et [15, III, 2.1 et 2.2]

$$\begin{aligned} \nu_n(E, i) &= \text{Ker} \left\{ E_n \otimes W_n \Omega^i \xrightarrow{1-\tilde{F}} E_n \otimes W_n \Omega^i / \nabla V^{n-1} (E_1 \otimes \Omega^{i-1}) \right\} \\ &= \text{Ker} \left\{ F^n (E_{2n} \otimes W_{2n} \Omega^i) \xrightarrow{\tilde{C}-1} E_n \otimes W_n \Omega^i \right\}. \end{aligned}$$

On notera en abrégé $\nu_n(J, i) := \nu_n(\mathbb{D}(J), i)$ pour tout faisceau abélien J sur X .

Dorénavant, dans ce chapitre I, nous supposons fixé $n \in \mathbb{N}$ tel que $p^n G = 0$. Pour la démonstration de 1.1 nous allons procéder comme suit.

D'après [15, III, 2.5] on dispose d'isomorphismes

$$R^1 \alpha_*(G) \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_n} \nu_n(G^*, 1), \quad R^1 \alpha_*(G^t) \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_n} \nu_n(G^{t*}, 1);$$

pour définir l'accouplement (1.1.1) il nous suffit donc de définir un accouplement

$$\nu_n(G^*, 1) \times \nu_n(G^{t*}, 1) \longrightarrow \nu_n(2) \subset \tilde{\nu}_n(2).$$

Plus généralement nous montrerons :

PROPOSITION 1.2. — *Si X est de dimension m sur S , il existe, pour tout entier $i \geq 0$, un accouplement*

$$\nu_n(G^*, i) \times \nu_n(G^{t*}, m - i) \longrightarrow \nu_n(m).$$

Cet accouplement sera induit par un accouplement entre complexes

$$X^\bullet \times Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet,$$

avec

$$\begin{aligned} X^\bullet &= \left\{ \mathbb{D}(G^*)_n \otimes W_n \Omega^i \xrightarrow{1-\tilde{F}} \right. \\ &\quad \left. \mathbb{D}(G^*)_n \otimes W_n \Omega^i / \nabla V^{n-1}(\mathbb{D}(G^*)_1 \otimes \Omega^{i-1}) \right\}, \\ Y^\bullet &= \left\{ F^n(\mathbb{D}(G^{t*})_{2n} \otimes W_{2n} \Omega^{m-i}) \xrightarrow{\tilde{C}-1} \mathbb{D}(G^{t*})_n \otimes W_n \Omega^{m-i} \right\}, \\ Z^\bullet &= \{ W_n \Omega^m \xrightarrow{C-1} W_n \Omega^m \}. \end{aligned}$$

Outre l'isomorphisme $\mathbb{D}(G^{t*})_n \simeq \mathbb{D}(G)_n$ (cf. 2.1), valable pour G de type multiplicatif, le point clé pour définir cet accouplement de complexes réside dans l'existence (sans pour cela que G soit nécessairement de type multiplicatif) d'un morphisme (cf. 2.2)

$$\gamma_n : \mathbb{D}(G^*)_n \longrightarrow \mathbb{D}(G)_n^\sim \quad (= \text{dual linéaire de } \mathbb{D}(G)_n)$$

(où n est tel que $p^n G = 0$), qui peut être vu comme la généralisation naturelle (cf. 2.2.2) de l'isomorphisme de dualité (cf. [4, 5.3])

$$\mathbb{D}(H^*)_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(H)_n^\sim,$$

valable pour un groupe p -divisible H sur X .

Nous serons alors en mesure, au paragraphe 3, de construire l'accouplement et nous établirons, au paragraphe 4, les différentes compatibilités.

2. Comparaison entre $\mathbf{D}(G)$, $\mathbf{D}(G^*)$ et $\mathbf{D}(G^{t*})$.

2.1. Isomorphisme $\mathbf{D}(G^{t}) \simeq \mathbf{D}(G)$.* — On rappelle que G est un p -groupe fini localement libre de type multiplicatif sur X .

Tout d'abord, il est clair que $G^{t*} \simeq G^{*\vee}$. D'après [3, p. 28] il existe, puisque G est de type multiplicatif, des isomorphismes de faisceaux (ou de cristaux) pour la topologie étale :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(G^{*\vee}) &\xleftarrow{\sim} \underline{G}^* \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathcal{O}_{X/W}, \\ \mathbf{D}(G) &\xleftarrow{\sim} \underline{G}^* \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathcal{O}_{X/W},\end{aligned}$$

fonctoriels en G , d'où un isomorphisme

$$(2.1.1) \quad \mathbf{D}(G^{t*}) \simeq \mathbf{D}(G)$$

fonctoriel en G .

PROPOSITION 2.1.2. — *L'isomorphisme (2.1.1) induit un isomorphisme*

$$(2.1.2.1) \quad \mathbf{D}(G^{t*})_n \simeq \mathbf{D}(G)_n$$

compatible aux connexions et fonctoriel en G , s'insérant dans le carré commutatif

$$(2.1.2.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{D}(G^{t*})_n & \xrightarrow[\sim]{\Phi_{\mathbf{D}(G^{t*})}^{-1}} & (\mathbf{D}(G^{t*})_n)^\sigma \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathbf{D}(G)_n & \xrightarrow[\sim]{V_{\mathbf{D}(G)}} & (\mathbf{D}(G)_n)^\sigma. \end{array}$$

Nous écrirons ce résultat sous la forme :

$$(2.1.2.3) \quad \Phi_{\mathbf{D}(G^{t*})}^{-1} = V_{\mathbf{D}(G)}.$$

La fonctorialité de (2.1.2.1), appliquée à $V_G : G^\sigma \rightarrow G$, entraîne la commutativité de (2.1.2.2) puisque V_G induit respectivement

$$F_{G^*} : G^* \longrightarrow (G^*)^\sigma \quad \text{et} \quad (F_{G^*})^{-1} : (G^*)^\sigma \longrightarrow G^*. \quad \square$$

2.2. Morphisme $\gamma_n : \mathbb{D}(G^*)_n \rightarrow \mathbb{D}(G)_n^\vee$. — Si l'on note $E^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W}}(E, \mathcal{O}_{X/W})$ le dual d'un cristal en $\mathcal{O}_{X/W}$ -modules E , on sait [1, IV, 2.4.1] que, pour tout objet (U, T, δ) de $\text{CRIS}(X/W)$, il existe un isomorphisme

$$(E_{(U, T, \delta)})^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T}(E_{(U, T, \delta)}, \mathcal{O}_T) \xleftarrow{\sim} (E^\vee)_{(U, T, \delta)} ;$$

nous utiliserons donc la notation $E_{(U, T, \delta)}^\vee$ sans risque d'inconvénients.

Dans ce paragraphe 2.2, il ne sera pas nécessaire de supposer G de type multiplicatif, par contre il sera nécessaire, pour définir γ_n , de supposer n tel que $p^n G = 0$.

2.2.1. Cas d'un groupe p -divisible, $G = H(n)$. — Soit (U, T, δ) un objet de $\text{CRIS}(X/W_n)$. En composant l'isomorphisme canonique [4, 3.3.3.1]

$$(2.2.1.1) \quad \mathbb{D}(j_n)^{-1} : \mathbb{D}(H^*(n))_{(U, T, \delta)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(H^*)_{(U, T, \delta)},$$

provenant par fonctorialité de l'injection $H^*(n) \hookrightarrow H^*$, avec l'isomorphisme de dualité [4, 5.3.3]

$$(2.2.1.2) \quad \Phi_H^{-1} : \mathbb{D}(H^*)_{(U, T, \delta)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(H)_{(U, T, \delta)}^\vee$$

(dédit de l'isomorphisme de cristaux $\mathbb{D}(H^*) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(H)^\vee$) et l'isomorphisme canonique [4, 3.3.3.1]

$$(2.2.1.3) \quad [\mathbb{D}(i_n)^\vee]^{-1} : \mathbb{D}(H)_{(U, T, \sigma)}^\vee \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(H(n))_{(U, T, \sigma)}^\vee,$$

provenant de l'injection $H(n) \xrightarrow{i_n} H$, on obtient l'isomorphisme

$$(2.2.1.4) \quad \gamma_n : \mathbb{D}(H^*(n))_{(U, T, \delta)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(H(n))_{(U, T, \delta)}^\vee.$$

En fait, dans le cas d'un groupe p -divisible H , nous identifierons γ_n et Φ_H^{-1} via $\mathbb{D}(j_n)^{-1}$ et $[\mathbb{D}(i_n)^\vee]^{-1}$.

L'isomorphisme γ_n qui nous concerne pour l'accouplement 1.2 est obtenu pour $(U, T, \delta) = (X, W_n(X), \delta')$, où δ' sont les puissances divisées canoniques sur $VW_{n-1}\mathcal{O}$:

$$(2.2.1.4') \quad \gamma_n : \mathbb{D}(H^*(n))_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(H(n))_n^\vee.$$

Compatibilité de γ_n au Frobenius. — Par sa functorialité en H , l'isomorphisme γ_n (identifié à Φ_H^{-1}) rend commutatif le diagramme (2.2.1.5). Ici, W est l'extension des scalaires et θ un isomorphisme puisque $\mathbb{D}(H)$ est un cristal en $\mathcal{O}_{X/W}$ -modules, localement libre de rang h [4, théorème 3.3.10]; les notations $\Phi_{\mathbb{D}(H^*)}$ et $F_{\mathbb{D}(H^*)}$ sont celles de [15, II, 3.0].

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_{\mathbb{D}(H^*)} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 \mathbb{D}(H^*)_n & \xleftarrow{\Phi_{\mathbb{D}(H^*)}} & (\mathbb{D}(H^*)_n)^\sigma & \xleftarrow{W} & \mathbb{D}(H^*)_n \\
 \downarrow \gamma_n \wr & & & & \downarrow \wr \gamma_n \\
 \mathbb{D}(H)_n^\sim & \xleftarrow{V} & (\mathbb{D}(H)_n^\sigma)^\sim & \xleftarrow[\sim]{\theta} & (\mathbb{D}(H)_n^\sim)^\sigma \xleftarrow{W} \mathbb{D}(H)_n^\sim
 \end{array}$$

Notations : dans ce diagramme, on a posé

$$(\mathbb{D}(H)_n^\sigma)^\sim = \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}}(\mathbb{D}(H)_n \otimes_{W_n\mathcal{O}} W_n\mathcal{O}, W_n\mathcal{O});$$

$$V = (V_{\mathbb{D}(H)})^\sim;$$

et l'effet des applications en jeu est :

$$W(\psi) = \psi \otimes 1;$$

$$\theta\left(\sum_j \psi_j \otimes \alpha_j\right) = \left\{a \otimes 1 \mapsto \sum_j \alpha_j F_{W_n\mathcal{O}}(\psi_j(a))\right\}.$$

Diagramme (2.2.1.5)

Explicitons $\gamma_n \circ F_{\mathbb{D}(H^*)}$. Soient $\varphi \in \mathbb{D}(H^*)_n$ et $a \in \mathbb{D}(H)_n$ tel que $V_{\mathbb{D}(H)}(a) = \sum_i a_i \otimes \lambda_i$ pour $a_i \in \mathbb{D}(H)_n$ et $\lambda_i \in W_n\mathcal{O}$; posons $\psi = \gamma_n(\varphi)$. La commutativité du diagramme (2.2.1.5) fournit

$$\begin{aligned}
 [\gamma_n(F_{\mathbb{D}(H^*)}(\varphi))](a) &= [(V_{\mathbb{D}(H)})^\sim \circ \theta(\psi \otimes 1)](a) \\
 &= [\theta(\psi \otimes 1)](V_{\mathbb{D}(H)}(a)),
 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(2.2.1.6) \quad [\gamma_n(F_{\mathbb{D}(H^*)}(\varphi))](a) = \sum_i \lambda_i F_{W_n\mathcal{O}}(\psi(a_i)).$$

Ici, on peut même procéder à l'identification de φ à ψ (et c'est ce que nous ferons dans la suite de ce 2.2.1) via l'isomorphisme γ_n , et la formule précédente devient

$$(2.2.1.6') \quad (F_{\mathbb{D}(H^*)}(\varphi))(a) = \sum_i \lambda_i F_{W_n} \circ (\varphi(a_i)).$$

Compatibilité de γ_n aux connexions. — Notons ∇_2 la connexion de $\mathbb{D}(H)_n$; comme $\mathbb{D}(H^*)$ et $\mathbb{D}(H)^\sim$ sont des cristaux, $\mathbb{D}(H^*)_n$ et $\mathbb{D}(H)_n^\sim$ sont munis de connexions naturelles que nous identifierons via γ_n , soit ∇_1 cette connexion. Comme $\mathbb{D}(H)_n$ est localement libre de type fini sur $W_n\mathcal{O}$, les isomorphismes

$$\mathbb{D}(H^*)_n \otimes W_n\Omega^1 \xrightarrow[\sim]{\gamma_n \otimes \text{Id}} \mathbb{D}(H)_n^\sim \otimes W_n\Omega^1 \xrightarrow[\sim]{h} \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}}(\mathbb{D}(H)_n, W_n\Omega^1),$$

nous permettent, pour $\varphi \in \mathbb{D}(H^*)_n$, d'interpréter $\nabla_1(\varphi)$ comme une application linéaire de $\mathbb{D}(H)_n$ dans $W_n\Omega^1$. Comme $\nabla_1 : \mathbb{D}(H)_n^\sim \rightarrow \mathbb{D}(H)_n^\sim \otimes W_n\Omega^1$ est duale [23, 1.1.2] de $\nabla_2 : \mathbb{D}(H)_n \rightarrow \mathbb{D}(H)_n \otimes W_n\Omega^1$, on en déduit

$$(2.2.1.7) \quad \nabla_1(\varphi)(a) = d(\varphi(a)) - (\varphi \otimes 1)(\nabla_2(a)),$$

où $a \in \mathbb{D}(H)_n$, d est la différentielle $W_n\mathcal{O} \rightarrow W_n\Omega^1$, et $\varphi \otimes 1$ l'application linéaire $\mathbb{D}(H)_n \otimes W_n\Omega^1 \rightarrow W_n\Omega^1$, $\xi \otimes \eta \mapsto \varphi(\xi) \cdot \eta$.

En toute rigueur, en désignant par ∇_1 la connexion de $\mathbb{D}(H^*)_n$, on devrait écrire cette formule

$$(2.2.1.7') \quad [h(\gamma_n \otimes \text{Id})\nabla_1(\varphi)](a) = d(\psi(a)) - (\psi \otimes 1)(\nabla_2(a)),$$

avec $\psi = \gamma_n(\varphi)$.

2.2.2. Cas d'un groupe fini G . — Puisque n est tel que $p^n G = 0$, il existe, pour tout objet (U, T, δ) de $\text{CRIS}(X/W_n)$ un homomorphisme [4, p. 173]

$$(2.2.2.1) \quad -“p^n” : \mathbb{D}(G^*)_{(U, T, \delta)} \longrightarrow \mathcal{H}om_{X/W}(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W})_{(U, T, \delta)};$$

en le composant avec l'isomorphisme de dualité [4, 5.2.7.1]

$$(2.2.2.2) \quad \Phi_G^{-1} : \mathcal{H}om_{X/W}(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W})_{(U, T, \delta)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(G)_{(U, T, \delta)}^\sim,$$

on obtient un morphisme

$$(2.2.2.3) \quad \gamma_n : \mathbb{D}(G^*)_{(U, T, \delta)} \longrightarrow \mathbb{D}(G)_{(U, T, \delta)}^\sim.$$

Celui qui nous intéressera pour l'accouplement 1.2 est obtenu pour $(U, T, \delta) = (X, W_n(X), \delta')$, où δ' sont les puissances divisées canoniques sur $VW_{n-1}\mathcal{O}$:

$$(2.2.2.3') \quad \gamma_n : \mathbb{D}(G^*)_n \longrightarrow \mathbb{D}(G)_n^\vee.$$

Si l'on suppose que $(U, T, \delta) = (X, X_n, \delta'')$, où X_n est la réduction modulo p^n d'un relèvement lisse \tilde{X} de X sur W et δ'' les puissances divisées canoniques sur $p\mathcal{O}_{X_n}$, γ_n est un isomorphisme

$$(2.2.2.3'') \quad \gamma_n : \mathbb{D}(G^*)_{(X, X_n, \delta'')} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(G)_{(X, X_n, \delta'')}^\vee,$$

puisqu'alors " p^n " en est un [4, 4.2.9].

Montrons que le morphisme γ_n de (2.2.2.3) redonne celui de (2.2.1.4) lorsque $G = H(n)$. En effet, pour tout groupe p -divisible H sur X , l'isomorphisme de dualité (2.2.1.2) est défini par la commutativité du diagramme [4, 5.3.1.6]

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(H)_{(U, T, \delta)}^\vee & \xrightarrow[\sim]{\Phi_H} & \mathbb{D}(H^*)_{(U, T, \delta)} \\ \downarrow [\mathbb{D}(i_n)^\vee]^{-1} \wr & & \wr \downarrow -\partial_n \\ \mathbb{D}(H(n))_{(U, T, \delta)}^\vee & \xrightarrow[\sim]{\Phi_{H(n)}} & \mathcal{H}om_{X/W}(\underline{H}^*(n), \mathcal{O}_{X/W})_{(U, T, \delta)}, \end{array}$$

où ∂_n est l'homomorphisme cobord résultant de la suite exacte

$$(2.2.2.4) \quad 0 \longrightarrow H^*(n) \xrightarrow{j_n} H^* \xrightarrow{p^n} H^* \longrightarrow 0.$$

Comme $H^*(2n)$ est le produit fibré $H^* \times_{H^*} H^*(n)$ défini grâce aux morphismes $p^n : H^* \rightarrow H^*$ et $j_n : H^*(n) \rightarrow H^*$, on en déduit, compte tenu de la commutativité du diagramme formé des suites exactes (2.2.2.5) et (2.2.2.4)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^*(n) & \longrightarrow & H^*(2n) & \xrightarrow{p^n} & H^*(n) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow j_{2n} & & \downarrow j_n \\ 0 & \longrightarrow & H^*(n) & \longrightarrow & H^* & \xrightarrow{p^n} & H^* \longrightarrow 0, \end{array}$$

que l'homomorphisme composé

$$\mathcal{H}om_{X/W}(\underline{H}^*(n), \mathcal{O}_{X/W})_{(U,T,\delta)} \xrightarrow[\sim]{\partial_n} \mathbb{D}(H^*)_{(U,T,\delta)} \xrightarrow[\sim]{\mathbb{D}(j_n)} \mathbb{D}(H^*(n))_{(U,T,\delta)}$$

est l'homomorphisme cobord déduit de la suite exacte (2.2.2.5), homomorphisme cobord dont on peut montrer qu'il n'est autre que l'inverse de " p^n " [4, p. 174–175]. On a ainsi établi la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{D}(H)^\sim_{(U,T,\delta)} & \xleftarrow[\sim]{\Phi_H^{-1}} & \mathbb{D}(H^*)_{(U,T,\delta)} & \xleftarrow[\sim]{\mathbb{D}(j_n)^{-1}} & \mathbb{D}(H^*(n))_{(U,T,\delta)} \\ \downarrow [\mathbb{D}(i_n)^\sim]^{-1} \wr & & \uparrow -\delta_n \wr & \swarrow -"p^n" & \\ \mathbb{D}(H(n))^\sim_{(U,T,\delta)} & \xleftarrow[\sim]{\Phi_{H(n)}^{-1}} & \mathcal{H}om_{X/W} & & \end{array}$$

où l'on a posé, pour simplifier,

$$\mathcal{H}om_{X/W} = \mathcal{H}om_{X/W}(\underline{H}^*(n) \mathcal{O}_{X/W})_{(U,T,\delta)}.$$

Cela montre que les deux définitions de γ_n coïncident pour $G = H(n)$. En particulier, pour $(U, T, \delta) = (X, X_n, \delta'')$ [cf. (2.2.2.3'')] et $G = H(n)$, on peut dire que, moyennant les identifications canoniques par $\mathbb{D}(j_n)$ et $\mathbb{D}(i_n)^\sim$, on a

$$(2.2.2.6) \quad \gamma_n = \Phi_H^{-1}.$$

Dans la suite de ce paragraphe 2.2.2 nous nous limiterons au morphisme γ_n de (2.2.2.3').

Compatibilité de γ_n au Frobenius (2.2.2.7). — Par la functorialité en G des morphismes " p^n " et Φ_G^{-1} , le morphisme γ_n s'insère dans le même diagramme commutatif que (2.2.1.5), où H est remplacé par G , à la seule différence près maintenant que γ_n et θ ne sont plus nécessairement des isomorphismes ($\mathbb{D}(G)$ est seulement localement de présentation finie [4, corollaire 3.1.3]). La formule (2.2.1.6) s'applique également.

Compatibilité de γ_n aux connexions. — Cette compatibilité est plus délicate à exprimer dans le cas d'un groupe fini, du fait que $\mathbb{D}(G)^\sim$ n'est pas un cristal en général.

LEMME 2.2.2.8. — Soient $d : W_n\mathcal{O} \rightarrow W_n\Omega^1$, $\nabla_1 : \mathbb{D}(G^*)_n \rightarrow \mathbb{D}(G^*)_n \otimes W_n\Omega^1$ et $\nabla_2 : \mathbb{D}(G)_n \rightarrow \mathbb{D}(G)_n \otimes W_n\Omega^1$ les différentielles. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{D}(G^*)_n & \xrightarrow{\gamma_n} & \mathbb{D}(G)_n^\sim & \xlongequal{\quad} & \mathcal{H}om(W_n\mathcal{O}) \\
 \nabla_1 \downarrow & & & & \downarrow f \\
 \mathbb{D}(G^*)_n \otimes W_n\Omega^1 & \xrightarrow{\gamma_n \otimes \text{Id}} & \mathbb{D}(G)_n^\sim \otimes W_n\Omega^1 & \xrightarrow{h} & \mathcal{H}om(W_n\Omega^1)
 \end{array}$$

où l'on a posé, pour simplifier :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}om(W_n\mathcal{O}) &= \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}}(\mathbb{D}(G)_n, W_n\mathcal{O}), \\
 \mathcal{H}om(W_n\Omega^1) &= \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}}(\mathbb{D}(G)_n, W_n\Omega^1), \\
 f(\psi) &= d \circ \psi - (\psi \otimes 1) \circ \nabla_2.
 \end{aligned}$$

On notera que ce lemme ne fait qu'étendre la formule (2.2.1.7'). Posons $\Omega^1 = \Omega^1_{W_n\mathcal{O}, [\cdot]}$. Comme $W_n\Omega^1$ est un quotient de Ω^1 , il nous suffit d'établir la commutativité du diagramme analogue au précédent :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{D}(G^*)_n & \xrightarrow{\gamma_n} & \mathbb{D}(G)_n^\sim & \xlongequal{\quad} & \mathcal{H}om(W_n\mathcal{O}) \\
 \nabla_1 \downarrow & & & & \downarrow f \\
 \mathbb{D}(G^*)_n \otimes \Omega^1 & \xrightarrow{\gamma_n \otimes \text{Id}} & \mathbb{D}(G)_n^\sim \otimes \Omega^1 & \xrightarrow{h} & \mathcal{H}om(\Omega^1)
 \end{array}$$

avec, bien entendu, $\mathcal{H}om(\Omega^1) = \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}}(\mathbb{D}(G)_n, \Omega^1)$. Désignons par $D_{W_n(X)}(1)$ (noté $D(1)$ en abrégé par la suite) le voisinage à puissances divisées d'ordre 1 de l'enveloppe à puissances divisées de $W_n(X)$ dans $W_n(X) \times W_n(X)$ (cf. [5, 4.1]), et par

$$D(1) \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} W_n(X)$$

les deux projections. On sait [15, II, 1.1.4] que $\Omega^1 = \text{Ker}(\mathcal{O}_{D(1)} \rightarrow W_n\mathcal{O})$.

Soit $\varphi \in \mathbb{D}(G^*)_n$ d'image $\psi = \gamma_n(\varphi) \in \mathbb{D}(G)_n^\sim$.

(1) Calculons d'abord $f(\psi)$, avec

$$f(\psi) \in \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}}(\mathbb{D}(G)_n, \Omega^1) \subset \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}}(\mathbb{D}(G)_n, \mathcal{O}_{D(1), \text{dr}}),$$

où l'écriture $\mathcal{O}_{D(1),\text{dr}}$ signifie que l'on prend la structure droite de $W_n\mathcal{O}$ -module sur $\mathcal{O}_{D(1)}$. Soit $\xi \in \mathbb{D}(G)_n$, on a $d(\psi(\xi)) = 1 \otimes \psi(\xi) - \psi(\xi) \otimes 1$ et $1 \otimes \psi(\xi) = (1 \otimes \psi)d_2(\xi)$ où $(1 \otimes \psi) \circ d_2$ est la composée

$$\mathbb{D}(G)_n \xrightarrow{d_2} \mathcal{O}_{D(1),\text{dr}} \otimes_{W_n\mathcal{O}} \mathbb{D}(G)_n \xrightarrow{1 \otimes \psi} \mathcal{O}_{D(1)} \otimes_{W_n\mathcal{O}} W_n\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}_{D(1),\text{dr}}.$$

Notons au passage que d_2 est linéaire pour la structure de $W_n\mathcal{O}$ -module sur $\mathbb{D}(G)_n$ et la structure droite sur $\mathcal{O}_{D(1),\text{dr}} \otimes \mathbb{D}(G)_n$: $d_2(a\xi) = (1 \otimes \xi)a$, avec $a \in W_n\mathcal{O}$, $\xi \in \mathbb{D}(G)_n$ (ceci est l'analogue de (E.G.A. IV, 16.7.5.3) pour les puissances divisées). D'autre part $\nabla_2(\xi) = \varepsilon(1 \otimes \xi) - \xi \otimes 1$, où ε est l'isomorphisme $\mathcal{O}_{D(1)}$ -linéaire

$$\varepsilon : \mathcal{O}_{D(1),\text{dr}} \otimes_{W_n\mathcal{O}} \mathbb{D}(G)_n \xrightarrow[\varepsilon_2]{\sim} \mathbb{D}(G)_{D(1)} \xrightarrow[\varepsilon_1^{-1}]{\sim} \mathbb{D}(G)_n \otimes_{W_n\mathcal{O}} \mathcal{O}_{D(1),g}$$

(du fait que $\mathbb{D}(G)$ est un cristal). Donc

$$(\psi \otimes 1) \circ \nabla_2(\xi) = (\psi \otimes 1)\varepsilon d_2(\xi) - \psi(\xi) \otimes 1,$$

et $d\psi(\xi) - (\psi \otimes 1) \circ \nabla_2(\xi) = (1 \otimes \psi - (\psi \otimes 1)\varepsilon)d_2(\xi)$, ce qui s'écrit

$$(2.2.2.9) \quad f(\psi) = (1 \otimes \psi - (\psi \otimes 1) \circ \varepsilon) \circ d_2.$$

(2) Pour le calcul de $h(\gamma_n \otimes \text{Id})\nabla_{\text{I}}(\varphi)$, on remarque que h s'insère dans le diagramme commutatif suivant

$$(2.2.2.10) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{D}(G^*)_n & \xrightarrow{\nabla_1} & \mathbb{D}(G^*)_n \otimes \Omega^1 & \xrightarrow{\gamma_n \otimes \text{Id}} & \\ & & \downarrow u & & \\ & & \mathcal{O}_{D(1),\text{dr}} \otimes \mathbb{D}(G^*)_n & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \gamma_n} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow & \mathbb{D}(G)_n^\sim \otimes \Omega^1 & \xrightarrow{h} & \text{Hom}_{W_n\mathcal{O}}(\mathbb{D}(G)_n, \Omega^1) & \\ & \downarrow v & & \downarrow \text{can} & \\ \longrightarrow & \mathcal{O}_{D(1),\text{dr}} \otimes \mathbb{D}(G)_n^\sim & \xrightarrow{h''} & \text{Hom}_{W_n\mathcal{O}}(\mathbb{D}(G)_n, \mathcal{O}_{D(1),\text{dr}}), & \end{array}$$

avec $u(\Sigma_i m_i \otimes \omega_i) = \Sigma_i \omega_i \otimes m_i$, $v(\Sigma_i f_i \otimes \omega_i) = \Sigma_i \omega_i \otimes f_i$, et $h''(\Sigma_i 1 \otimes \psi_i) = \Sigma_i (1 \otimes \psi_i) \circ d_2$. Montrons tout d'abord que u est induit par

$$\varepsilon^{*-1} : \mathbb{D}(G^*)_n \otimes_{W_n \mathcal{O}} \mathcal{O}_{D(1)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{D(1)} \otimes_{W_n \mathcal{O}} \mathbb{D}(G^*)_n,$$

où

$$\varepsilon^* : \mathcal{O}_{D(1), \text{dr}} \otimes_{W_n \mathcal{O}} \mathbb{D}(G^*)_n \xrightarrow[\varepsilon_2^*]{\sim} \mathbb{D}(G^*)_{D(1)} \xrightarrow[\varepsilon_1^{*-1}]{\sim} \mathbb{D}(G^*)_n \otimes_{W_n \mathcal{O}} \mathcal{O}_{D(1), g}$$

est l'isomorphisme $\mathcal{O}_{D(1)}$ -linéaire résultant de ce que $\mathbb{D}(G^*)$ est un cristal. Notons $M = \mathbb{D}(G^*)_n$ et considérons le composé

$$M \otimes \Omega^1 \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{D(1)} \otimes M \xrightarrow[\sim]{\varepsilon^*} M \otimes \mathcal{O}_{D(1)}.$$

On a

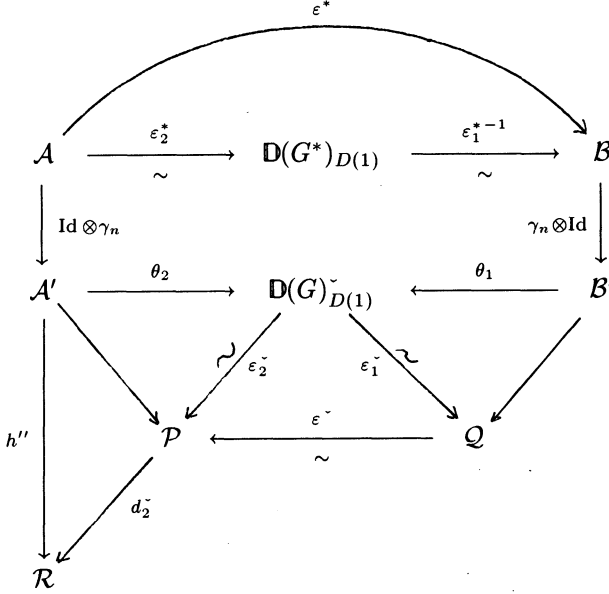
$$\varepsilon^* u(\Sigma_i m_i \otimes \omega_i) = \varepsilon^*(\Sigma_i \omega_i \otimes m_i) = \Sigma_i \omega_i \cdot \varepsilon^*(1 \otimes m_i) = \Sigma_i \omega_i \cdot (m_i \otimes 1)$$

car, avec les notations de [5, 4.9.2], $\omega_i \in \Omega^1 = \bar{J}/\bar{J}^{[2]}$, $\varepsilon(1 \otimes m) \cong m \otimes 1 \bmod \bar{J}$ et $\bar{J}^{[2]} = 0$ dans $\mathcal{O}_{D(1)}$, d'où $\varepsilon^* u(\Sigma_i m_i \otimes \omega_i) = \Sigma_i m_i \otimes \omega_i$. Donc $\varepsilon^* \circ u = \text{Id}$, ce qui prouve notre assertion. D'autre part ε^* et h'' s'insèrent dans le diagramme commutatif (2.2.2.11) de la page suivante, où, pour une application g , \tilde{g} désigne la duale ($\tilde{g}(t) = t \circ g$), et θ_i est définie par $\theta_2(1 \otimes \psi) = (1 \otimes \psi) \circ \varepsilon_2^{-1}$ et $\theta_1(\psi \otimes 1) = (\psi \otimes 1) \circ \varepsilon_1^{-1}$.

Comme $\nabla_1(\varphi) = \varepsilon^*(1 \otimes \varphi) - \varphi \otimes 1$, il vient

$$\begin{aligned} h(\gamma_n \otimes \text{Id}) \nabla_1(\varphi) &= h''(\text{Id} \otimes \gamma_n) u(\varepsilon^*(1 \otimes \varphi) - \varphi \otimes 1) \\ &\quad (\text{par commutativité de (2.2.2.10)}) \\ &= h''(\text{Id} \otimes \gamma_n) \varepsilon^{*-1}(\varepsilon^*(1 \otimes \varphi) - \varphi \otimes 1) \\ &= h''(\text{Id} \otimes \gamma_n)(1 \otimes \varphi - \varepsilon^{*-1}(\varphi \otimes 1)) \\ &= h''(1 \otimes \psi) - h''(1 \otimes \gamma_n) \varepsilon^{*-1}(\varphi \otimes 1) \\ &= (1 \otimes \psi) \circ d_2 - (\psi \otimes 1) \circ \varepsilon \circ d_2 \\ &\quad (\text{commutativité de 2.2.2.11)}) \\ &= f(\psi) \quad (\text{cf. 2.2.2.9}); \end{aligned}$$

d'où le LEMME 2.2.2.8. \square



$$A = \mathcal{O}_{D(1), dr} \otimes_{W_n \mathcal{O}} \mathbf{D}(G^*)_n$$

$$A' = \mathcal{O}_{D(1), dr} \otimes_{W_n \mathcal{O}} \mathbf{D}(G)_n^\sim$$

$$B = \mathbf{D}(G^*)_n \otimes \mathcal{O}_{D(1), g}$$

$$B' = \mathbf{D}(G)_n^\sim \otimes \mathcal{O}_{D(1), g}$$

$$P = \text{Hom}_{W_n \mathcal{O}}(\mathcal{O}_{D(1)} \otimes \mathbf{D}(G)_n, \mathcal{O}_{D(1), dr})$$

$$Q = \text{Hom}_{W_n \mathcal{O}}(\mathbf{D}(G)_n \otimes \mathcal{O}_{D(1)}, \mathcal{O}_{D(1), g})$$

$$R = \text{Hom}_{W_n \mathcal{O}}(\mathbf{D}(G)_n, \mathcal{O}_{D(1), dr})$$

Diagramme (2.2.2.11)

3. Construction de l'accouplement. — On rappelle que $n \in \mathbb{N}$ est tel que $p^n G = 0$.

LEMME 3.1. — Pour tout $i \geq 0$, il existe un accouplement biadditif

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(G^*)_n \otimes W_n \Omega^i / \nabla V^{n-1} (\mathbf{D}(G^*)_1 \otimes \Omega^{i-1}) \times \\ (\mathbf{D}(G^{t*})_n \otimes W_n \Omega^{m-i})_{\nabla=0} \longrightarrow W_n \Omega^m, \end{aligned}$$

défini par $\overline{\langle \varphi \otimes \omega, a \otimes w' \rangle} = C[(\gamma_n(\varphi))(a) \cdot \omega w']$.

Lorsque $G = G(1)$, $n = 1$ et que l'on munit les différents complexes de De Rham de la structure \mathcal{O}_X -linéaire définie par $F : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$, leur différentielle devient \mathcal{O}_X -linéaire grâce à la relation $\nabla F = pF\nabla$, et l'accouplement ci-dessus est un accouplement bilinéaire non dégénéré de \mathcal{O}_X -modules localement libres de rang fini.

Considérons le diagramme

$$(3.1.1) \quad \begin{array}{ccc} V^{n-1}(\mathbb{D}(G^*)_1 \otimes \Omega^{i-1}) \times \mathbb{D}(G^{t*})_n \otimes W_n \Omega^{m-i+1} & & \\ \nabla_1 \downarrow & \uparrow (-1)^i \nabla_2 & \\ \mathbb{D}(G^*)_n \otimes W_n \Omega^i \times \mathbb{D}(G^{t*})_n \otimes W_n \Omega^{m-i} & \xrightarrow{\quad} & W_n \Omega^m, \end{array}$$

dans lequel chacun des accouplements est défini par

$$\langle \Sigma_j \varphi_j \otimes \omega_j, \Sigma_r a_r \otimes \omega'_r \rangle = \Sigma_{j,r} C[(\gamma_n(\varphi_j))(a_r) \omega_j \cdot \omega'_r],$$

et montrons qu'il commute.

Prouvons d'abord, qu'étant donnés $\varphi \in \mathbb{D}(G^*)_1$ et $\omega \in \Omega^{i-1}$, on a

$$(3.1.2) \quad V^{n-1}(\varphi \otimes \omega) = \Sigma_j x_j \otimes V^{n-1} y_j,$$

avec $x_j \in \mathbb{D}(G^*)_n$ et $y_j \in \Omega^{i-1}$. Rappelons [15, II, 3.2], en posant $E = \mathbb{D}(G^*)$, que le Verschiebung V est le composé

$$\begin{aligned} E_r \otimes W_r \Omega^i &\xrightarrow{\Phi^{-1} \otimes 1} E_r^\sigma \otimes W_r \Omega^i \xrightarrow[\sim]{\iota} E_r \otimes_{W_r \mathcal{O}} F_* W_r \Omega^i \xrightarrow{1 \otimes V} \\ &\longrightarrow E_{r+1} \otimes_{W_{r+1} \mathcal{O}} W_{r+1} \Omega^i, \end{aligned}$$

compte-tenu de l'identification

$$E_r \otimes_{W_r \mathcal{O}} F_* W_r \Omega^i = (E_{r+1} \otimes_{W_{r+1} \mathcal{O}} W_r \mathcal{O}) \otimes_{W_r \mathcal{O}} F_* W_r \Omega^i.$$

Ici, ι est l'isomorphisme d'associativité du produit tensoriel. Posons $\Phi_{\mathbb{D}(G^*)}^{-1}(\varphi) = \Sigma_j \varphi_j \otimes a_j \in \mathbb{D}(G^*)_1^\sigma$; on obtient

$$\begin{aligned} V(\varphi \otimes \omega) &= (1 \otimes V) \iota(\Phi^{-1} \otimes 1)(\varphi \otimes \omega) \\ &= \Sigma_j (1 \otimes V) \iota((\varphi_j \otimes a_j) \otimes \omega) \\ &= \Sigma_j (1 \otimes V)(\varphi_j \otimes a_j \omega) \\ &= \Sigma_j \varphi'_j \otimes V(a_j \omega), \end{aligned}$$

où $\varphi'_j \in \mathbb{D}(G^*)_2$ relève $\varphi_j = R(\varphi'_j) \in \mathbb{D}(G^*)_1 \simeq R(\mathbb{D}(G^*)_2)$ [15, II, 1.2.2]. Supposons par récurrence que, pour un entier $r \geq 1$, on ait

$$V^r(\varphi \otimes \omega) = \sum_j x_j \otimes V^r y_j, \quad \text{avec } x_j \in \mathbb{D}(G^*)_{r+1} \text{ et } y_j \in \Omega^{i-1}.$$

Posons

$$\Phi_{\mathbb{D}(G^*)}^{-1}(x_j) = \sum_{\ell} z_{j,\ell} \otimes b_{j,\ell} \in \mathbb{D}(G^*)_{r+1}^\sigma,$$

ce qui donne

$$V^{r+1}(\varphi \otimes \omega) = \sum_j V(x_j \otimes V^r y_j) = \sum_{j,\ell} z'_{j,\ell} \otimes V(b_{j,\ell} \cdot V^r y_j),$$

avec $z'_{j,\ell} \in \mathbb{D}(G^*)_{r+2}$ et $R(z'_{j,\ell}) = z_{j,\ell}$. Grâce à [21, I.2.1.8.4], on en déduit

$$V^{r+1}(\varphi \otimes \omega) = \sum_{j,\ell} z'_{j,\ell} \otimes V^{r+1}(F(b_{j,\ell})y_j).$$

Par récurrence, (3.1.2) en résulte.

Par la biadditivité des accouplements (3.1.1) et compte tenu de (3.1.2), il nous suffit d'établir, qu'étant donnés $\varphi \in \mathbb{D}(G^*)_n$, $a \in \mathbb{D}(G^{t*})_n \simeq \mathbb{D}(G)_n$, $\omega \in \Omega^{i-1}$ et $\omega' \in W_n \Omega^{m-i}$, on a :

$$(3.1.3) \quad \langle \varphi \otimes V^{n-1}\omega, (-1)^i \nabla_2(a \otimes \omega') \rangle = \langle \nabla_1(\varphi \otimes V^{n-1}\omega), a \otimes \omega' \rangle.$$

Notons x le premier membre de (3.1.3), y le second, $\psi = \gamma_n(\varphi)$, et $\psi \otimes 1$ l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(G)_n \otimes W_n \Omega^1 &\longrightarrow W_n \Omega^1 \\ \xi \otimes \eta &\longmapsto \psi(\xi) \cdot \eta. \end{aligned}$$

Par définition on a :

$$\begin{aligned} x &= \langle \varphi \otimes V^{n-1}\omega, (-1)^i (\nabla_2(a) \cdot \omega' + a \otimes d\omega') \rangle \\ &= (-1)^i \langle \varphi \otimes V^{n-1}\omega, \nabla_2(a) \cdot \omega' \rangle + (-1)^i C(\psi(a) \cdot V^{n-1}\omega \cdot d\omega'). \end{aligned}$$

Puisque $W_n \Omega^\bullet$ est une algèbre strictement anticommutative, et que $\nabla_2(a)$ (resp. $V^{n-1}\omega$) est de degré 1 (resp. $i-1$), il vient

$$\langle \varphi \otimes V^{n-1}\omega, \nabla_2(a) \cdot \omega' \rangle = (-1)^{(i-1) \times 1} C[(\psi \otimes 1)(\nabla_2(a)) \cdot V^{n-1}\omega \cdot \omega'];$$

d'où il résulte

$$x = -C[(\psi \otimes 1)(\nabla_2(a)) \cdot V^{n-1}\omega \cdot \omega'] + (-1)^i C[\psi(a) \cdot V^{n-1}\omega \cdot d\omega'].$$

De même

$$\begin{aligned} y &= \langle \nabla_1(\varphi) \cdot V^{n-1}\omega + \varphi \otimes dV^{n-1}\omega, a \otimes \omega' \rangle \\ &= \langle \nabla_1(\varphi) \cdot V^{n-1}\omega, a \otimes \omega' \rangle + C(\psi(a) \cdot dV^{n-1}\omega \cdot \omega'). \end{aligned}$$

En notant h l'homomorphisme

$$h : \mathbf{D}(G)_n^\vee \otimes W_n \Omega^1 \longrightarrow \mathcal{H}om_{W_n \mathcal{O}}(\mathbf{D}(G)_n, W_n \Omega^1),$$

on a, par définition de l'accouplement, et compte tenu de (2.2.2.8) :

$$\begin{aligned} &\langle \nabla_1(\varphi) \cdot V^{n-1}\omega, a \otimes \omega' \rangle \\ &= C[(h(\gamma_n \otimes \text{Id})\nabla_1(\gamma))(a) \cdot V^{n-1}\omega \cdot \omega'] \\ &= C(d(\psi(a)) \cdot V^{n-1}\omega \cdot \omega') - C[(\psi \otimes 1)(\nabla_2(a))V^{n-1}\omega \cdot \omega']. \end{aligned}$$

Comme $V^{n-1}\omega$ est de degré $i-1$, et ω' de degré $m-i$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} y - x &= C \left[d(\psi(a)) \cdot V^{n-1}\omega \cdot \omega' + \psi(a) \cdot dV^{n-1}\omega \cdot \omega' \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{i-1}\psi(a) \cdot V^{n-1}\omega \cdot d\omega' \right] \\ &= Cd(\psi(a) \cdot V^{n-1}\omega \cdot \omega') \\ &= (-1)^{(i-1)(m-i)}Cd(\psi(a) \cdot \omega' \cdot V^{n-1}\omega) \\ &= (-1)^{(i-1)(m-i)}CdV^{n-1}[F^{n-1}(\psi(a) \cdot \omega') \cdot \omega] \quad [21, \text{I}, 2.18.4] \\ &= (-1)^{(i-1)(m-i)}pdCV^{n-1}[F^{n-1}(\psi(a) \cdot \omega') \cdot \omega] \quad [15, \text{I}, 4.2] \\ &= 0, \quad \text{puisque } p\Omega^{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Ce qui établit (3.1.3) et la commutativité de (3.1.1).

Par la \mathbf{Z} -linéarité des différentielles ∇_1 et ∇_2 , on en déduit un accouplement sur le noyau et le conoyau, qui est l'accouplement défini dans le lemme.

Le cas $G = G(1)$, $n = 1$, résulte de ce que $\mathbf{D}(G(1)^*)_1$ et $\mathbf{D}(G(1)^{t*})_1$ sont localement libres de type fini sur \mathcal{O}_X , de même que Ω_X^ℓ , puisque X est lisse sur S ; la non-dégénérescence est une conséquence de [24, 1.7]. \square

Soient X^\bullet , Y^\bullet , Z^\bullet les complexes introduits en 1.2; définissons à présent des accouplements biadditifs par :

$$(3.2) \quad \begin{cases} X^0 \times Y^0 \rightarrow Z^0 & : \langle \varphi \otimes \omega_1, a \otimes \omega_2 \rangle_{0,0}^0 = \psi(a)\omega_1\omega_2, \\ X^0 \times Y^1 \rightarrow Z^1 & : \langle \varphi \otimes \omega_1, a \otimes \omega_2 \rangle_{0,1}^1 = \psi(a)\omega_1\omega_2, \\ X^1 \times Y^0 \rightarrow Z^1 & : \overline{\langle \varphi \otimes \omega_1, a \otimes \omega_2 \rangle}_{1,0}^1 = C(\psi(a)\omega_1\omega_2), \end{cases}$$

avec $\psi = \gamma_n(\varphi)$, le dernier accouplement étant fourni par le LEMME (3.1), puisque $F^n(\mathbb{D}(G^{t*})_{2n} \otimes W_{2n}\Omega^{m-i}) \subset (\mathbb{D}(G^{t*})_n \otimes W_n\Omega^{m-i})_{\nabla=0}$ [15, II, 3.1.4.1], et que $F(\mathbb{D}(G^{t*})_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^{m-i}) = (\mathbb{D}(G^{t*})_n \otimes W_n\Omega^{m-i})_{\nabla=0}$ pour $n = 1$ (cf. [15, II, 3.1.6]).

Pour $G = G(1)$ et $n = 1$, ces accouplements sont bilinéaires pour les structures de \mathcal{O}_X -modules définis via $F : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$.

PROPOSITION 3.3. — *Les accouplements (3.2) définissent un accouplement de complexes*

$$X^\bullet \times Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet,$$

induisant un accouplement

$$\nu_n(G^*, i) \times \nu_n(G^{t*}, m - i) \longrightarrow \nu_n(m) \subset \tilde{\nu}_n(m).$$

Compte tenu de la biadditivité des accouplements (3.2), il nous suffit d'établir, qu'étant donnés

$$a' \in \mathbb{D}(G^{t*})_{2n}, \omega'_2 \in W_{2n}\Omega^{m-i}, \varphi \in \mathbb{D}(G^*)_n \quad \text{et} \quad \omega_1 \in W_n\Omega^i,$$

et en posant

$$a = F^n(a'), \omega_2 = F^n(\omega'_2), \psi = \gamma_n(\varphi),$$

on obtient

$$(3.3.1) \quad (C - 1)(\psi(a)\omega_1\omega_2) = \langle \varphi \otimes \omega_1, \tilde{C}(a \otimes \omega_2) - a \otimes \omega_2 \rangle_{0,1}^1 \\ + \langle \overline{\varphi \otimes \omega_1} - \tilde{F}(\varphi \otimes \omega_1), a \otimes \omega_2 \rangle_{1,0}^1.$$

En remarquant que $a \otimes \omega_2 = FF^{n-1}(a' \otimes \omega'_2)$, il résulte de [15, II, 3.4.3.1] que

$$\tilde{C}(a \otimes \omega_2) = RF^{n-1}(a' \otimes \omega'_2) = b \otimes C\omega_2, \quad \text{avec} \quad b = RF^{n-1}(a');$$

rappelons au passage que (cf. 2.1.2.3)

$$V_{\mathbb{D}(G)}(a) = \Phi_{\mathbb{D}(G^{t*})}^{-1}(a) = \Phi^{-1} \circ \Phi \circ W \circ R(F^{n-1}a') \\ = RF^{n-1}(a') \otimes 1 = b \otimes 1.$$

Avec ces notations on a donc

$$(3.3.2) \quad \langle \varphi \otimes \omega_1, \tilde{C}(a \otimes \omega_2) - a \otimes \omega_2 \rangle_{0,1}^1 = \psi(b)\omega_1 C\omega_2 - \psi(a)\omega_1\omega_2.$$

D'autre part, d'après la définition de \tilde{F} et si $\omega_1 = R\omega_0$, on a $\tilde{F}(\varphi \otimes \omega_1) = F_{\mathbb{D}(G^*)}(\varphi) \otimes F\omega_0 \bmod \nabla V^{n-1}(\mathbb{D}(G^*)_1 \otimes \Omega^{i-1})$, qu'on note

$\overline{F_{\mathbf{D}(G^*)}(\varphi) \otimes F\omega_0}$; ce qui donne, grâce à 3.1,

$$\begin{aligned} \langle \check{F}(\varphi \otimes \omega_1), a \otimes \omega_2 \rangle_{1,0}^1 &= \langle \overline{F_{\mathbf{D}(G^*)}(\varphi) \otimes F\omega_0}, a \otimes \omega_2 \rangle_{1,0}^1 \\ &= C[(\gamma_n(F_{\mathbf{D}(G^*)}(\varphi)))(a) \cdot F\omega_0 \cdot \omega_2] \\ &= C[F_{W_n\mathcal{O}}(\psi(b)) \cdot F\omega_0 \cdot \omega_2] \\ &\quad \text{(cf. 2.2.1.6 et 2.2.2.7)} \\ &= \psi(b) \cdot \omega_1 \cdot C\omega_2. \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$(3.3.3) \quad \langle \overline{\varphi \otimes \omega_1} - \check{F}(\varphi \otimes \omega_1), a \otimes \omega_2 \rangle_{1,0}^1 = C(\psi(a)\omega_1\omega_2) - \psi(b)\omega_1 C\omega_2.$$

La relation (3.3.1) résulte de (3.3.2) et (3.3.3). D'où 3.3, 1.2 et (1.1.1). \square

4. Compatibilités. — Nous allons montrer, dans ce paragraphe, l'indépendance de l'accouplement (1.1.1) par rapport à l'entier n tel que $p^n G = 0$, i.e. montrer les commutativités de (1.1.2) et (1.1.3). On rappelle que pour un faisceau abélien \mathcal{F} sur $\text{CRIS}(X/W_n)$ on note en abrégé : $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{(X, W_n(X))} = \mathcal{F}_{W_n(X)}$. Définissons tout d'abord une application

$$\underline{p} : \mathbf{D}(G)_n^\sim \longrightarrow \mathbf{D}(G)_{n+1}^\sim.$$

D'après [1, IV, 2.4.1] on sait que $\mathbf{D}(G)_n^\sim$ est isomorphe à

$$\mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}}(\mathbf{D}(G)_n, W_n\mathcal{O}).$$

Puisque $\mathbf{D}(G)$ est un cristal, le morphisme

$$i : (X, W_n(X)) \rightarrow (X, W_{n+1}(X))$$

induit un isomorphisme

$$\mathbf{D}(G)_{n+1} \otimes_{W_{n+1}\mathcal{O}} W_n\mathcal{O} = i^*(\mathbf{D}(G)_{n+1}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}(G)_n;$$

d'où une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(G)_n^\sim &\simeq \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}}(\mathbf{D}(G)_n, W_n\mathcal{O}) \\ &\simeq \mathcal{H}om_{W_n\mathcal{O}}(\mathbf{D}(G)_{n+1} \otimes_{W_{n+1}\mathcal{O}} W_n\mathcal{O}, W_n\mathcal{O}) \\ &\simeq \mathcal{H}om_{W_{n+1}\mathcal{O}}(\mathbf{D}(G)_{n+1}, W_n\mathcal{O}). \end{aligned}$$

Si l'on compose l'isomorphisme $\mathbb{D}(G)_n^\sim \simeq \text{Hom}_{W_{n+1}\mathcal{O}}(\mathbb{D}(G)_{n+1}, W_n\mathcal{O})$ avec le morphisme

$$\underline{p} : \text{Hom}_{W_{n+1}\mathcal{O}}(\mathbb{D}(G)_{n+1}, W_n\mathcal{O}) \longrightarrow \text{Hom}_{W_{n+1}\mathcal{O}}(\mathbb{D}(G)_{n+1}, W_{n+1}\mathcal{O}),$$

induit par functorialité par l'application $\underline{p} : W_n\mathcal{O} \rightarrow W_{n+1}\mathcal{O}$ [21, I, 3.4], on obtient la flèche demandée :

$$(4.1) \quad \underline{p} : \mathbb{D}(G)_n^\sim \longrightarrow \mathbb{D}(G)_{n+1}^\sim.$$

Notons que cette dernière flèche \underline{p} est clairement définie sans faire l'hypothèse $p^n G = 0$.

LEMME 4.2. — *Le carré suivant, où $n \in \mathbb{N}$ est tel que $p^n \cdot G = 0$, commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(G^*)_n & \xrightarrow{\gamma_n} & \mathbb{D}(G)_n^\sim \\ \uparrow R & & \downarrow \underline{p} \\ \mathbb{D}(G^*)_{n+1} & \xrightarrow{\gamma_{n+1}} & \mathbb{D}(G)_{n+1}^\sim \end{array}$$

Pour la démonstration, nous allons décomposer le carré de 4.2 en le diagramme (4.2.0) de la page suivante (certaines flèches restent à définir!) et montrer que les différents carrés ((1), (3), (4), (6)) et triangles ((2), (5)) commutent; le lemme en résultera.

Carré (1). — Les flèches

$$(4.2.1) \quad R : \mathbb{D}(G^*)_{n+1} = \text{Ext}_{X/W_{n+1}}^1(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_{n+1}})_{n+1} \longrightarrow \text{Ext}_{X/W_{n+1}}^1(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)_{n+1}$$

$$(4.2.2) \quad \underline{p} : \text{Hom}_{X/W_{n+1}}(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)_{n+1} \longrightarrow \text{Hom}_{X/W_{n+1}}(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_{n+1}})_{n+1}$$

sont induites par la factorisation canonique de la multiplication par p sur $\mathcal{O}_{X/W_{n+1}}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X/W_{n+1}} & \xrightarrow{p} & \mathcal{O}_{X/W_{n+1}} \\ \searrow R & & \nearrow \underline{p} \\ & \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n \mathcal{O}_{X/W_{n+1}} & \end{array}$$

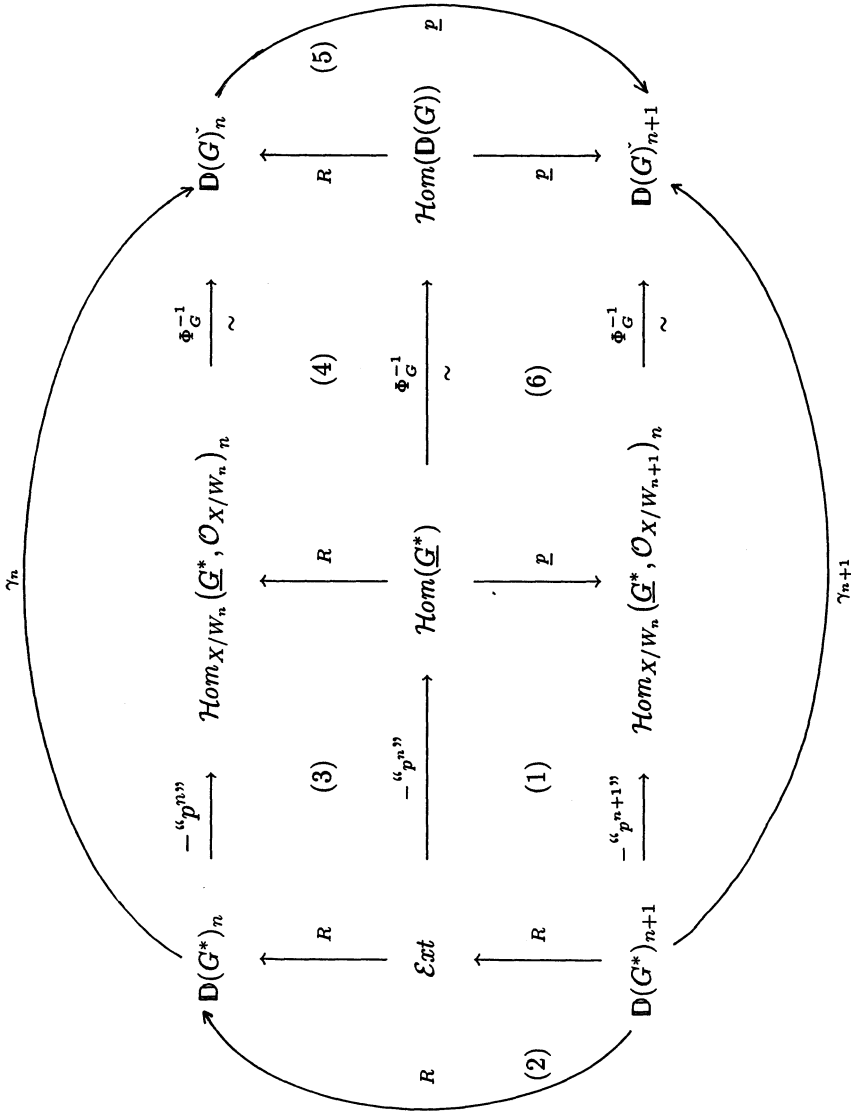


Diagramme (4.2.0)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}xt &= \mathcal{E}xt_{X/W_{n+1}}^1(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)_{n+1} \\ \mathcal{H}om(\underline{G}^*) &= \mathcal{H}om_{X/W_{n+1}}(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)_{n+1} \\ \mathcal{H}om(\mathcal{D}(G)) &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X/W_{n+1}}(\mathcal{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)_{n+1}\end{aligned}$$

Les applications " p^n " et " p^{n+1} " étant définies comme en [4, p. 174] (cf. ci-dessous), il s'agit, pour montrer la commutativité du carré (1), de vérifier que, si A , B_n et B_{n+1} sont des groupes abéliens annulés respectivement par p^n , p^n et p^{n+1} (avec $B_n = B_{n+1}/p^n B_{n+1}$), alors le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}xt_{\mathbf{Z}}^1(A, B_n) & \xrightarrow{\text{"}p^n\text{"}} & \mathcal{H}om_{\mathbf{Z}}(A, B_n) \\ \uparrow R \wr & & \downarrow \underline{p} \\ \mathcal{E}xt_{\mathbf{Z}}^1(A, B_{n+1}) & \xrightarrow{\text{"}p^{n+1}\text{"}} & \mathcal{H}om_{\mathbf{Z}}(A, B_{n+1}). \end{array}$$

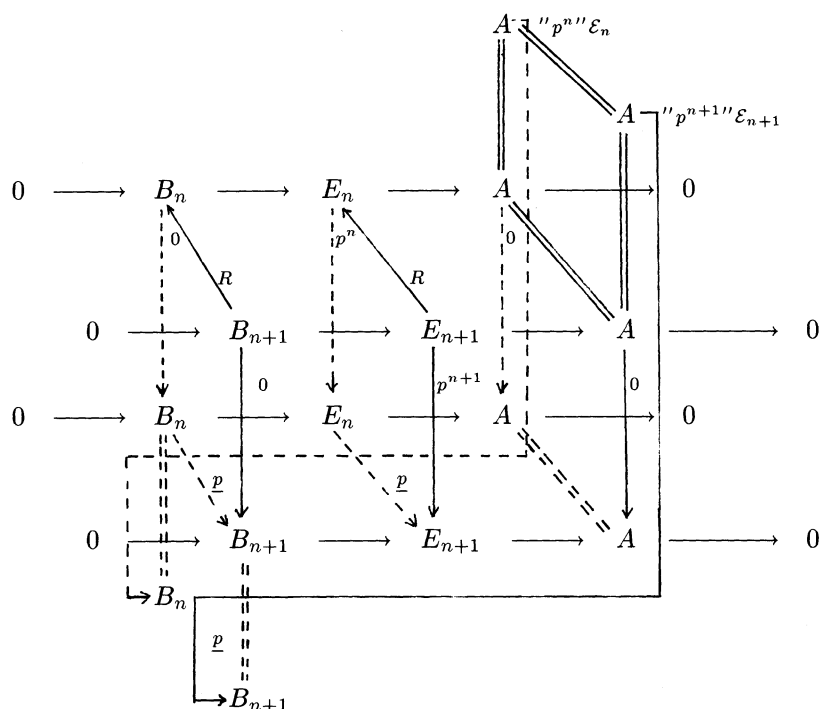
Comme " p^n " peut se décrire [4, p. 174] comme l'application associant à la classe d'une extension

$$\mathcal{E}_n : 0 \longrightarrow B_n \longrightarrow E_n \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

l'homomorphisme $A \rightarrow B_n$ donné par le diagramme du serpent relatif à la multiplication par p^n sur \mathcal{E}_n , l'assertion résulte de la commutativité du diagramme à lignes exactes de la page suivante puisque le triangle

$$\begin{array}{ccc} & E_n \simeq E_{n+1}/p^n B_{n+1} & \\ R \nearrow & & \searrow \underline{p} \\ E_{n+1} & \xrightarrow{p} & E_{n+1} \end{array}$$

commute.



Carré (3). — La construction des homomorphismes " p^n " ne posant pas de problème [4, p. 173], définissons les flèches verticales du carré (3). Le morphisme de topos cristallins

$$i_{\text{CRIS}} : (X/W_n)_{\text{CRIS}} \longrightarrow (X/W_{n+1})_{\text{CRIS}}$$

donne, pour tout faisceau abélien \mathcal{G} sur $\text{CRIS}(X/W_n)$, la relation

$$(4.2.3) \quad (i_{\text{CRIS}}^*(\mathcal{G}))_{W_{n+1}(X)} = \mathcal{G}_{W_{n+1}(X)/p^n W_{n+1}(X)},$$

où $W_{n+1}(X)/p^n W_{n+1}(X)$ désigne le schéma $(|X|, W_{n+1}\mathcal{O}/p^n W_{n+1}\mathcal{O})$. Pour tout faisceau abélien \mathcal{F} sur $\text{CRIS}(X/W_{n+1})$, le morphisme canonique

$$\mathcal{F} \longrightarrow i_{\text{CRIS}*} i_{\text{CRIS}}^*(\mathcal{F})$$

fournit, au-dessus de l'objet $(X, W_{n+1}(X))$, des morphismes

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt_{X/W_{n+1}}^i(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)_{W_{n+1}(X)} &\longrightarrow \\ &\longrightarrow (i_{\text{CRIS}}^*(\mathcal{E}xt_{X/W_{n+1}}^i(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)))_{W_{n+1}(X)/p^n}. \end{aligned}$$

Par composition avec l'homomorphisme canonique [4, 1.3.3.2]

$$\begin{aligned} & \left(i_{\text{CRIS}}^* (\mathcal{E}xt_{X/W_{n+1}}^i(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)) \right)_{W_{n+1}(X)/p^n} \longrightarrow \\ & \longrightarrow \mathcal{E}xt_{X/W_n}^i(\underline{G}^*, i_{\text{CRIS}}^*(\mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n))_{W_{n+1}(X)/p^n}, \end{aligned}$$

l'isomorphisme déduit de $i_{\text{CRIS}}^*(\mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n) \simeq \mathcal{O}_{X/W_n}$, et la restriction

$$R : \mathcal{E}xt_{X/W_n}^i(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_n})_{W_{n+1}(X)/p^n} \longrightarrow \mathcal{E}xt_{X/W_n}^i(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_n})_{W_n(X)},$$

déduite du morphisme $W_n(X) \rightarrow W_{n+1}(X)/p^n$, on obtient les flèches souhaitées :

$$\begin{aligned} (4.2.4) \quad R : \mathcal{E}xt_{X/W_{n+1}}^1(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)_{W_{n+1}(X)} &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \mathcal{E}xt_{X/W_n}^1(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_n})_{W_n(X)} = \mathbb{D}(G^*)_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4.2.5) \quad R : \mathcal{H}om_{X/W_{n+1}}(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)_{W_{n+1}(X)} &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \mathcal{H}om_{X/W_n}(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_n})_{W_n(X)}. \end{aligned}$$

Avec ces définitions, il est immédiat que le carré (3) commute.

Triangle (2). — La restriction $R : \mathbb{D}(G^*)_{n+1} \rightarrow \mathbb{D}(G^*)_n$, dont la définition est évidente, est visiblement la composée de (4.2.1) et (4.2.4), ce qui assure la commutativité de (2).

Carré (4). — Définissons tout d'abord la flèche verticale de droite du carré (4). Puisque i_{CRIS} est un morphisme de topos annelés [1, III, Remarque 3.3.3]

$$i_{\text{CRIS}} : ((X/W_n)_{\text{CRIS}}, \mathcal{O}_{X/W_n}) \longrightarrow ((X/W_{n+1})_{\text{CRIS}}, \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}),$$

l'isomorphisme d'adjonction [SGA 4, IV, 13.4.2] fournit, grâce à (4.2.3), un isomorphisme

$$\begin{aligned} (4.2.6) \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W_{n+1}}}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)_{W_{n+1}(X)} &\simeq \\ &\simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W_n}}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_n})_{W_{n+1}(X)/p^n}, \end{aligned}$$

qui, par composition avec la restriction canonique

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W_n}}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_n})_{W_{n+1}(X)/p^n} &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W_n}}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_n})_{W_n(X)}, \end{aligned}$$

fournit la flèche demandée :

$$(4.2.7) \quad R : \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W_{n+1}}}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)_{n+1} \longrightarrow \mathbb{D}(G)_n^\vee.$$

Définissons maintenant la flèche horizontale inférieure du carré (4). L'isomorphisme de dualité [4, 5.2.7.1]

$$\Phi_G : \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W_n}}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_n}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W_n}}(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_n})$$

est le composé (cf. [4, 5.2.4] de l'application canonique

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W_n}}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_n}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{X/W_n}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_n})$$

et de l'application

$$\mathcal{H}om(\rho_G, \mathcal{O}_{X/W_n}) : \mathcal{H}om_{X/W_n}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_n}) \rightarrow \mathcal{H}om_{X/W_n}(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_n})$$

induite par le morphisme [4, 5.2.1.6]

$$\rho_G : \underline{G}^* \longrightarrow \mathbb{D}(G).$$

Avec ce rappel, il est alors clair que le carré suivant commute :

$$(4.2.8) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xleftarrow[\sim]{\Phi_G} & \mathcal{Q} \\ \text{adjonction} \downarrow \wr & & \downarrow \wr \text{adjonction} \\ \mathcal{R} & \xleftarrow[\mathcal{H}om(\rho_G, -) \circ \text{can}]{} & \mathcal{S}, \end{array}$$

où, pour simplifier, on a posé :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{H}om_{X/W_n}(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_n})_{W_{n+1}(X)/p^n} \\ \mathcal{Q} &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W_n}}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_n})_{W_{n+1}(X)/p^n} \\ \mathcal{R} &= \mathcal{H}om_{X/W_{n+1}}(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)_{W_{n+1}(X)} \\ \mathcal{S} &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W_{n+1}}}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)_{W_{n+1}(X)} \end{aligned}$$

ce qui implique, en particulier, que la flèche horizontale inférieure est un isomorphisme; son inverse, noté encore Φ_G^{-1} , sera la flèche horizontale inférieure du carré (4).

Puisque le carré (4) est obtenu en combinant le carré (4.2.8) et le carré commutatif

$$(4.2.9) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow[\sim]{\Phi_G^{-1}} & \mathbb{D}(G)_n^\vee \\ \uparrow R & & \uparrow R \\ \mathcal{N} & \xrightarrow[\sim]{\Phi_G^{-1}} & \mathcal{O}, \end{array}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{H}om_{X/W_n}(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_n})_{W_n(X)} \\ \mathcal{N} &= \mathcal{H}om_{X/W_n}(\underline{G}^*, \mathcal{O}_{X/W_n})_{W_{n+1}(X)/p^n} \\ \mathcal{O} &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W_n}}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_n})_{W_{n+1}(X)/p^n}, \end{aligned}$$

ceci assure sa commutativité.

Triangle (5) et carré (6). — On définit l'application

$$(4.2.10) \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W_{n+1}}}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n)_{n+1} \longrightarrow \xrightarrow{p} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X/W_{n+1}}}(\mathbb{D}(G), \mathcal{O}_{X/W_{n+1}})_{n+1} = \mathbb{D}(G)_{n+1}^\vee$$

comme étant induite par $p : \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}/p^n \rightarrow \mathcal{O}_{X/W_{n+1}}$. Il est immédiat de vérifier que (4.2.10) est la composée de (4.2.7) et (4.1), d'où la commutativité de (5). La commutativité de (6) est aussi évidente.

Ceci achève la démonstration de 4.2. \square

4.3. — Vérifions maintenant la commutativité du diagramme d'accouplements :

$$(1.1.2) \quad \begin{array}{ccc} R^1\alpha_*(G) \times R^1\alpha_*(G^t) & \longrightarrow & \nu_n(2) \\ \parallel & & \downarrow p \\ R^1\alpha_*(G) \times R^1\alpha_*(G^t) & \longrightarrow & \nu_{n+1}(2). \end{array}$$

Compte tenu de la commutativité du diagramme (cf. [15, III, 2.6])

$$\begin{array}{ccc}
 R^1\alpha_*(G) \times R^1\alpha_*(G^t) & \xrightarrow{\varepsilon_n \times \varepsilon_n} & \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \\
 \parallel & & \uparrow F \quad \uparrow F \\
 R^1\alpha_*(G) \times R^1\alpha_*(G^t) & \xrightarrow{\varepsilon_{n+1} \times \varepsilon_{n+1}} & \mathcal{R} \times \mathcal{S},
 \end{array}$$

où l'on a posé, pour une question de place,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= \mathbb{D}(G^*)_n \otimes W_n\Omega^1 & \mathcal{Q} &= \mathbb{D}(G^{t*})_n \otimes W_n\Omega^1 \\
 \mathcal{R} &= \mathbb{D}(G^*)_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^1 & \mathcal{S} &= \mathbb{D}(G^{t*})_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^1,
 \end{aligned}$$

de l'isomorphisme $\text{Im } \varepsilon_n \simeq \nu_n(E, 1)$ (aussi bien pour $E = \mathbb{D}(G^*)$ que pour $E = \mathbb{D}(G^{t*})$ [15, III, 2.6]) et de ce que $R = F$ sur $\nu_n(E, 1)$ [15, III, 2.6.3], il suffit de montrer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{D}(G^*)_n \otimes W_n\Omega^1 \times \mathbb{D}(G^{t*})_n \otimes W_n\Omega^1 & \longrightarrow & W_n\Omega^2 \\
 \uparrow R & & \downarrow \underline{p} \\
 \mathbb{D}(G^*)_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^1 \times \mathbb{D}(G^{t*})_{n+1} \otimes W_{n+1}\Omega^1 & \longrightarrow & W_{n+1}\Omega^2,
 \end{array}$$

où l'accouplement des lignes supérieure et inférieure est défini par

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi' \otimes \omega'_1, a' \otimes \omega'_2 \rangle &= (\gamma_n(\varphi'))(a')\omega'_1\omega'_2, \\
 \langle \varphi \otimes \omega_1, a \otimes \omega_2 \rangle &= (\gamma_{n+1}(\varphi))(a)\omega_1\omega_2.
 \end{aligned}$$

Supposons que $\varphi' = R\varphi$, $\omega'_1 = R\omega_1$, $a' = Ra$, $\omega'_2 = R\omega_2$; il faut établir l'égalité :

$$(4.3.1) \quad (\gamma_{n+1}(\varphi))(a)\omega_1\omega_2 = \underline{p}\left[(\gamma_n(\varphi'))(a') \cdot R(\omega_1\omega_2)\right].$$

Le second membre de (4.3.1) est égal à $(\underline{p}[(\gamma_n(\varphi'))(a')]) \cdot \omega_1\omega_2$, où cette fois \underline{p} est l'application $\underline{p} : W_n\mathcal{O} \rightarrow W_{n+1}\mathcal{O}$. On est ramené à montrer l'égalité

$$(\gamma_{n+1}(\varphi))(a) = \underline{p}\left[(\gamma_n(\varphi'))(a')\right], \quad \text{avec } \underline{p} : W_n\mathcal{O} \longrightarrow W_{n+1}\mathcal{O}.$$

Par le LEMME 4.2, on sait que $\gamma_{n+1}(\varphi) = \underline{p}\gamma_n(\varphi')$, avec $\underline{p} : \mathbb{D}(G)_n^\vee \rightarrow \mathbb{D}(G)_{n+1}^\vee$, et il est clair que

$$(\underline{p}\gamma_n(\varphi'))(a) = \underline{p}(\gamma_n(\varphi')(a')).$$

D'où (4.3.1), ce qui achève la démonstration de (1.1.2). \square

4.4. — Reste à vérifier la commutativité de (1.1.3). On vient, en prenant $G = H(n)$ en 4.3, d'établir la commutativité de :

$$\begin{array}{ccc} R^1\alpha_*(H(n)) \times R^1\alpha_*(H^t(n)) & \longrightarrow & \nu_n(2) \\ \parallel & & \downarrow \underline{p} \\ R^1\alpha_*(H(n)) \times R^1\alpha_*(H^t(n)) & \longrightarrow & \nu_{n+1}(2). \end{array}$$

Il suffit donc de montrer la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} R^1\alpha_*(H(n)) \times R^1\alpha_*(H^t(n)) & \longrightarrow & \nu_{n+1}(2) \\ \downarrow i & \uparrow p & \parallel \\ R^1\alpha_*(H(n+1)) \times R^1\alpha_*(H^t(n+1)) & \longrightarrow & \nu_{n+1}(2), \end{array}$$

ce qui résulte de la fonctorialité en G de (1.1.1) (cf. [15, III, 1.9]). \square

2. Théorèmes de dualité

0. — Dans ce chapitre X désigne un schéma propre et lisse de dimension m sur $S = \text{Spec } k$, où k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, et G (resp. H) un p -groupe fini localement libre (resp. un groupe p -divisible de hauteur h) de type multiplicatif sur X .

1. **Rappels sur la cohomologie fppf.** — On utilise les notations de [15, III, 3.1], si bien qu'on désignera encore par α le morphisme de topos

$$(1.1) \quad X_{\text{fppf}} \xrightarrow{\alpha} (X/S)_{\text{parf}},$$

et par π le morphisme de topos

$$(X/S)_{\text{parf}} \xrightarrow{\pi} S_{\text{parf}}.$$

Rappelons [15] que l'on note $\mathcal{G}(p^n)$ la catégorie des S -groupes parfaits algébriques affines annulés par p^n , $\mathcal{G}(p^\infty) = \bigcup_n \mathcal{G}(p^n)$, \mathcal{F} la catégorie des faisceaux abéliens de S_{parf} , $\mathcal{F}(p^n)$ la sous-catégorie pleine des faisceaux annulés par p^n , et $D^b(\mathcal{G}(p^\infty))$ la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée $D(\mathcal{F})$, formée des complexes bornés dont la cohomologie est dans $\mathcal{G}(p^\infty)$.

Les résultats suivants sur le morphisme trace en cohomologie fppf sont extraits de [2] où nos faisceaux $\tilde{\nu}_n(i)$ (cf. I, 0) sont notés $\nu_n(i)$.

(1.2) Pour tout $n \geq 1$ et tout $q > m$, $R^q \pi_*(\tilde{\nu}_n(m)) = 0$.

(1.3) Il existe un système projectif d'épimorphismes

$$\eta_n : R^m \pi_*(\tilde{\nu}_n(m)) \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z},$$

jouant, en cohomologie fppf, le rôle d'un morphisme trace.

(1.4) Pour tout $n \geq 1$ et tout $i \geq 0$, l'homomorphisme $\underline{p} : W_n \Omega^i \rightarrow W_{n+1} \Omega^i$ induit un homomorphisme $\underline{p} : \tilde{\nu}_n(i) \rightarrow \tilde{\nu}_{n+1}(i)$, et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R^m \pi_*(\tilde{\nu}_n(m)) & \xrightarrow{\eta_n} & \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \\ \underline{p} \downarrow & & \downarrow p \\ R^m \pi_*(\tilde{\nu}_{n+1}(m)) & \xrightarrow{\eta_{n+1}} & \mathbb{Z}/p^{n+1} \mathbb{Z} \end{array}$$

est commutatif.

2. Dualité plate pour G et dualité étale pour les $\nu_n(E, i)$.

2.1. *Cas des surfaces.* — On suppose $m = 2$. Compte tenu de l'inclusion $\nu_n(i) \subset \tilde{\nu}_n(i)$, la proposition (I, 1.1) définit un accouplement de faisceaux de $(X/S)_{\text{parf}}$

$$R^1 \alpha_*(G(n)) \times R^1 \alpha_*(G(n)^t) \longrightarrow \tilde{\nu}_n(2),$$

avec les mêmes diagrammes de compatibilité que dans (I, 1.1), et où α est le morphisme (1.1). Projétant ces accouplements sur S_{parf} par le foncteur $\mathbb{R}\pi_*$, on obtient un système compatible d'accouplements

$$\mathbb{R}\pi_* \left(R^1 \alpha_*(G(n)) \right) \otimes_{\mathbb{Z}/p^n} \mathbb{R}\pi_* \left(R^1 \alpha_*(G(n)^t) \right) \longrightarrow \mathbb{R}\pi_*(\tilde{\nu}_n(2)).$$

Par composition avec le morphisme trace η_n , on en déduit

$$\mathbb{R}\pi_* \left(R^1\alpha_*(G(n)) \right) \otimes_{\mathbb{Z}/p^n}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\pi_* \left(R^1\alpha_*(G(n)^t) \right) \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n[-2],$$

qu'on peut aussi considérer comme un accouplement

$$(2.1.1) \quad \mathbb{R}\pi_* \left(R^1\alpha_*(G(n)) \right) \otimes_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\pi_* \left(R^1\alpha_*(G(n)^t) \right) \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[-2].$$

Le théorème de dualité pour les surfaces prend alors la forme suivante :

THÉORÈME DE DUALITÉ 2.1.2. — *Les accouplements (2.1.1) induisent un système compatible d'isomorphismes*

$$\theta_n : \mathbb{R}\pi_* \left(R^1\alpha_*(G(n)) \right) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{F}} \left(\mathbb{R}\pi_* \left(R^1\alpha_*(G(n)^t) \right), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right)[-2],$$

que l'on peut interpréter comme un système compatible d'isomorphismes

$$\theta_n : \mathbb{R}\pi'_*(G(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{F}} \left(\mathbb{R}\pi'_*(G(n)^t), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right)[-4],$$

avec $\pi' = \pi \circ \alpha : X_{\mathrm{fppf}} \rightarrow S_{\mathrm{parf}}$. En particulier pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $p^n G = 0$, on a un isomorphisme

$$\theta_n : \mathbb{R}\pi'_*(G) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{F}} \left(\mathbb{R}\pi'_*(G^t), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right)[-4].$$

Des suites exactes de la forme

$$0 \longrightarrow R^1\alpha_*(G(n)) \longrightarrow R^1\alpha_*(G(n+1)) \xrightarrow{p^n} R^1\alpha_*(p^n G(n+1)) \longrightarrow 0,$$

on déduit le prisme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{P} & & \\
 & \swarrow +1 & \downarrow & \nwarrow p^n & \\
 Q & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{R} \\
 \downarrow \theta_n & & \downarrow & & \downarrow \theta_{n+1} \\
 S & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & T \\
 & \swarrow +1 & \downarrow & \nwarrow & \\
 & & \mathcal{U} & &
 \end{array}$$

où l'on a posé, pour des raisons d'encombrement,

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \mathbb{R}\pi_* \left(R^1 \alpha_* (p^n G(n+1)) \right) \\ \mathcal{Q} &= \mathbb{R}\pi_* \left(R^1 \alpha_* (G(n)) \right) \\ \mathcal{R} &= \mathbb{R}\pi_* \left(R^1 \alpha_* (G(n+1)) \right) \\ \mathcal{S} &= \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{F}} \left(\mathbb{R}\pi_* (R^1 \alpha_* (G(n)^t)), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right) [-2] \\ \mathcal{T} &= \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{F}} \left(\mathbb{R}\pi_* (R^1 \alpha_* (G(n+1)^t)), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right) [-2] \\ \mathcal{U} &= \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{F}} \left(\mathbb{R}\pi_* (R^1 \alpha_* (p^n G(n+1)^t)), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right) [-2].\end{aligned}$$

On est donc ramené au cas $G = G(1)$ et $n = 1$, qui est identique au cas d'un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1.

Supposons jusqu'à la fin du 2) que H est un groupe p -divisible de type multiplicatif sur X et que $E = \mathbb{D}(H^*)$; d'après [I, (2.1.1) et (2.2.1.2)] on a $\mathbb{D}(H^{t*}) \simeq E^\vee$. Le théorème découlera d'un énoncé plus général sur les images directes des faisceaux $\nu_n(H^*, i) = \nu_n(E, i)$ et $\nu_n(H^{t*}, m-i) \simeq \nu_n(E^\vee, m-i)$ puisque [15, III, 2.5 et 2.6]

$$\begin{aligned}R^1 \alpha_* (H(n)) &\xrightarrow[\sim]{\varepsilon_n} \nu_n(H^*, 1) \\ R^1 \alpha_* (H^t(n)) &\xrightarrow[\sim]{\varepsilon_n} \nu_n(H^{t*}, 1)\end{aligned}$$

sont des isomorphismes.

2.2. On suppose à nouveau m quelconque.

THÉORÈME 2.2.1. — Pour tout $i \geq 0$ l'accouplement

$$(2.2.1.1) \quad \mathbb{R}\pi_* (\nu_n(E, i)) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}/p^n} \mathbb{R}\pi_* (\nu_n(E^\vee, m-i)) \longrightarrow \mathbb{R}\pi_* (\tilde{\nu}_n(m)) \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n[-m],$$

obtenu à partir de (I, 3.3) et du morphisme trace, induit un isomorphisme

$$(2.2.1.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\pi_* (\nu_n(E, i)) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{F}(p^n)} \left(\mathbb{R}\pi_* (\nu_n(E^\vee, m-i)), \mathbb{Z}/p^n \right) [-m] \\ & & \downarrow \wr \\ & & \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{F}} \left(\mathbb{R}\pi_* (\nu_n(E^\vee, m-i)), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right) [-m]. \end{array}$$

Le dernier isomorphisme résulte de MILNE [24, 5.2].

Compte tenu des suites exactes [15, III, 2.8]

$$(2.2.1.3) \quad 0 \longrightarrow \nu_s(E, i) \xrightarrow{p^n} \nu_{s+n}(E, i) \xrightarrow{R^s} \nu_n(E, i) \longrightarrow 0,$$

et de même pour E^\vee , on est ramené au cas $n = 1$. Comme l'accouplement (2.2.1.1) se réalise par l'accouplement de complexes (cf. I, 3.3 et 1.3) $X^\bullet \times Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet$, il nous suffit de prouver que les accouplements

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}\pi_*(E_1 \otimes \Omega^i)[-1] \otimes_{\mathbb{Z}/p}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\pi_*(E_1^\vee \otimes \Omega^{m-i}) \longrightarrow \mathbb{R}\pi_*(Z^\bullet) \longrightarrow \mathbb{Z}/p[-m], \\ \mathbb{R}\pi_*\left(F_*[E_1 \otimes \Omega^i/\nabla(E_1 \otimes \Omega^{i-1})]\right)[-1] \otimes_{\mathbb{Z}/p}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}\pi_*\left(F_*[(E_1^\vee \otimes \Omega^{m-i})_{\nabla=0}]\right) \\ \downarrow \\ \mathbb{R}\pi_*(Z^\bullet) \longrightarrow \mathbb{Z}/p[-m] \end{array}$$

sont des dualités parfaites dans $D(\mathcal{F}(p))$. Grâce à (I, 3.1) et au fait que les \mathcal{O}_X -modules E_1 , Ω^i et Ω^{m-i} sont localement libres de type fini, cela résultera du lemme suivant :

LEMME 2.2.2. [24, 2.5]; [6, 1.8]. — Soient \mathcal{L} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini, $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. L'accouplement naturel

$$\mathcal{L} \times (\mathcal{L}^\vee \otimes \Omega_X^m) \longrightarrow (\Omega_X^m \xrightarrow{C-1} \Omega_X^m)[1] = \nu_1(m)[1]$$

et le morphisme trace η_1 , donnent un isomorphisme

$$\mathbb{R}\pi_*(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{F}(p)}(\mathbb{R}\pi_*(\mathcal{L}^\vee \otimes \Omega_X^m), \mathbb{Z}/p)[-m+1].$$

D'où le THÉORÈME 2.2.1 et le THÉORÈME DE DUALITÉ 2.1.2. \square

3. Conséquences. — On rappelle que G est un p -groupe fini localement libre de type multiplicatif sur X et que E est un F -cristal unité (i.e. $E \simeq \mathbb{D}(H')$ où H' est un groupe p -divisible étale sur X).

Dualité pour les faisceaux de cohomologie. — Du fait que la base est le spectre d'un corps parfait k , le théorème [15, III. 3.1.5] permet de préciser les théorèmes de dualité 2.1.2 et 2.2.1 au niveau des faisceaux de cohomologie. Notons $\mathbf{H}^j(X, G)$ (resp. $\mathbf{H}^j(X, \nu_n(E, i))$) le k -schéma en groupes parfait algébrique représentant le faisceau $R^{j-1}\pi_*(R^1\alpha_*(G)) =$

$\mathcal{H}^j(\mathbb{R}\pi'_*(G))$ (resp. $R^j\pi_*(\nu_n(E, i))$), $\mathbf{U}^j(X, G)$ (resp. $\mathbf{U}^j(X, \nu_n(E, i))$) sa composante connexe et $\mathbf{D}^j(X, G)$ (resp. $\mathbf{D}^j(X, \nu_n(E, i))$) le groupe étale $\mathbf{H}^j(X, G)/\mathbf{U}^j(X, G)$ (resp. $\mathbf{H}^j(X, \nu_n(E, i))/\mathbf{U}^j(X, \nu_n(E, i))$).

Pour $\mathbf{U} \in \mathcal{O}b(\mathcal{G}(p^\infty))$ et connexe on pose

$$\mathbf{U}^D := \mathcal{E}xt_{\mathcal{F}}^1(\mathbf{U}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p);$$

dans chacun des deux cas ci-dessus on a en plus

$$(\mathbf{U}^j)^D \simeq \mathcal{H}om_{W_n(k)}(\mathbf{U}^j, W_n(k))$$

[2, 2.5 ii b)]. Pour $\mathbf{D} \in \mathcal{O}b(\mathcal{G}(p^\infty))$ et étale on pose

$$\mathbf{D}^\sim := \mathcal{H}om_{\mathcal{F}}(\mathbf{D}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

Le THÉORÈME [2, 2.6] nous fournit respectivement les deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow (\mathbf{U}^{5-j}(X, G))^D &\rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{F}}^{j-4}(\mathbb{R}\pi'_*(G), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \rightarrow (\mathbf{D}^{4-j}(X, G))^\sim \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathbf{U}^{m+1-j}(X, \nu_n(E^\sim, m-i))^D &\rightarrow \\ &\mathcal{E}xt_{\mathcal{F}}^{j-m}(\mathbb{R}\pi_*(\nu_n(E^\sim, m-i)), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \\ &\rightarrow (\mathbf{D}^{m-j}(X, \nu_n(E^\sim, m-i)))^\sim \rightarrow 0, \end{aligned}$$

qui, combinées avec le théorème de dualité 2.1.2

$$\mathbf{H}^j(X, G^t) \simeq \mathcal{E}xt_{\mathcal{F}}^{j-4}(\mathbb{R}\pi'_*(G), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

et le théorème de dualité 2.2.1

$$\mathbf{H}^j(X, \nu_n(E, i)) \simeq \mathcal{E}xt_{\mathcal{F}}^{j-m}(\mathbb{R}\pi_*(\nu_n(E^\sim, m-i)), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p),$$

impliquent les COROLLAIRES 3.1 et 3.2 :

COROLLAIRE 3.1. — *Si X est une surface propre et lisse sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, le groupe $\mathbf{U}^j(X, G^t)$ s'identifie au "dual linéaire" de $\mathbf{U}^{5-j}(X, G)$ et $\mathbf{D}^j(X, G^t)$ au dual de Pontryagin de $\mathbf{D}^{4-j}(X, G)$:*

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^j(X, G^t) &\simeq (\mathbf{U}^{5-j}(X, G))^D, \\ \mathbf{D}^j(X, G^t) &\simeq (\mathbf{D}^{4-j}(X, G))^\sim. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 3.2. — *Si X est un schéma propre et lisse de dimension m sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, le groupe*

$\mathbf{U}^j(X, \nu_n(E, i))$ s'identifie au "dual linéaire" de $\mathbf{U}^{m+1-j}(X, \nu_n(E^\vee, m-i))$ et $\mathbf{D}^j(X, \nu_n(E, i))$ au dual de Pontryagin de $\mathbf{D}^{m-j}(X, \nu_n(E^\vee, m-i))$:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^j(X, \nu_n(E, i)) &\simeq \left(\mathbf{U}^{m+1-j}(X, \nu_n(E^\vee, m-i)) \right)^D, \\ \mathbf{D}^j(X, \nu_n(E, i)) &\simeq \left(\mathbf{D}^{m-j}(X, \nu_n(E^\vee, m-i)) \right)^\vee.\end{aligned}$$

Dans la suite on notera

$$H^j(X_{\text{ét}}, \hat{\nu}(E, i)) := \varprojlim_n H^j(X_{\text{ét}}, \nu_n(E, i)).$$

Cas où la base est un corps fini. — Le théorème de dualité 2.2.1 fournit dans ce cas une dualité au niveau des groupes de cohomologie. D'après BERTHELOT [2, 3.10.1] on dispose, si k est fini, d'un "morphisme trace"

$$\theta'_n : \mathbf{R}\Gamma(S_{\text{parf}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[-1].$$

THÉORÈME 3.3. — Soit X un schéma propre et lisse de dimension m sur un corps fini de caractéristique p . Alors

- (i) les groupes $H^j(X_{\text{ét}}, \nu_n(E, i))$ sont finis pour tous i, j et nuls pour $j > m+1$ ou $i > m$;
- (ii) l'accouplement

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{R}\Gamma(X_{\text{ét}}, \nu_n(E, i)) \otimes_{\mathbb{Z}/p^n}^{\mathbf{L}} \mathbf{R}\Gamma(X_{\text{ét}}, \nu_n(E^\vee, m-i)) & \rightarrow & \mathbf{R}\Gamma(S_{\text{parf}}, \mathbb{Z}/p^n)[-m] \\ & & \downarrow \theta'_n \\ & & \mathbb{Z}/p^n[-m-1]\end{array}$$

défini par (2.2.1.1) et θ'_n est une dualité parfaite, induisant des isomorphismes de groupes finis

$$H^j(X_{\text{ét}}, \nu_n(E, i)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(H^{m+1-j}(X_{\text{ét}}, \nu_n(E^\vee, m-i)), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p);$$

- (iii) pour tous i, j , les $H^j(X_{\text{ét}}, \hat{\nu}(E, i))$ sont des \mathbb{Z}_p -modules de type fini ;

(iv) les groupes finis $H^j(X_{\text{ét}}, \hat{\nu}(E, i))_{\text{tors}}$ et $H^{m+2-j}(X_{\text{ét}}, \hat{\nu}(E^\vee, m-i))_{\text{tors}}$ sont canoniquement duaux : par exemple si $m = 2i$, on a une dualité entre les groupes finis

$$H^{i+1}(X_{\text{ét}}, \hat{\nu}(E, i))_{\text{tors}} \quad \text{et} \quad H^{i+1}(X_{\text{ét}}, \hat{\nu}(E^\vee, i))_{\text{tors}};$$

(v) *il existe une surjection canonique*

$$H^j(X_{\text{ét}}, \hat{\nu}(E, i)) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Z}}\left(H^{m+1-j}(X_{\text{ét}}, \hat{\nu}(E^\vee, m-i)), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\right)$$

dont le noyau est le sous-groupe de torsion $H^j(X_{\text{ét}}, \hat{\nu}(E, i))_{\text{tors}}$ du groupe $H^j(X_{\text{ét}}, \hat{\nu}(E, i))$.

Par dévissage (cf. 2.2.1.3) on se ramène à prouver la finitude de $H^j(X_{\text{ét}}, \nu_1(E, i))$, qui résulte de la suite de cohomologie associée à la suite exacte [15, III, 2.2.4]

$$0 \longrightarrow \nu_1(E, i) \longrightarrow E_1 \otimes \Omega^i \xrightarrow{1-\tilde{F}} E_1 \otimes \Omega^i / \nabla(E_1 \otimes \Omega^{i-1}) \longrightarrow 0,$$

les groupes de cohomologie de $E_1 \otimes \Omega^i$ et $E_1 \otimes \Omega^i / \nabla(E_1 \otimes \Omega^{i-1})$ étant finis. La 2^{ième} assertion de (i) est prouvée en [15, III, 2.3].

Pour (ii) il suffit, grâce à [2, (3.11.1)], de passer aux sections sur S_{parf} dans (2.2.1.2).

Pour (iii), notons pour abréger $H^j(\hat{\nu}) = H^j(X_{\text{ét}}, \hat{\nu}(E, i))$ et $H^j(\nu_n) = H^j(X_{\text{ét}}, \nu_n(E, i))$. Comme $H^j(\nu_n)$ est annulé par p^n , le seul élément de $H^j(\hat{\nu})$ divisible par toutes les puissances de p est zéro. En posant $p^n H^j(\hat{\nu}) := \text{Ker}\{p^n : H^j(\hat{\nu}) \rightarrow H^j(\hat{\nu})\}$, on a donc

$$(3.3.1) \quad \varprojlim_n p^n H^j(\hat{\nu}) = 0,$$

où les flèches de transition sont la multiplication par p . Puisque la catégorie des groupes finis est artinienne on peut passer à la limite projective sur s dans la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte (2.2.1.3); on obtient donc une suite exacte courte

$$(3.3.2) \quad 0 \longrightarrow H^j(\hat{\nu})/p^n H^j(\hat{\nu}) \longrightarrow H^j(\nu_n) \longrightarrow p^n H^{j+1}(\hat{\nu}) \longrightarrow 0,$$

ce qui fournit par (3.3.1) l'isomorphisme

$$(3.3.3) \quad \varprojlim_n (H^j(\hat{\nu})/p^n H^j(\hat{\nu})) \simeq H^j(\hat{\nu}).$$

Il en résulte que $H^j(\hat{\nu})$ est engendré par tout sous-ensemble qui l'engendre modulo p : il existe un tel sous-ensemble qui soit fini d'après (3.3.2) et la finitude de $H^j(\nu_1)$; $H^j(\hat{\nu})$ est donc un \mathbb{Z}_p -module de type fini.

Pour prouver (iv), on passe à la limite inductive dans la suite (3.3.2)

$$0 \longrightarrow H^{j-1}(X, \hat{\nu}(E, i))/p^n \longrightarrow H^{j-1}(X, \nu_n(E, i)) \longrightarrow p^n H^j(X, \hat{\nu}(E, i)) \longrightarrow 0;$$

en notant

$$(3.3.4) \quad H^r(X, \nu_\infty(E, i)) := \varinjlim_n H^r(X, \nu_n(E, i))$$

on obtient donc une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H^{j-1}(X, \hat{\nu}(E, i)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow H^{j-1}(X, \nu_\infty(E, i)) \longrightarrow \\ H^j(X, \hat{\nu}(E, i))_{\text{tors}} \longrightarrow 0,$$

qui fournit

$$H^j(X, \hat{\nu}(E, i))_{\text{tors}} \simeq H^{j-1}(X, \nu_\infty(E, i)) / H^{j-1}(X, \nu_\infty(E, i))_{\text{div}},$$

où l'on a quotienté par la partie p -divisible du numérateur. La dualité entre $H^{j-1}(X, \nu_\infty(E, i))$ et $H^{m+2-j}(X, \hat{\nu}(E^\vee, m-i))$ (cf. (ii)) induit, via MILNE [25 bis, 2.3], la dualité entre $H^j(X, \hat{\nu}(E, i))_{\text{tors}}$ et $H^{m+2-j}(X, \hat{\nu}(E^\vee, m-i))_{\text{tors}}$.

Prouvons (v). D'après (3.3.2) et (ii) le noyau de la surjection canonique

$$H^j(X, \nu_n(E, i)) \longrightarrow \text{Hom}\left(H^{m+1-j}(X, \hat{\nu}(E^\vee, m-i))/p^n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\right)$$

est $\text{Hom}({}_p H^{m+2-j}(X, \hat{\nu}(E^\vee, m-i)), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. Par passage à la limite projective on obtient le (v), grâce à (iv) et (3.3.3). \square

THÉORÈME 3.4. — *Soient X une surface propre et lisse sur un corps fini de caractéristique p et G un p -groupe fini localement libre de type multiplicatif sur X . Alors*

- (i) *les groupes $H^i(X_{\text{fppf}}, G(n))$ sont finis pour tout i et nuls pour les exposants $i > 5$;*
- (ii) *l'accouplement*

$$\mathbb{R}\Gamma(X_{\text{fppf}}, G(n)) \stackrel{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}/p^n} \mathbb{R}\Gamma(X_{\text{fppf}}, G(n)^t) \longrightarrow \\ \mathbb{R}\Gamma(S_{\text{parf}}, \mathbb{Z}/p^n)[-4] \xrightarrow{\theta'_n} \mathbb{Z}/p^n[-5]$$

défini par (2.1.1) et θ'_n est une dualité parfaite, induisant des isomorphismes de groupes finis

$$H^i(X_{\text{fppf}}, G(n)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{5-j}(X_{\text{fppf}}, G(n)^t), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

Par dévissage on se ramène au cas $n = 1$, qui est celui d'un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1 car

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma(X_{\mathrm{fppf}}, G(1)) &\simeq \mathrm{R}\Gamma(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, R^1\alpha_*(G(1)))[-1] \\ &\simeq \mathrm{R}\Gamma(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \nu_1(G^*(1), 1))[-1]; \end{aligned}$$

d'où le résultat par (3.3). \square

Cas où la base est un corps algébriquement clos. — Puisqu'alors $\Gamma(S_{\mathrm{parf}}, -)$ est exact, on a

$$H^j(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \nu_n(E, i)) = H^j(X, \nu_n(E, i))(k).$$

On note $U^j = U^j(k)$, $D^j = D^j(k)$,

$$D^j(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \hat{\nu}(E, i)) := \varprojlim_n D^j(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \nu_n(E, i)),$$

et de même avec U^j .

THÉORÈME 3.5. — *Soit X un schéma propre et lisse de dimension m sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$. Alors*

- (i) *les groupes $H^j(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \nu_n(E, i))$ [resp. $H^j(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \hat{\nu}(E, i))$] sont nuls pour $j > m + 1$ [resp. pour $j > m$];*
- (ii) *il existe une surjection canonique*

$$H^j(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \nu_n(E, i)) \longrightarrow D^{m-j}(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \nu_n(E^\vee, m-i))^\vee$$

dont le noyau est $U^j(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \nu_n(E, i))$;

- (iii) *il existe une surjection canonique*

$$H^j(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \hat{\nu}(E, i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(D^{m-j}(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \hat{\nu}(E^\vee, m-i)), \mathbb{Z}_p\right)$$

dont le noyau est le sous-groupe de torsion de $H^j(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \hat{\nu}(E, i))$.

La 1^{re} (resp. la 2^{ème}) assertion du (i) est prouvée dans [15, III, 2.3] (resp. [15, III, 3.2.3]).

Le (ii) résulte de 3.2, et le (iii) aussi compte tenu de [22, IV, 3.3b)] et d'une démonstration analogue à celle de 3.4. (iii). \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERTHELOT (P.). — Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$, *Lecture Notes in Math.*, n° 407, Springer Verlag, 1974.
- [2] BERTHELOT (P.). — Le théorème de dualité pour les surfaces, d'après J. S. MILNE, dans "Surfaces algébriques". [Séminaire de géométrie algébrique d'Orsay, 1976–1978], *Lecture Notes in Math.*, n° 868, Springer Verlag, 1981.
- [3] BERTHELOT (P.) et MESSING (W.). — Théorie de Dieudonné cristalline I, [Journées de géométrie algébrique de Rennes, Juillet 1978], *Astérisque* n° 63, 1979, pp. 17–38.
- [4] BERTHELOT (P.), BREEN (L.) et MESSING (W.). — Théorie de Dieudonné cristalline II, *Lecture Notes in Math.*, n° 930, Springer Verlag, 1982.
- [5] BERTHELOT (P.) et OGUS (A.). — Notes on Crystalline Cohomology, *Mathematical Notes*, n° 21, Princeton University Press, 1978.
- [6] BREEN (L.). — Extensions du groupe additif sur le site parfait, dans "Surfaces algébriques". [Séminaire de géométrie algébrique d'Orsay 1976–1978], *Lecture Notes in Math.*, n° 868, Springer Verlag, 1981.
- [7] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). — *Homological Algebra*. — Princeton University Press, 1956.
- [7bis] COLLIOT-THELENE (J.-L.), SANSUC (J.-J.), et SOULE (C.). — Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, *Duke Math. J.*, t. 50, n° 3, 1983, p. 763–801.
- [8] DEMAZURE (M.). — Lectures on p -divisible groups, *Lecture Notes in Math.*, n° 302, Springer Verlag, 1972.
- [9] DEMAZURE (M.) et GABRIEL (P.). — *Groupes algébriques*. — t. 1, Paris, Masson et North-Holland Pub. Co, 1970.
- [10] EKEDAHL (T.). — On the multiplicative properties of the De Rham-Witt complex, *Ark. Mat.*, t. 22, n° 2, 1984, p. 185–239.
- [11] ETESSE (J.-Y.). — Complexe de De Rham-Witt à coefficients dans un F -cristal unité et dualité plate pour les surfaces, Thèse de 3^e cycle, Université de Rennes I, 1981.
- [12] ETESSE (J.-Y.). — Complexe de De Rham-Witt à coefficients dans un cristal, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, t. 294, 1982, p. 581–584.
- [13] ETESSE (J.-Y.). — Cohomologie du complexe de De Rham-Witt à coefficients dans un F -cristal unité et dualité plate pour les surfaces, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, t. 294, 1982, p. 621–624.
- [14] ETESSE (J.-Y.). — Dualité plate pour les surfaces, à coefficients dans un groupe fini de type multiplicatif, Preprint, *Inst. Hautes Études Sci. Pub. Math.*, mai 1983.
- [15] ETESSE (J.-Y.). — Complexe de De Rham-Witt à coefficients dans un cristal, *Compositio Mathematica*, 66, 1988, p. 57–120.
- [15bis] ETESSE (J.-Y.). — Rationalité et valeurs de fonctions L en cohomologie cristalline, à paraître aux *Annales de l'Institut Fourier de Grenoble*.
- [16] GODEMENT (R.). — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. — Hermann, 1964.

- [17] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNE (J.). — Éléments de Géométrie Algébrique. EGA I : Grundlehren n° 166, *Springer Verlag*, 1971 ; EGA II : *Inst. Hautes Études Sci. Pub. Math.*, vol. 8 ; EGA III : *Inst. Hautes Études Sci. Pub. Math.*, vol. 11 et 17 ; EGA IV : *Inst. Hautes Études Sci. Pub. Math.*, vol. 20, 24, 28 et 32.
 - [18] HARTSHORNE (R.). — Algebraic Geometry, [Graduate texts in Math., n° 52], *Springer Verlag*, 1977.
 - [19] HARTSHORNE (R.). — Residues and Duality, *Lecture Notes in Math.*, n° 20, *Springer Verlag*, 1966.
 - [20] HARTSHORNE (R.). — On the De Rham cohomology of algebraic varieties, *Inst. Hautes Études Sci. Pub. Math.*, t. 45, 1975, p. 5–99.
 - [21] ILLUSIE (L.). — Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, t. 12, 1979, p. 501–661.
 - [22] ILLUSIE (L.) et RAYNAUD (M.). — Les suites spectrales associées au complexe de De Rham-Witt, *Inst. Hautes Études Sci. Pub. Math.*, t. 57, 1983, p. 73–212.
 - [23] KATZ (N.). — Nilpotent Connections and the Monodromy Theorem, *Inst. Hautes Études Sci. Pub. Math.*, t. 39, 1970, p. 175–232.
 - [24] MILNE (J.-S.). — Duality in the Flat Cohomology of a Surface, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, t. 9, 1976, p. 171–202.
 - [25] MILNE (J.-S.). — *Etale Cohomology*. — Princeton University Press, 1980.
 - [25bis] MILNE (J.-S.). — On a conjecture of Artin and Tate, *Ann. of Math.*, t. 102, 1975, p. 517–533.
 - [26] SAAVEDRA RIVANO (N.). — Catégories Tanakiennes, *Lecture Notes in Math.*, n° 265, *Springer Verlag*, 1972.
 - [27] SERRE (J.-P.). — Groupes proalgébriques, *Inst. Hautes Études Sci. Pub. Math.*, vol. 7, 1960.
 - [28] SGA 4. — Théorie des topos et cohomologie étale des schémas par ARTIN (M.), GROTHENDIECK (A.) et VERDIER (J.-L.), *Lecture Notes in Math.*, n° 269, 270, 305, *Springer Verlag*, 1972–1973.
-