

BULLETIN DE LA S. M. F.

D. CERVEAU

R. MOUSSU

Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ et équations différentielles $ydy + \dots = 0$

Bulletin de la S. M. F., tome 116, n° 4 (1988), p. 459-488

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_4_459_0

© Bulletin de la S. M. F., 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GROUPES D'AUTOMORPHISMES DE $(\mathbb{C}, 0)$ ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES $ydy + \dots = 0$

PAR

D. CERVEAU ET R. MOUSSU (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on étudie la classification analytique des groupes non abéliens de germes de difféomorphismes de $\mathbb{C}, 0$. On en déduit la classification de certains diagrammes divergents et d'équations différentielles singulières dans le plan complexe.

ABSTRACT. — We study the analytic classification of non abelian groups of diffeomorphisms of $\mathbb{C}, 0$. We apply our results to the classification of divergent diagrams and to singular ordinary differential equations in \mathbb{C}^2 . Space of moduli are given.

Introduction

Soit \mathbf{D} le groupe des germes d'automorphismes holomorphes de \mathbb{C} au point 0. L'étude des sous-groupes de \mathbf{D} est étroitement liée via la monodromie à celles des singularités des équations différentielles holomorphes du plan complexe.

Les problèmes rencontrés sont de nature différente selon que l'objet étudié est formellement linéarisable ou ne l'est pas. Dans le premier cas, on tombe dans le monde des petits diviseurs $[H]$, dans le second on est dans celui de la resommabilité, des fonctions résurgentes $[E_1]$, $[E_2]$, $[M, R_1]$, $[M, R_2]$.

Le but de ce travail est de classifier les sous-groupes non abéliens de \mathbf{D} et ensuite d'en déduire des propriétés des équations différentielles du type $ydy + \dots = 0$. De tels groupes possèdent des éléments tangents à l'application identique $1_{\mathbb{C}}$ de \mathbb{C} . Ils ne sont pas linéarisables et la resommabilité va jouer un rôle fondamental; c'est une des clefs de la preuve du THÉORÈME 1.

(*) Texte reçu le 11 juin 1987.

D. CERVEAU, IRMAR, Université de Rennes I, 35042 Rennes Cedex, France.

R. MOUSSU, Université de Bourgogne, Laboratoire de Topologie, B.P. 138, 21004 Dijon Cedex, France.

Avant de l'énoncer, rappelons quelques notations et définitions classiques. On note $\widehat{\mathbb{D}}$ le complété formel de \mathbb{D} et Φ_* l'automorphisme intérieur de $\widehat{\mathbb{D}}$, $g \rightarrow \Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$ correspondant à l'élément Φ de $\widehat{\mathbb{D}}$. Deux sous-groupes G, G' de \mathbb{D} sont holomorphiquement (resp. formellement) conjugués s'il existe un élément Φ de \mathbb{D} (resp. $\widehat{\mathbb{D}}$) tel que $\Phi_* G = G'$.

Un sous-groupe G de \mathbb{D} est dit *exceptionnel* s'il est formellement conjugué à l'un des groupes $G_{\omega, p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \mathbb{C}$, engendré par

$$x \rightarrow \omega x \quad \text{et} \quad h_p(x) = x(1 - px^p)^{-1/p} \quad \text{avec} \quad \omega^p = -1, (1)^{1/p} = 1.$$

THÉOREME 1. — *Deux sous-groupes non abéliens G, G' de \mathbb{D} formellement conjugués le sont holomorphiquement si G n'est pas exceptionnel.*

Nous montrerons que, lorsque G est exceptionnel, son espace de module (formel-holomorphe) s'identifie à un sous-ensemble de l'espace des modules d'ECALLE-VORONIN de l'élément h_p de \mathbb{D} .

Dans le chapitre 2, nous appliquerons le THÉOREME 1 aux *diagrammes* d à deux flèches $(f_1, f_2) \in \mathbb{C}\{x\}^2$ via son groupe d'invariance $G(d)$. Le diagramme d est dit *exceptionnel* si $G(d)$ est exceptionnel. Par exemple un diagramme dont une des flèches est d'ordre impair n'est jamais exceptionnel.

THÉOREME 2. — *Deux diagrammes d, d' formellement conjugués le sont holomorphiquement si d n'est pas exceptionnel.*

Il est bien connu [T] qu'une équation différentielle $\Omega = 0$ de 1-jet ydy a une "forme normale" du type

$$\Omega_{n,p} = d(y^2 + x^n) + x^p U(x) dy, \quad U(x) \in \mathbb{C}[[x]], \quad U(0) \neq 0.$$

L'entier n est un invariant formel de Ω et nous notons Σ_1^n l'ensemble des Ω qui ont une forme normale $\Omega_{n,p}$ avec $2p > n$. Une telle équation "hérite" de nombreuses propriétés de l'hamiltonien $y^2 + x^n$. En particulier, elle a la même résolution minimale M que la courbe $y^2 + x^n = 0$. En remarquant que le groupe d'holonomie G_Ω d'un diviseur de M caractérise Ω on montre le :

THÉOREME 3. — *Deux équations $\Omega, \Omega' \in \Sigma_1^n$ formellement conjuguées le sont holomorphiquement sauf peut-être dans le cas exceptionnel : n est pair, G_Ω est abélien et Ω n'a pas d'intégrale première holomorphe.*

Le chapitre 4 est consacré à la classification des sous-groupes de \mathbb{D} *topologiquement conjugués* à des sous-groupes non abéliens du groupe \mathbb{H} constitué des germes d'homographies

$$x \rightarrow \frac{ax}{1 + bx} \quad \text{où} \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

De l'étude des représentations fidèles des sous-groupes de \mathbf{H} dans \mathbf{D} on déduit le :

COROLLAIRE 1. — *Un sous-groupe G de \mathbf{D} topologiquement conjugué à un sous-groupe non abélien H de \mathbf{H} est formellement conjugué à un sous-groupe de \mathbf{H} . De plus, cette conjugaison est holomorphe si H est différent du groupe exceptionnel $G_{-1,1} = \{-x, (x/1-x)\}$.*

Soit H un sous-groupe de \mathbf{H} , tel que $J^1 H$ soit réel; si L est un élément de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ on introduit le groupe $L_* H$:

$$L_* H = \left\{ x \rightarrow \frac{ax}{1 + L(b)x} ; \frac{ax}{1 + bx} \in H \right\}.$$

THÉORÈME 4. — *Soit $H \neq G_{-1,1}$ un sous-groupe non abélien de \mathbf{H} et soit G un sous-groupe de \mathbf{D} topologiquement conjugué à H . Alors si :*

- i) $J^1 H$ n'est pas réel, G est holomorphiquement conjugué à H .
- ii) $J^1 H$ est réel, G est holomorphiquement conjugué à un sous-groupe $L_*(H)$ avec $L \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Notations

$$\mathbf{D} = \{h \in \mathbb{C}\{x\}, h(0) = 0, h'(0) \neq 0\};$$

$$\mathbf{D}_p = \{h \in \mathbf{D}, h^{(i)}(0) = 0, 2 \leq i \leq p, h^{(1)}(0) = 1\};$$

$\widehat{\mathbf{D}}$, $\widehat{\mathbf{D}}_p$ les complétés formels de \mathbf{D} et \mathbf{D}_p ;

$$X_{p,\lambda} = \frac{x^p}{1 + \lambda x^{p+1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x};$$

$G_{\omega,p}$ le groupe engendré par $x \rightarrow \omega x$, $\omega^p = -1$, et $\exp X_{p,0}$.

Pour $\Phi \in \widehat{\mathbf{D}}$ ou \mathbf{D} on note Φ_* l'automorphisme de $\widehat{\mathbf{D}}$ ou \mathbf{D} : $g \mapsto \Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$. Si $h \in \mathbf{D}$, on note $[h]_{\mathbf{D}}$ (resp. $[h]_{\widehat{\mathbf{D}}}$) l'ensemble $\{\Phi_* h, \Phi \in \mathbf{D}\}$ (respectivement $\{\Phi_* h, \Phi \in \widehat{\mathbf{D}}\} \cap \mathbf{D}$).

De même, si G est un sous-groupe de \mathbf{D} , $[G]_{\mathbf{D}}$ désigne $\{\Phi_* G, \Phi \in \mathbf{D}\}$; l'espace des modules G^{For} de G est l'ensemble des $[G']_{\mathbf{D}}$ où G' est formellement conjugué à G .

Remerciements. — C'est après une discussion avec Jean MARTINET que nous avons vraiment démarré cette étude. Nous le remercions vivement.

0. Rappels sur les automorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$ tangents à $1_{\mathbb{C}}$

1. Classification formelle. — Elle se déduit de la classification des champs de vecteurs à une variable. Soit

$$X = x^{p+1} f(x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad f \in \mathbb{C}[[x]], \quad f(0) \neq 0$$

un champ de vecteurs formel qui s'annule à l'ordre p en 0 et soit $\exp tX$, $t \in \mathbb{C}$, son groupe à 1-paramètre, i.e. :

$$\frac{d}{dt} \exp tX = X(\exp tX) \quad \text{avec} \quad \exp 0X = 1_{\mathbb{C}}.$$

En développant cette relation suivant les puissances de x , on montre que $\exp tX(x)$ est un élément de $\mathbb{C}[t][[x]]$. On en déduit l'assertion :

1.1. — X est déterminé par $\exp X$ en ce sens : si un autre champ X' est relié à X par :

$$g_* \exp X = \exp X' \quad \text{où} \quad g \in \widehat{\mathbf{D}}$$

alors $g_* X = X'$.

En considérant la 1-forme $\frac{dx}{x^{p+1}f(x)}$ duale de X , on établit :

1.2. — Il existe $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ unique et $N \in \widehat{\mathbf{D}}$ tels que :

$$N_* X = X_{p,\lambda} \quad \text{où} \quad X_{p,\lambda} = \frac{x^{p+1}}{1 + \lambda x^p} \frac{\partial}{\partial x}.$$

L'assertion suivante caractérise les éléments $g \in \widehat{\mathbf{D}}$ qui laissent $X_{p,\lambda}$ fixe, ou ce qui revient au même, qui commutent avec $\exp X_{p,\lambda}$. Elle se démontre en résolvant E_1 où E_{μ} désigne l'équation différentielle :

$$\frac{g'}{g^{p+1}} + \frac{\lambda g'}{g} = \mu \left(\frac{1}{x^{p+1}} + \frac{\lambda}{x} \right), \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

1.3. — Si $g_* X_{p,\lambda} = X_{p,\lambda}$ avec $g \in \widehat{\mathbf{D}}$, il existe $t_g \in \mathbb{C}$ et $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ tels que :

$$g(x) = e^{2i\pi(k/p)} \exp t_g X_{p,\lambda}.$$

L'Assertion 1.4. est un critère de nullité de l'invariant λ de $X_{p,\lambda}$. Elle se prouve comme 1.3. en intégrant E_μ .

1.4. — Si $g_*X_{p,\lambda} = \mu X_{p,\lambda}$ avec $\mu \neq 1$ et $g \in \widehat{\mathbf{D}}$ alors $\lambda = 0$ et

$$g(x) = a \exp t_g X_{p,0} \quad \text{où } t_g \in \mathbb{C}$$

et $a \in \mathbb{C}$ vérifie $\mu a^p = 1$. L'application $X \rightarrow \exp X$ est surjective; plus précisément on a :

1.5. — Soit $h(x) = x(1 + \sum_{k \geq p} a_k x^k)$, $a_p \neq 0$, un élément de $\widehat{\mathbf{D}}_1$. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ unique et $N \in \widehat{\mathbf{D}}$ tangent à $1_{\mathbb{C}}$ tels que :

$$N_*h = \exp a_p X_{p,\lambda}.$$

N est appelée une *transformation normalisante* de h (itérateur chez [E]). De 1.3., 1.4., 1.5., on déduit :

1.6. — Le centralisateur $\widehat{C}(h) = \{g \in \widehat{\mathbf{D}}; g_*h = h\}$ de h dans $\widehat{\mathbf{D}}$ est le groupe engendré par les

$$N_*^{-1} (e^{2i\pi(k/p)} \exp t X_{p,\lambda}) \quad \text{avec } t \in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, \dots, p-1.$$

En particulier $\widehat{C}_1(h) = \widehat{C}(h) \cap \widehat{\mathbf{D}}_1$ est le groupe à 1-paramètre

$$N_*^{-1} \exp t X_{p,\lambda}$$

et ainsi les composés $\exp t X_{p,\lambda} \circ N$ sont les seules transformations normalisantes de h . On en déduit que h possède une unique transformation normalisante tangente à $1_{\mathbb{C}}$ à l'ordre p .

2. Classification topologique. — Elle est due à C. CAMACHO [C].

2.1. — Les éléments de $\mathbf{D}_p - \mathbf{D}_{p+1}$ sont tous topologiquement conjugués. Il est naturel de prendre pour représentant de cette classe de conjugaison

$$h_p(x) = \exp X_{p,0}(x) = \frac{x}{\sqrt[p]{1 - px^p}} \quad \text{avec } \sqrt[p]{1} = 1.$$

A une homothétie près $h_p(x)$ est un relèvement de $h_1(x)$ par le revêtement ramifié $x \rightarrow x^p$. Sa dynamique (théorème de la fleur) se visualise de la façon suivante :

2.2. — Les $2p$ droites $d_\ell = \{x; \operatorname{Arg} x = \ell(\pi/p), \ell = 0, 1, \dots, 2p-1\}$ sont invariantes par h_p ; nous les appelons *rayons invariants*. Si x appartient à l'un des secteurs

$$S_\ell = \left\{ x \in \mathbb{C} / \ell \cdot \frac{\pi}{p} < \operatorname{Arg} x < (\ell + 1) \frac{\pi}{p} \right\}$$

$h_p^n(x)$ tend vers 0 sur une courbe analytique tangente à d_ℓ ou $d_{\ell+1}$ lorsque n tend vers $\pm\infty$.

Cette dynamique est préservée par conjugaison topologique, plus précisément :

2.3. — Soient $h(x) = x(1 + \sum_{k \geq p} a_k x^k)$ un élément de $\mathbb{D}_p - \mathbb{D}_{p+1}$, $d_\ell(h)$ la demi-droite image de d_ℓ par la rotation d'angle $1/p \operatorname{Arg} a_p$. Si x est voisin de 0, une au moins des demi-orbitales $\{h^{\epsilon \cdot n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\epsilon = \pm 1$, tend vers zéro le long d'une courbe (topologique) tangente en 0 à une des demi-droites $d_\ell(h)$. Nous dirons encore que les $d_\ell(h)$ sont des rayons invariants.

3. Classification analytique. — Les résultats ci-dessous ont été obtenus tout d'abord par J. ECALLE [E], (via la théorie des fonctions résurgentes) puis par M. VORONIN (via des conjugaisons quasi-conformes) [V]. Ils ont été exposés par B. MALGRANGE dans [M] et reformulés (via la resommabilité) par J. MARTINET et J.-P. RAMIS dans [MR₁] et [MR₂].

Soit N une transformation normalisante d'un élément $h(x) = x(1 + \sum_{k \geq p} a_k x^k)$, $a_p \neq 0$, i.e. $N_* h = \exp a_p X_{p,\lambda}$ et soit $S'_\ell(h)$ le secteur d'ouverture $2\pi/p$ bissecté par $d_\ell(h)$. L'assertion suivante est connue sous le nom de :

3.1. *Normalisation sectorielle.* — il existe un germe unique N_ℓ d'automorphisme holomorphe de $(S'_\ell(h), 0)$ dont N est le développement asymptotique en 0 et tel que :

$$N_{\ell*} h = \exp a_p X_{p,\lambda} | (S'_\ell(h), 0).$$

3.2. *Cocycles caractéristiques.* — C'est la collection $c(h)$ des germes d'automorphismes

$$c_\ell(h) = N_{\ell+1} \circ N_\ell^{-1} : (S'_{\ell+1}(h) \cap S_\ell(h), 0) \hookrightarrow;$$

$c(h)$ caractérise la classe de conjugaison holomorphe $[h]_{\mathbb{D}}$: si h_1 appartient à $[h]_{\mathbb{D}}$, alors $h_1 \in [h]_{\mathbb{D}}$ si et seulement si $c(h) = c(h_1)$. Lorsque N converge $c(h)$ est évidemment trivial et le *centralisateur holomorphe* $C_1(h)$ coïncide

avec le centralisateur formel $\widehat{C}_1(h) = \{g \in \widehat{\mathbb{D}}; g_*h = h\}$. Plus précisément on a :

3.3. — N diverge si et seulement si $C_1(h)$ est monogène ([E], [V]).

1. Espaces des modules formels des sous-groupes de \mathbb{D}

1. Énoncé des résultats. — Soit G un sous-groupe de \mathbb{D} . Son espace de modules (formels-holomorphes), noté G^{For} , est l'ensemble des $[G']_{\mathbb{D}}$ où G' est un sous-groupe de \mathbb{D} formellement conjugué à G et $[G']_{\mathbb{D}}$ est l'ensemble des sous-groupes de \mathbb{D} holomorphiquement conjugués à G' .

D'après l'assertion 0.3.2., lorsque $G \subset \mathbb{D}_1$ est un groupe monogène (soit $\{h^n; n \in \mathbb{Z}\}$), G^{For} n'est rien d'autre que le module d'ECALLE-VORONIN, h^{For} de h qui s'identifie à l'ensemble des cocycles $c(h')$ pour $h' \in [h]_{\widehat{\mathbb{D}}} \cap \mathbb{D}$.

Lorsque G est un sous-groupe abélien de \mathbb{D} , la détermination de G^{For} est souvent liée à des problèmes de petits diviseurs; c'est donc un problème très difficile; nous ne l'étudierons pas ici. Par contre, si G n'est pas abélien, le théorème suivant montre que G^{For} est trivial si G n'est pas un des groupes exceptionnels $G_{\omega,p}$ engendrés par $\exp X_{p,0}$ et $x \mapsto \omega x$ avec $\omega^p = -1$.

THÉOREME 1. — Soit G un sous-groupe non abélien de \mathbb{D} .

i) Si $G' \subset \mathbb{D}$ est formellement conjugué à G par $\Phi \in \widehat{\mathbb{D}}$, alors, Φ converge dès que G n'est pas formellement conjugué à l'un des groupes $G_{\omega,p}$.

ii) L'espace $G_{\omega,p}^{\text{For}}$ s'identifie au sous-ensemble de $(\exp X_{p,0})^{\text{For}}$ constitué des cocycles $(c = c_0, c_1, \dots, c_{2p-1})$ qui sont équivariants par la rotation $x \rightarrow \omega x$; c'est-à-dire :

$$c_{\ell+d}(\omega x) = \omega c_{\ell}(x) \quad \text{si } \omega = e^{i\pi(d/p)}, \quad \omega^p = -1.$$

Dans [V], VORONIN classe les couples (f_1, f_2) d'involutions génériques. En remarquant (voir PROPOSITION 2 ci-dessous) que le groupe engendré par f_1, f_2 est alors formellement conjugué à $G_{-1,1} = \{-x, (x/1-x)\}$, nous retrouvons son résultat : l'espace des modules d'une paire d'involutions s'identifie à l'ensemble des cocycles de $(x/1-x)^{\text{For}}$ invariants par l'involution $x \mapsto -x$.

La motivation première de ce travail était le problème plus général lié aux équations différentielles : classifier les paires (f_1, f_2) où les $f_i \in \mathbb{D}$ sont périodiques. Le THÉOREME 1 résout ce problème compte tenu de la remarque :

Remarque 1. — Un système de générateurs (f_1, f_2) périodiques du

groupe $G_{\omega,p}$, $\omega^p = -1$ est à conjugaison holomorphe près du type suivant :

$$f_1(x) = e^{i\pi \cdot (n_1/p)} \cdot x, \quad f_2(x) = e^{i\pi \cdot (n_2/p)} \frac{x}{\sqrt[p]{1-x^p}},$$

avec n_1 et n_2 impairs.

En effet, ces deux éléments engendrent un sous-groupe $G_{n_1, n_2, d}$ de \mathbb{D} non abélien tel que $G_{n_1, n_2, d} \cap \mathbb{D}_1$ soit monogène; $G_{n_1, n_2, p}$ est holomorphiquement conjugué à un groupe $G_{\omega, p}$ d'après la PROPOSITION 2 ci-dessous. Réciproquement toute paire d'éléments f_1, f_2 de $G_{\omega, p}$ s'écrit :

$$f_j(x) = \omega^{m_j} \frac{x}{\sqrt[p]{1 - k_j x^p}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad k_j \in \mathbb{Z}.$$

On vérifie que, si les f_j sont périodiques et ne commutent pas, les entiers m_j sont impairs. Ainsi,

$$\omega^{m_j} = e^{i(\pi/p) \cdot n_j} \quad \text{avec} \quad n_j = m_j(2d+1) \quad \text{si} \quad \omega = e^{i\pi(2d+1/p)}$$

et (f_1, f_2) est du type annoncé.

Le corollaire suivant est alors une conséquence du théorème et des propriétés des $G_{\omega, p}$.

COROLLAIRE 1. — Soient G, G' deux sous-groupes non abéliens de \mathbb{D} formellement conjugués par $\Phi \in \widehat{\mathbb{D}}$. Alors Φ converge dans les cas suivants :

- 1) G n'est pas engendré par deux éléments.
- 2) G ne contient pas d'élément périodique.
- 3) G est engendré par deux éléments périodiques dont l'un est de période impaire.

2. Démonstration du théorème. — C'est une conséquence des PROPOSITIONS 1, 2 suivantes.

PROPOSITION 1. — Soient G, G' deux sous-groupes de \mathbb{D}_1 formellement conjugués par $\Phi \in \widehat{\mathbb{D}}$. Si G n'est pas monogène, Φ converge.

Preuve. — Modulo une conjugaison linéaire, on peut supposer que Φ appartient à $\widehat{\mathbb{D}}_1$. Distinguons deux cas :

- 1) G est abélien non monogène. Soit h un élément (fixé) de G . Comme G est inclus dans le centralisateur $C_1(h)$, les transformations normalisantes de h sont convergentes; soit N l'une d'entre elles. Le composé $N' = \Phi^{-1} \circ N$ est une transformation normalisante de $h' = \Phi_* h$. Elle converge par le même argument que précédemment et par suite Φ converge.

2) G n'est pas abélien. Soient h_i , $i = 1, 2$ deux éléments de G non commutants :

$$h_i(x) = x(1 + t_i x^{p_i} + \dots), \quad t_i \neq 0.$$

Lorsque $p_1 = p_2$, un calcul immédiat montre que $[h_1, h_2]$ est tangent à l'identité à un ordre strictement supérieur à p_1 . On peut donc choisir deux éléments $h_1, h_2 \in G$ tels que $p_1 \neq p_2$. La transformation Φ conjugue les difféomorphismes holomorphes h_i et $\Phi_* h_i$ pour $i = 1, 2$. Un argument de $[MR_1]$ assure qu'elle est p_i -sommable pour $i = 1, 2$ et d'après un résultat de J.-P. RAMIS [R] elle est convergente.

La proposition suivante classe les sous-groupes G de $\widehat{\mathbb{D}}$ tels que $G \cap \widehat{\mathbb{D}}_1$ soit monogène.

PROPOSITION 2. — Soit G un sous-groupe de \mathbb{D} tel que $G \cap \mathbb{D}$ soit engendré par $h(x) = x(1 + x^p + \dots)$ et soit N une transformation normalisante de h , $N_* h = \exp X_{p, \lambda}$. Il existe $f \in G$ tel que f et h engendrent G , $f_* h = h^\epsilon$ avec $\epsilon = \pm 1$ et pour un bon choix de N on a :

i) si $\epsilon = 1$, G est abélien et $N_* G$ est engendré par $\exp X_{p, \lambda}$ et $\omega \exp t \cdot X_{p, \lambda}$ où $t \in \mathbb{C}$ et $\omega^p = 1$.

ii) si $\epsilon = -1$, alors $\lambda = 0$ et $N_* G$ est un des groupes $G_{\omega, p}$ (avec $\omega^p = -1$).

Preuve. — Si g est un élément de G , $g_* h$ appartient à $G \cap \mathbb{D}_1$ et il existe $n(g) \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$g_* h = h^{n(g)} = x(1 + n(g)x^p + \dots).$$

D'autre part un calcul élémentaire montre que

$$g_* h = x(1 + g'(0)^{-p} x^p + \dots).$$

En procédant de la même façon avec g^{-1} on obtient :

$$n(g) = g'(0)^{-p}, \quad g'(0)^p = n(g^{-1}), \quad n(g) = \epsilon \quad \text{avec} \quad \epsilon = \pm 1.$$

Le sous-groupe $J^1 G = \{g'(0); g \in G\}$ est un sous-groupe des racines $2^{p^{\text{ième}}}$ de 1. Soient ω un générateur de $J^1 G$ et $f \in G$ tel que $f'(0) = \omega$; quel que soit $g \in G$, il existe $m(g) \in \mathbb{Z}$ tel que $g'(0) = \omega^{m(g)}$. Ainsi $f^{-m(g)} \cdot g$ appartient à $G \cap \mathbb{D}_1$, c'est-à-dire à $\{h^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Ce qui démontre la première partie de la proposition : G est engendré par f, h avec

$$f_* h = h^\epsilon, \quad f'(0) = \omega, \quad \omega^p = \epsilon = \pm 1.$$

Soit N une transformation normalisante de h , $N_* h = \exp X_{p, \lambda}$:

i) si $\epsilon = 1$, G est abélien et d'après l'assertion 0.1.6

$$N_*f = \omega \exp tX_{p,\lambda} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{C}.$$

ii) si $\epsilon = -1$, d'après 0.1.4. on a $\lambda = 0$ et $N_*f = \omega \exp tX_{p,0}$ puisque :

$$(N_*f)_* \exp X_{p,0} = \exp -X_{p,0}.$$

On peut ici choisir N tel que $N_*f(x) = \omega x$.

2. Diagrammes divergents

Définition. — On appelle *diagramme* (à deux flèches) une paire $d = (f_1, f_2)$ d'éléments f_j de $\mathbb{C}\{x\}$. Deux diagrammes $d = (f_1, f_2)$, $d' = (f'_1, f'_2)$ sont *holomorphiquement* (resp. *formellement*) *conjugués* s'il existe des éléments h, ℓ_1, ℓ_2 de \mathbb{D} (resp. $\widehat{\mathbb{D}}$) tels que :

$$f_j \circ h = \ell_j \circ f'_j \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Il est clair que les ℓ_i appartiennent à \mathbb{D} dès que h appartient à \mathbb{D} .

Le *groupe d'invariance* $G(d)$ de $d = (f_1, f_2)$ est le sous-groupe de \mathbb{D} engendré par les g tels que $f_j \circ g = f_j$ pour $j = 1$ ou $j = 2$. Ce groupe est engendré par deux éléments périodiques g_1, g_2 de période $\nu(f_1), \nu(f_2)$ où $\nu(f_j)$ désigne l'ordre de f_j . Nous dirons que d est *abélien* si $G(d)$ est un groupe abélien.

Assertion 1. — Un diagramme abélien d est holomorphiquement conjugué à un diagramme monomial (x^{ν_1}, x^{ν_2}) .

Preuve. — Le groupe $G(d)$ étant abélien, engendré par deux éléments périodiques g_1, g_2 de périodes ν_1, ν_2 , est un groupe fini. Il est conjugué à un groupe de rotations périodiques. En particulier, il existe $h \in \mathbb{D}$ tel que :

$$g_j \circ h(x) = h(e^{2i\pi/\nu_j} \cdot x).$$

Ainsi, $f_j \circ h$ est invariant par la rotation d'angle $e^{2i\pi/\nu_j}$ et est d'ordre ν_j ; il s'écrit :

$$f_j \circ h(x) = \ell_j(x^{\nu_j}) \quad \text{avec} \quad \ell_j \in \mathbb{D}.$$

Assertion 2 [D]. — Si d, d' sont holomorphiquement (resp. formellement) conjugués, alors $G(d), G(d')$ le sont aussi.

Soient p, n_1, n_2 des entiers tels que les n_i soient impairs et $0 < n_i < 2p$. Notons q_i le ppcm de p et n_i , $s_i = q_i/n_i$ et

$$d(n_1, n_2, p) = \left(x^{2s_1}, \frac{x^{2s_2}}{(1-x^p)^{2s_2/p}} \right).$$

On remarquera que $G(d(n_1, n_2, p))$ est holomorphiquement conjugué au groupe $G_{n_1, n_2, p}$ de la *Remarque* 1.1. Le théorème suivant généralise un résultat de VORONIN [V] :

THÉORÈME 2. — *Deux diagrammes d, d' qui sont formellement conjugués le sont holomorphiquement lorsque d, d' ne sont pas formellement conjugués à l'un des $d(n_1, n_2, p)$ avec n_1, n_2 impairs.*

Preuve. — L'Assertion 1 prouve le théorème lorsque d est abélien. Si d n'est pas abélien et n'est pas conjugué formellement à l'un des $d(n_1, n_2, p)$ on note que $G(d)$ n'est pas formellement conjugué à l'un des $G_{\omega, p}$. Le théorème est alors une conséquence de l'Assertion 2 et de la *Remarque* 1.1.

On déduit du théorème que $d = (f_1, f_2)$ n'est pas formellement conjugué à un $d(n_1, n_2, p)$ si l'un des $\nu(f_i)$ est impair (COROLLAIRE 1.1). Le résultat de Voronin concerne les diagrammes génériques du type $(x^2, x^2 + \dots)$. Ils sont formellement conjugués à $d(1, 1, 1)$; leur espace de modules formels s'identifie à $G_{-1, 1}^{\text{For}}$.

Remarque 1. — On aurait pu considérer des diagrammes à n flèches $n > 2$, génériques; $G(d)$ est alors engendré par plus de deux éléments. Par suite, "génériquement" d et d' sont holomorphiquement conjugués si et seulement si ils le sont formellement.

3. Conjugaisons holomorphes et formelles d'équations différentielles $ydy + \dots = 0$

1. Préliminaires et résultats. — Soit Λ l'ensemble des germes en $0 \in \mathbb{C}^2$ de formes de Pfaff $\Omega = adx + bdy$ à singularité algébriquement isolée. Deux telles formes Ω, Ω' sont *holomorphiquement* (resp. *formellement*) *conjuguées* s'il existe un élément Φ de $\mathbb{C}\{x, y\}^2$ (resp. $\mathbb{C}[[x, y]]^2$) tel que

$$\Phi^* \Omega \wedge \Omega' = 0 \quad \text{et} \quad D\Phi(0) \in \text{GL}(2, \mathbb{C}).$$

L'espace des modules formels de Ω est le quotient Ω^{For} de l'ensemble des Ω' formellement conjugués à Ω par la relation "conjugaison holomorphe".

Une forme Ω est *dégénérée* si le jet d'ordre 1, $DX(0)$, du champ dual $X_\Omega = b(\partial/\partial x) - a(\partial/\partial y)$ est nilpotent. Soit Σ_1 l'ensemble des $\Omega \in \Lambda$ qui

sont dégénérées et dont le 1-jet n'est pas nul; modulo un changement de coordonnées linéaires il s'écrit $J^1\Omega = ydy$.

Assertion [T]. — Une forme Ω de Σ_1 est formellement conjuguée à une forme du type :

$$\Omega_{n,p} = d(y^2 + x^n) + x^p U(x) dy$$

où $n \geq 3$, $p \geq 2$ sont des entiers et $U \in \mathbb{C}[[x]]$, $U(0) \neq 0$.

Nous dirons, abusivement (voir paragraphe 2) que $\Omega_{n,p}$ est une forme normale de Ω .

THÉORÈME 3. — Soit Ω un élément de Σ_1 ayant une forme normale de type $\Omega_{n,p}$ avec $2p > n$. Son espace de module Ω^{For} est en général trivial; s'il ne l'est pas n est pair et il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{N}^*$ uniques tels que Ω^{For} s'identifie à l'espace des modules formels $A_{n,q,\lambda}^{\text{For}}$ du sous-groupe (abélien) $A_{n,q,\lambda}$ de \mathbb{D} engendré par :

$$f(x) = e^{4i(\pi/n)} x, \quad g(x) = e^{2i(\pi/n)} \exp X_{nq,\lambda}(x).$$

De la même façon que pour les groupes $G_{\omega,p}$, l'espace $A_{n,q,\lambda}^{\text{For}}$ s'identifie aux cocycles d'ECALLE des $\tilde{g} \in \mathbb{D}$ qui sont formellement conjugués à g et qui sont équivariants par f . Ce théorème est à rapprocher des résultats classiques sur Ω^{For} pour une forme Ω non dégénérée. Dans ce cas, le type de Ω^{For} dépend essentiellement de l'exposant caractéristique de Ω , $\mu(\Omega) = -\lambda'/\lambda''$ où $\lambda', \lambda'' \neq 0$ sont les valeurs propres du champ X_Ω :

- i) Ω^{For} est trivial si $\mu(\Omega) \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ (POINCARÉ-DULAC, [P], [Du]).
- ii) Ω^{For} est trivial si $\mu(\Omega) \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}$ vérifie une condition diophantienne (SIEGEL [S]).
- iii) Ω^{For} s'identifie à l'espace (à un sous-espace si $\mu(\Omega) = 0$) des modules d'un germe $h \in \mathbb{D}$ si $\mu(\Omega) = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$ avec $h'(0) = e^{2i\pi(p/q)}$. (J. ECALLE [E₁], [E₂], J. MARTINET et J.-P. RAMIS [MR_i]).

Cette identification est explicitée par l'assertion suivante, fondamentale dans la preuve du théorème.

Assertion 2 [M, R₁], [Mo]. — Soit Ω une forme non dégénérée d'exposant caractéristique $\mu \in \mathbb{R}^+$. L'équation différentielle $\Omega = 0$ possède deux courbes intégrales L', L'' lisses (*ses séparatrices*) tangentes aux directions propres correspondant à λ', λ'' . La monodromie $h \in \mathbb{D}$ de L' caractérise Ω : deux formes Ω_1, Ω_2 d'exposants caractéristiques $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ sont holomorphiquement (resp. formellement) conjuguées si et seulement si les monodromies h_1, h_2 de $L'_1 = L'_2$ sont holomorphiquement (resp. formellement) conjuguées. En particulier, si $\mu = p/q \in \mathbb{Q}^+$, Ω^{For}

est trivial si et seulement si h est périodique. Dans ce cas Ω possède une *intégrale première holomorphe* du type $x^p y^q$ dans un bon système de coordonnées.

2. Définition de Σ_1^n . — Soit $\Omega_{n,p}$ une forme normale d'un Ω appartenant à Σ_1 . L'entier n est un invariant formel de Ω ; en effet, la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[[x, y]]/I(\Omega)$, où $I(\Omega)$ est l'idéal engendré par a, b ($\Omega = adx + bdy$), est un invariant formel et on a :

$$\dim \mathbb{C}[[x, y]]/I(\Omega) = \dim \mathbb{C}[[x, y]]/I(\Omega_{n,p}) = n + 1.$$

Par contre p n'est pas un invariant formel. Cependant, la condition $2p > n$ dans l'énoncé du théorème est invariante par conjugaison formelle. Nous noterons Σ_1^n l'ensemble des Ω de Σ_1 qui possèdent une forme normale de type $\Omega_{n,p}$ avec $2p > n$.

Dans la suite, nous choisissons des coordonnées (x, y) de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de telle façon que le jet d'ordre $2n$ d'un $\Omega \in \Sigma_1^n$ soit précisément une forme de type $\Omega_{n,p}$. L'équation différentielle $\Omega = 0$ apparaît alors comme une perturbation d'ordre $p > n/2$ de l'équation hamiltonienne $d(y^2 + x^n) = 0$. Ceci est précisé par la PROPOSITION 1 ci-dessous et le résultat du THÉORÈME 4 peut s'énoncer :

Des perturbations d'ordre $p > n/2$ de l'équation $d(y^2 + x^n) = 0$ qui sont formellement conjuguées sont en général holomorphiquement conjuguées.

Par contre, la classification des $\Omega \in \Sigma_1$ qui ont une forme normale $\Omega_{n,p}$ avec $p \leq n/2$ est "zoologique". Elle dépend d'un certain nombre de paramètres, les coefficients des x^i dans $x^p U(x)$ pour $i \leq n/2$. La preuve du théorème repose sur le concept d'holonomie projective $[M, M]$ que nous définissons dans le paragraphe ci-dessous.

3. Résolution minimale des éléments de Σ_1^n . — Une *résolution* d'une forme $\Omega \in \Lambda$ est un morphisme algébrique

$$\pi : (M, D) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0), \quad \pi^{-1}(0) = D$$

obtenu par composition de n_π éclatements ponctuels qui vérifie la propriété suivante : en chaque point m de D il existe une équation locale $f_m = 0$ de D telle que le germe en m , $\tilde{\Omega}_m$ de l'éclaté-divisé $\pi^*(\Omega)/f_m$ soit non dégénéré. π est dite *minimale* si pour toute autre résolution π' de Ω , $n_{\pi'} > n_\pi$; nous la notons π_Ω . Enfin nous dirons que Ω, Ω' ont la même *résolution minimale à l'ordre ν* si $\pi_\Omega = \pi_{\Omega'}$ et si les éclatés divisés de Ω, Ω' ont les mêmes points singuliers m_1, m_2, \dots, m_r et les jets d'ordre ν des $\tilde{\Omega}_{m_k}$ et $\tilde{\Omega}'_{m_k}$ sont colinéaires.

Un élément de Σ_1^n étant formellement conjugué à une forme de type $\Omega_{n,p}$, nous choisissons les coordonnées (x, y) de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de telle façon que son jet d'ordre $2n$ soit une forme de type $\Omega_{n,p}$. Cette condition est supposée satisfaite dans toute la suite.

PROPOSITION 1. — *Un élément Ω de Σ_1^n a la même résolution à l'ordre 1 que $\Omega_n = d(y^2 + x^n)$. Plus précisément si :*

i) $n = 2n'$, D est une chaîne de n' droites projectives D_k , avec $k = 1, 2, \dots, n'$ qui se coupent aux points $m_k = D_k \cap D_{k+1}$ pour $k = 1, 2, \dots, n' - 1$. Les éclatés divisés de Ω ont pour singularités ces $(n' - 1)$ points de croisement et deux points m', m'' de $D_{n'}$ (voir figure 3.1.a).

ii) $n = 2n' + 1$, D est une chaîne de $(n' + 2)$ -droites projectives D_k , $k = 1, 2, \dots, n' + 2$ qui se coupent aux points $m_k = D_k \cap D_{k+1}$ pour $k = 1, 2, \dots, n' + 1$. Les éclatés divisés de Ω ont pour singularités ces $(n' + 1)$ points et un point m de $D_{n'+1}$. (Figure 3.1.b).

Preuve pour $n = 2n'$. — La résolution minimale de Ω_n est le composé π de n' -éclatements qui s'écrivent :

$$y = x_1x; \quad x_1 = x_2x; \quad \dots; \quad x_{n'-2} = x_{n'-1}x; \quad x_{n'-1} = t \cdot x.$$

Les D_k ont pour équation $x = 0$ dans les cartes (x, x_k) pour $k < n$. Dans la carte (t, x) on a :

$$\begin{aligned} \pi(t, x) &= (x, tx^{n'}), D_{n'} = \{x = 0\}, \\ \pi^* \Omega_n &= d(x^n(1 + t^2)) \end{aligned}$$

compte-tenu de l'inégalité $2p > n$ on vérifie aisément que π est une résolution de Ω et que les éclatés divisés de Ω et Ω_n ont les mêmes jets d'ordre 1 aux points de croisement ainsi qu'aux points singuliers $m', m'' \in D_{n'}$ de coordonnées respectives $(i, 0)$, $(-i, 0)$ dans la carte (t, x) .

Preuve pour $n = 2n' + 1$. — La résolution minimale π de Ω_n est le composé de $(n' + 2)$ -éclatements qui s'écrivent

$$y = x_1x; \quad \dots; \quad x_{n'-1} = x_{n'}x; \quad x = ux_{n'}; \quad x_{n'} = ut.$$

Les D_k ont pour équation $x = 0$ dans les cartes (x, x_k) pour $k < n'$; dans la carte (t, u) les projectifs $D_{n'}$, $D_{n'+1}$ ont respectivement pour équation $t = 0$, $u = 0$ et on a

$$\begin{aligned} \pi(t, u) &= (u^2t, u^n t^{n+1}), \\ \pi^*(\Omega_n) &= d(u^{2n} t^n (1 + t)). \end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, on vérifie que π est une résolution minimale de Ω et que les éclatés divisés de Ω et Ω_n ont les mêmes jets d'ordre 1 aux points de croisements des D_k ainsi qu'au point singulier $m \in \mathbb{D}_{n'+1}$, de coordonnées $(-1, 0)$ dans la carte (t, u) .

4. Holonomie projective des éléments de Σ_1^n . — Soit, comme dans le paragraphe précédent, Ω un élément de Σ_1^n dont le $2n$ -jet est du type $\Omega_{n,p}$ avec $2p > n$ et soit $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ sa résolution minimale.

L'équation $\Omega = 0$ définit un feuilletage singulier holomorphe F_Ω au voisinage de 0. Son image réciproque par π , π^*F_Ω est un feuilletage singulier défini sur un voisinage de D par les éclatés divisés de Ω . Ainsi, il a pour points singuliers :

les points de croisements m_k des D_k ;

les points m', m'' si n est pair, le point m si n est impair.

La restriction de π^*F_Ω au complémentaire de ces points est un feuilletage (régulier) encore noté π^*F_Ω ; le complémentaire dans chaque D_k des points singuliers est une feuille L_k de π^*F_Ω . On note H_k la représentation d'holonomie de L_k :

$$H_k : \pi_1(L_k) \longrightarrow \mathbb{D}.$$

Puisque $L_1 = D_1 - \{m_1\}$ (resp. $L_{n'+1} = D_{n'+1} - m_n$ si n est impair), H_1 (resp. $H_{m_{n'+1}}$) a pour image $1_{\mathbb{C}}$ et d'après l'Assertion 2, $\Omega_{\tilde{m}_1}$ (resp. $\tilde{\Omega}_{m_{n'+1}}$) possède une intégrale première. La deuxième séparatrice L_2 en m_1 a ainsi une holonomie périodique. Puisque $L_2 = D_2 - \{m_1, m_2\}$ cette holonomie est aussi celle de L_2 en tant que séparatrice de $\tilde{\Omega}_{m_2}$. D'après l'Assertion 2, $\tilde{\Omega}_{m_2}$ a une intégrale première. Par une induction évidente, on en déduit, compte-tenu de la proposition précédente que si :

i) n est pair. Les $\tilde{\Omega}_{m_k}$ possèdent des intégrales premières pour $k = 1, 2, \dots, n' - 1$. Nous appelons *holonomie projective* de Ω la représentation d'holonomie

$$H_{n'} = H_\Omega : \pi_1(L_{n'}, 0) \longrightarrow \mathbb{D}$$

où 0 est le point de coordonnées $(0, 0)$ dans la carte (t, x) . Soient $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ des éléments de $\pi_1(L_{n'}, 0)$ tels que $m_{n'-1}, m', m''$ soient respectivement des points d'indice 1 pour ces lacets (Figure 3.2.a) et soient

$$f = H_\Omega(\gamma^{-1}), \quad f_j = H_\Omega(\gamma_j) \quad \text{pour } j = 1, 2.$$

Alors, on a :

$$(*) \quad \begin{aligned} f'(0) &= e^{4i\pi/n}, & f_j'(0) &= e^{2i\pi/n} & \text{pour } j &= 1, 2 \\ f &= f_2 \circ f_1, & f^n &= 1_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

ii) n est impair. Les $\tilde{\Omega}_{m_k}$ possèdent des intégrales premières pour $k = 1, 2, \dots, n' + 1$. Nous appelons holonomie projective de Ω la représentation d'holonomie

$$H_{n'+1} = H_{\Omega}: \pi_1(L_{n'+1}, 0) \longrightarrow \mathbb{D}$$

où 0 est le point (0,0) dans la carte (t, u) . Soient $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ des éléments de $\pi_1(L_{n'+1}, 0)$ tels que $m, m_{n'}, m_{n'+1}$ soient respectivement des points d'indice 1 pour ces lacets (Figure 3.2.b) et soient

$$f = H_{\Omega}(\gamma), \quad f_i = H_{\Omega}(\gamma_i) \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Alors on a :

$$(*) \quad \begin{aligned} f'(0) &= e^{-i\pi/n}, & f'_1(0) &= e^{i\pi}, & f'_2(0) &= e^{i\pi(n-1/n)} \\ f &= f_2 \circ f_1, & f_1^2 &= f_2^n = 1_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, l'image de H_{Ω} est notée G_{Ω} ; G_{Ω} est le groupe d'holonomie de Ω .

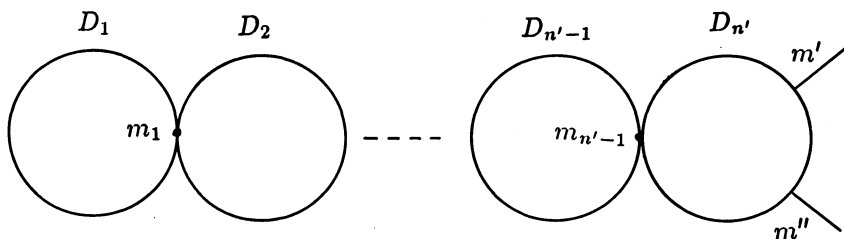


Fig. III 1 a

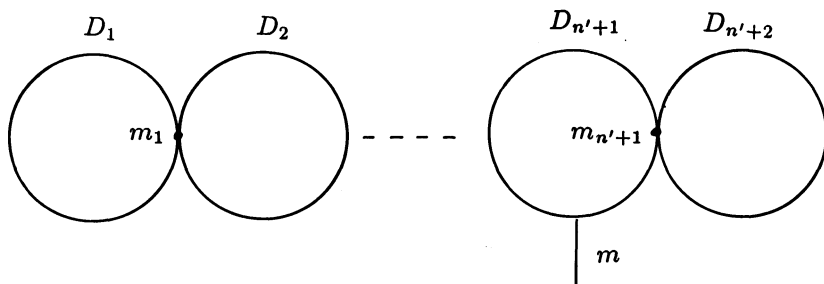


Fig. III 1 b

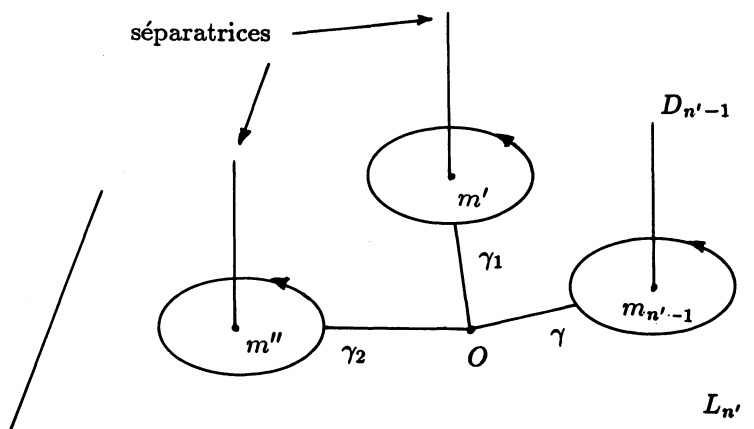


Fig. III 2 a

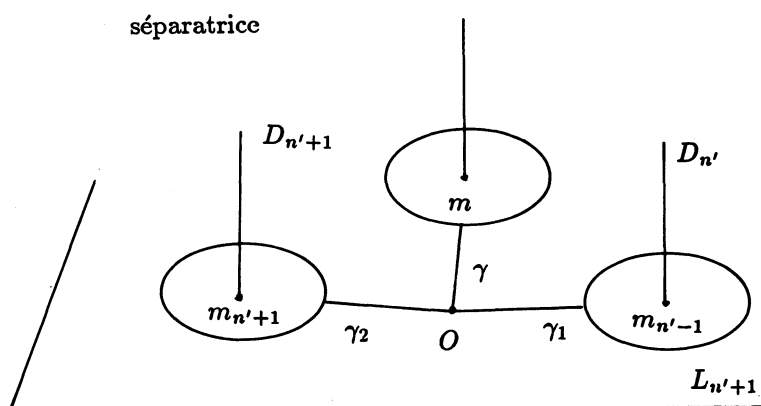


Fig. III 2 b

5. Démonstration du théorème. — Nous allons tout d'abord montrer que c'est une conséquence de la proposition suivante.

PROPOSITION 4 (voir [M₀] pour $n = 3$). — *Deux formes Ω, Ω' de Σ_1^n sont holomorphiquement (resp. formellement) conjuguées si et seulement si leurs groupes d'holonomie $G_\Omega, G_{\Omega'}$ sont holomorphiquement (resp. formellement) conjugués.*

Soient Ω, Ω' deux éléments de Σ_1^n formellement conjugués. Leurs groupes d'holonomie sont formellement conjugués. Nous allons montrer tout d'abord qu'ils le sont holomorphiquement dans les 3 cas suivants :

i) n est impair et G_Ω n'est pas abélien. — G_Ω est engendré par f_1, f_2 qui sont périodiques et f_2 est de période impaire. D'après le COROLLAIRE 1.1, G_Ω et $G_{\Omega'}$ sont holomorphiquement conjugués.

ii) n est impair et G_Ω est abélien. — G_Ω et $G_{\Omega'}$ sont holomorphiquement conjugués au groupe engendré par la rotation $x \rightarrow e^{i\pi/n}x$.

iii) n est pair et G_Ω n'est pas abélien. — D'après le THÉOREME 1 il suffit de montrer que G_Ω n'est pas formellement conjugué à un groupe $G_{\omega,p}$. Si tel était le cas, modulo une conjugaison formelle G_Ω serait engendré par :

$$f_j = e^{2i\pi/n} \cdot \frac{x}{\sqrt[p]{1 - pk_j x^p}} \quad \text{avec } k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2.$$

On vérifie que nécessairement $e^{2i\pi p/n} = -1$ (car $\omega^p = -1$) ainsi que :

$$f = f_2 \circ f_1 = e^{4i\pi/n} \cdot \frac{x}{\sqrt[p]{1 - p(k_1 + k_2 e^{(2i\pi/n)^p})x^p}}.$$

Puisque f est périodique de période paire, d'après la Remarque 1.1,

$$k_1 + k_2 e^{(2i\pi/n)^p} = 0.$$

La condition $e^{2i\pi p/n} = -1$, implique $k_1 = k_2$ et ainsi on aurait $f_1 = f_2$, et G_Ω serait abélien.

Ainsi, il peut apparaître un espace de module non trivial seulement si :

iv) n est pair et G_Ω est abélien. — Si f_1 et f_2 sont périodiques alors G_Ω est holomorphiquement conjugué au groupe engendré par la rotation $x \rightarrow e^{2i\pi/n} \cdot x$; ici encore il n'y a pas de modules. G_Ω étant abélien et $f_1 \circ f_2$ périodique, il nous reste à étudier le cas où f_1 et f_2 ne sont pas périodiques. Montrons qu'alors G_Ω est formellement conjugué à un groupe $A_{n,q,\lambda}$. Puisque $f'_1(0) = f'_2(0) = e^{2i\pi/n}$, $f_2 \circ f_1^{-1}$ est tangent à $1_{\mathbb{C}}$ et $G_\Omega \cap \mathbf{D}_1$ est monogène. D'après la PROPOSITION 1.2, à une conjugaison formelle près G_Ω est engendré par les

$$f_j = \omega \exp t_j X_{p,\lambda} \quad j = 1, 2$$

avec $\omega = e^{2i\pi/n}$, $\omega^p = 1$, $p = q.n$, $q \in \mathbb{N}^*$. En écrivant que $f = f_1 \circ f_2 = \omega^2 \exp(t_1 + t_2) X_{p,\lambda}$ est périodique, on obtient $t_1 + t_2 = 0$ et $f(x) = \omega^2 x$. G_Ω est à conjugaison formelle près engendré par $x \mapsto e^{4i\pi/n}$ et $x \mapsto e^{2i\pi/n} \exp X_{nq,\lambda}$.

Remarque 1. — Soit Ω un élément de Σ_1^n . Un argument de $[M, M]$ montre que G_Ω est abélien et est engendré par des éléments périodiques si et seulement si Ω possède une intégrale première holomorphe. Le THÉORÈME 3 peut encore s'énoncer : deux éléments Ω, Ω' de Σ_1^n qui sont formellement conjugués le sont holomorphiquement si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

G_Ω n'est pas abélien,

G_Ω est abélien et Ω possède une intégrale première holomorphe ou même formelle.

Remarque 2. — Soit G un sous-groupe de \mathbb{D} qui est engendré par deux éléments f_1, f_2 tels que :

$$f_1'(0) = f_2'(0) = e^{i\pi/n'} (f_2 \circ f_1)^{n'} = 1_{\mathbb{C}}.$$

Il existe un élément $\Omega \in \Sigma_1^{2n'}$ tel que G_Ω soit le sous-groupe de \mathbb{D} engendré par (f_1, f_2) . En effet, les éléments $f_j \in \mathbb{D}$ (à partie linéaire périodique) sont réalisables comme difféomorphismes de monodromie d'équations différentielles Ω_i non dégénérées de 1-jet $n'ydx + xdy$ ($[M, R_2]$).

En utilisant le théorème de Grauert classifiant les voisinages tubulaires de courbes lisses à classe de CHERN négative, on construit à partir des Ω_i un feuilletage F d'une variété (M, D) qui correspond à la résolution minimale d'une forme $\Omega \in \Sigma_1^n$ avec $G_\Omega = (f_1, f_2)$ (cf. $[L]$ pour un problème analogue). En particulier, il est possible de réaliser comme G_Ω , $\Omega \in \Sigma_1^n$, tous les groupes formellement conjugués à un groupe $A_{n,q,\lambda}$ et on a évidemment

$$\Omega^{\text{For}} \equiv F_\Omega^{\text{For}} \equiv A_{n,q,\lambda}^{\text{For}}.$$

Lorsque $\lambda = 0$, de tels Ω ont une équation algébrique. Par exemple :

$$\Omega = d(y^2 + x^4) + 4i\pi x(y^2 + x^4)(2ydx - xdy)$$

réalise le groupe $A_{4,1,0}$. Ceci se montre en remarquant que si $G_\Omega = A_{n,q,0}$, $\pi^*\Omega = 0$ est, au voisinage de $D_{n'}$, conjuguée à un "revêtement" d'une équation de Riccati.

Preuve de la PROPOSITION 4. — Elle se scinde en deux parties :

1) *La conjugaison des formes implique la conjugaison des holonomies.* Soient Ω, Ω' deux éléments de Σ_1^n formellement conjugués par $\Phi \in$

$\mathbb{C}[[x, y]]^2$. On peut toujours supposer que $\Phi_N = J^N \Phi$ est $1_{\mathbb{C}}$ pour N grand et ainsi Ω et Ω' ont la même résolution minimale, $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$. Nous notons H_Ω , $H_{\Omega'}$ leur représentation d'holonomie évaluée sur la transversale $\{t = 0\}$.

Lorsque Φ est holomorphe, tangent à $1_{\mathbb{C}}$ à un ordre grand, il se relève en un difféomorphisme $\tilde{\Phi} : (M, D) \leftarrow \triangleright$ qui applique $\pi^* F_\Omega$ sur $\pi^* F_{\Omega'}$ et tel que $\tilde{\Phi}/D = 1_D$. Sa restriction à $\{t = 0\}$ conjugue H_Ω et la représentation d'holonomie de Ω' évaluée sur $\tilde{\Phi}(\{t = 0\})$. Ainsi cette dernière est holomorphiquement conjuguée à $H_{\Omega'}$.

Lorsque Φ est formel, son jet d'ordre k , Φ_k se relève en $\tilde{\Phi}_k : (M, D) \leftarrow \triangleright$ qui applique $\pi^* F_\Omega$ sur $\pi^* F_{\Omega'_k}$ avec $\Omega'_k = \Phi_k^* \Omega$; les représentations H_Ω et $H_{\Omega'_k}$ sont conjuguées. D'autre part, il existe une suite $\ell(k)$ tendant vers l'infini telle que :

$$\pi^*(\Omega'_k) \wedge \pi^*(\Omega') = 0 \pmod{x^{\ell(k)}}$$

où $x = 0$ est l'équation de $D_{n'}$ si n est pair, de $D_{n'+1}$ si n est impair. Ainsi $H_{\Omega'_k}$ et $H_{\Omega'}$ sont conjugués modulo $x^{\ell(k)}$ par un difféomorphisme polynomial φ_k . La famille φ_k est filtrée; sa limite φ conjugue formellement $H_{\Omega'}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} H_{\Omega'_k}$.

2) *La conjugaison des holonomies implique la conjugaison des formes.* Ce point est démontré pour $n = 3$ dans $[M_0]$; la démonstration lorsque n est impair est essentiellement la même. Dans tous les cas elle repose sur l'assertion suivante :

Assertion 1. — Soit Ω un élément de Σ_1^n ; il existe des coordonnées (x, y) de $\mathbb{C}^2, 0$ dans lesquelles Ω s'écrit à unité multiplicative près :

$$\Omega = d(y^2 + x^n) + f(x, y)(nydx - 2xdy), \quad \text{où } f \in \mathbb{C}\{x, y\}.$$

Preuve. — Elle résulte du fait suivant : puisque Ω à la même résolution minimale que $d(y^2 + x^n)$, Ω possède une séparatrice Z (ou deux lorsque n est pair) tangente à l'ordre n à $(y^2 + x^n = 0)$; dans un bon système de coordonnées Z s'écrit $\{X^2 + Y^n = 0\}$. Par suite :

$$\Omega \wedge d(X^2 + Y^n) = (X^2 + Y^n)H_1 \cdot dX \wedge dY, \quad H_1 \in \mathbb{C}\{X, Y\}.$$

Comme $X^2 + Y^n = 0$ est une séparatrice de $2YdX - nXdY$, on a :

$$\Omega \wedge (nYdX - 2XdY) = (Y^2 + X^n)H_2 \cdot dX \wedge dY, \quad H_2 \in \mathbb{C}\{X, Y\}.$$

Puisque :

$$(nYdX - 2XdY) \wedge d(Y^2 + X^n) = 2n(Y^2 + X^n)dX \wedge dY,$$

on obtient

$$\Omega = -\frac{H_2}{2n}d(Y^2 + X^n) + \frac{H_1}{2n}(nYdX - 2XdY).$$

On conclut en remarquant que $j^1\Omega = 2YdY$ implique $H_2(0) \neq 0$.

Il suffit de prouver que la conjugaison des holonomies implique la conjugaison des formes dans le cadre holomorphe. En effet, en raisonnant comme dans le paragraphe précédent sur les jets d'ordre k , le cas formel se déduit du cas holomorphe.

Soient Ω_j , $j = 1, 2$ deux éléments de Σ_1^n qui s'écrivent

$$\Omega_j = d(y^2 + x^n) + f_j(x, y) \cdot (2xdy - nydx).$$

Ces formes ayant la même résolution à l'ordre 1, $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, nous supposons que leurs représentations d'holonomie H_{Ω_j} , $j = 1, 2$ évaluées sur la même transversale $t = 0$, sont liées par :

$$H_{\Omega_2} = \varphi_* \circ H_{\Omega_1} \quad \text{avec} \quad \varphi \in \mathbb{D}_1.$$

Nous allons montrer que φ s'étend en un difféomorphisme $\tilde{\Phi}$ holomorphe de (M, D) qui conjugue les $\pi^*F_{\Omega_j}$. Lorsque n est impair les arguments de cette démonstration sont les mêmes que pour le cas $n = 3$. Ce cas étant traité en détail dans $[M_0]$, nous allons seulement prouver que pour n pair φ s'étend en $\tilde{\Phi} : (M, D) \leftarrow$. Soient U_j , $j = 1, 2$ des voisinages de 0 sur lesquels Ω_j possèdent un représentant holomorphe noté encore Ω_j . Les feuilletages $\pi^*F_{\Omega_j}$ sont définis sur les $\pi^{-1}(U_i)$ par les $\pi^*(\Omega_j)$. D'après l'Assertion 1, leurs restrictions à

$$\pi^{-1}(U_j - \{x(y^2 + x^n) = 0\}) = V_j$$

sont transverses à la fibration

$$p : M - \{t = i, t = -i, \Delta\} \longrightarrow D'_n - \{m', m''\} = L_{n'}$$

qui s'écrit $p(t, x) = x$ dans la carte (t, x) , où Δ est la droite $\pi^{-1}(\{x = 0\})$.

L'argument de "relèvement des chemins" situés dans la feuille $L_{n'}$ et d'origine le point $(0, 0)$ permet d'étendre φ en un difféomorphisme $\tilde{\Phi}$ holomorphe de V_1 dans V_2 qui conjugue les restrictions de $\pi^*F_{\Omega_1}$ et $\pi^*F_{\Omega_2}$ à ces ouverts (voir $[M, M]$). Les holonomies de $L_{n'}$ (vu comme séparatrice de $\tilde{\Omega}_{1, m'}$ et $\tilde{\Omega}_{2, m'}$) étant holomorphiquement conjuguées l'argument de $[M_0]$ ou $[M, R_1]$ prouve que φ s'étend aussi de façon unique par relèvement des chemins sur un voisinage de m' .

Enfin, $\tilde{\Phi}$ se prolonge le long de $\Delta \cap V_1$ par le théorème d'Hartogs : en effet, les feuilletages $\pi^* F_{\Omega_j}$ sont transverses à Δ (comme les Ω_j le sont à $x = 0$) et les applications composantes de Φ dans une carte qui contient Δ sont bornées par construction.

L'application $\tilde{\Phi}$ de $U_1 - \{0\}$ dans $U_2 - \{0\}$ définie par

$$\Phi(\pi^{-1}(x, y)) = \tilde{\pi}(\Phi(x, y))$$

est un difféomorphisme holomorphe qui se prolonge en un difféomorphisme holomorphe de U_1 sur U_2 appliquant F_{Ω_1} sur F_{Ω_2} .

4. Espaces des modules topologiques des sous-groupes de \mathbb{H}

Rappelons que \mathbb{H} est le sous-groupe de \mathbb{D} constitué des germes en 0 d'homographies $h : x \rightarrow ax/(1 + bx)$. La détermination de l'espace de modules topologiques d'un sous-groupe de \mathbb{H} repose essentiellement sur le résultat "algébrique" de la PROPOSITION 1 ci-dessous et de son corollaire. C'est seulement dans le paragraphe 2 que nous aborderons les problèmes de conjugaison topologique.

1. Sous-groupes de \mathbb{D} isomorphes à un sous-groupe de \mathbb{H} .

PROPOSITION 1. — *Soit G un sous-groupe non abélien de \mathbb{D} et soit N la transformation normalisante d'un élément $h \neq 1_{\mathbb{C}}$ de $[G, G]$, $N_*(h) = \exp X_{p, \lambda}$. Si G est isomorphe à un sous-groupe H de \mathbb{H} alors $\lambda = 0$ et :*

$$N_*(G) \subset \{a \exp tX_{p, 0} ; a \in \mathbb{C}^*, t \in \mathbb{C}\}.$$

De plus, si H n'est pas homographiquement conjugué à $G_{-1, 1}$, N est convergente.

COROLLAIRE 1. — *Un sous-groupe non abélien G de \mathbb{D} topologiquement conjugué à un sous-groupe H de \mathbb{H} est holomorphiquement conjugué à un sous-groupe H' de \mathbb{H} si H n'est pas homographiquement conjugué à $G_{-1, 1}$.*

Ce corollaire est une conséquence immédiate de la proposition : l'homéomorphisme de conjugaison induit un isomorphisme de G sur H . L'ordre de contact de h avec $1_{\mathbb{C}}$ étant un invariant topologique, on a $p = 1$; c'est-à-dire $N_*(G) \subset \mathbb{H}$.

On a une curieuse application de la proposition lorsque l'isomorphisme est induit par la projection canonique $j_{\mathbb{H}}$ de \mathbb{D} sur \mathbb{H} :

$$j_{\mathbb{H}}(g)(x) = \frac{ax}{1 + tx} \quad \text{si} \quad g(x) = ax(1 - tx + \dots).$$

COROLLAIRE 2. — *Un sous-groupe non abélien G de \mathbb{D} est holomorphiquement conjugué à sa projection $j_{\mathbb{H}}(G)$ si la restriction de $j_{\mathbb{H}}$ à G est injective et si $j_{\mathbb{H}}(G)$ n'est pas homographiquement conjugué à $G_{-1,1}$.*

Démonstration de la PROPOSITION 1. — Notons H le groupe $j_{\mathbb{H}}(G)$, N une transformation normalisante d'un élément non trivial h de $[G, G]$, $N_*(h) = \exp(X_{p,\lambda})$. La démonstration s'appuie sur la relation suivante :

$$[g_1*(h_1), h_1] = 1_{\mathbb{C}}, \quad \text{si } g_1 \in H, h_1 \in \mathbb{H} \cap D_1;$$

de plus $g_1*(h_1) = h_1$ si et seulement si $g_1 \in \mathbb{H} \cap D_1$. Il est clair que $h_1 = j_{\mathbb{H}}(h)$ est un élément de $[H, H]$, donc de $\mathbb{H} \cap D_1$. On en déduit que :

$$[g_*(h), h] = 1_{\mathbb{C}} \quad \text{si } g \in G.$$

Ainsi, $g_*(h)$ est un élément de $C_1(h)$. D'après l'assertion 0.1.6. :

$$(N_*g)_* \exp X_{p,\lambda} = \exp t_g X_{p,\lambda} \quad \text{avec } t_g \in \mathbb{C}.$$

L'assertion 0.1.1. conduit alors à :

$$(N_*g)_* X_{p,\lambda} = t_g X_{p,\lambda}.$$

Puisque G n'est pas abélien il existe un élément $g \in G$ tel que $t_g \neq 1$. D'après l'assertion 0.1.4., λ est nul et, pour tout élément $g \in G$, on a :

$$N_*(g) = a_g \exp t_g X_{p,0}, \quad a_g, t_g \in \mathbb{C}.$$

Ceci prouve la PROPOSITION 1 compte-tenu du THÉORÈME 1.

2. Énoncé du théorème. — Deux sous-groupes G, G' de \mathbb{D} sont *topologiquement conjugués*, $G \stackrel{\text{Top}}{\sim} G'$, s'il existe un germe d'homéomorphisme Φ de $(\mathbb{C}, 0)$ qui préserve l'orientation tel que $\Phi_* G = G'$. *L'espace des modules topologiques* de G est l'ensemble

$$G^{\text{Top}} = \{[G']_{\mathbb{D}}; G' \stackrel{\text{Top}}{\sim} G, G' \subset \mathbb{D}\}.$$

Il est dit *trivial* s'il ne contient que $[G]_{\mathbb{D}}$.

Par exemple, lorsque G est monogène, engendré par $h \in \mathbb{D}$:

$$G^{\text{Top}} \text{ est trivial si } h \text{ est linéarisable et } |h'(0)| = 1$$

$$G^{\text{Top}} = \mathbb{C} \times G^{\text{For}} \text{ si } h \text{ est tangent à } 1_{\mathbb{C}}.$$

Lorsque h n'est pas linéarisable, on se ramène aisément à ce dernier cas si $h'(0)$ est une rotation périodique. Par contre, lorsque $h'(0)$ est une

rotation irrationnelle "proche" des rotations périodiques le calcul de G^{Top} est un problème ouvert difficile.

Si G n'est pas abélien, G^{Top} est trivial dès que J^1G vérifie des conditions de densité dans \mathbb{C}^* , S^1 ou \mathbb{R}^* [Ce] [Ce,S].

Ici nous calculons H^{Top} pour les sous-groupes non abéliens H de \mathbb{H} . Le cas abélien ne pose aucune difficulté.

Pour étudier les propriétés des homographies, il est commode d'envoyer $0 \in \mathbb{C}$ sur le point à l'infini, ∞ , de $\mathbb{C}P(1)$ par le changement de carte $x \rightarrow 1/x$. Un élément $h \in \mathbb{H}$ s'écrit alors :

$$h(x) = ax + b, \quad a \in \mathbb{C}^*, \quad b \in \mathbb{C}.$$

Nous identifions \mathbb{C}^* au sous-groupe des similitudes S par $a \rightarrow s_a$ avec $s_a(x) = ax$ et \mathbb{C} au sous-groupe des translations T par $b \rightarrow t_b$ avec $t_b(x) = x + b$.

Si H est un sous-groupe de \mathbb{H} , nous notons $[H]_{\mathbb{H}}$ l'ensemble des sous-groupes de \mathbb{H} qui lui sont homographiquement conjugués. Supposons J^1H réel et soit L un élément de $GL(2, \mathbb{R})$. Alors L_*H est un sous-groupe de \mathbb{H} ; c'est l'ensemble des

$$L_*h(x) = ax + L(b) \quad \text{avec} \quad h(x) = ax + b \in H.$$

THÉORÈME 4. — Soit H un sous-groupe non abélien de \mathbb{H} . Si

- a) J^1H n'est pas réel, alors H^{Top} est trivial;
- b) $H = G_{-1,1} = \{s_{-1}, t_1\}$, alors $H^{\text{Top}} = G_{-1,1}^{\text{For}}$;
- c) J^1H est réel et H n'est pas homographiquement conjugué à $G_{-1,1}$ alors $H^{\text{Top}} = \{[L_*H]_{\mathbb{H}}; L \in GL^+(2, \mathbb{R})\}$.

D'après la PROPOSITION 4.1, si $G_{-1,1} \stackrel{\text{Top}}{\sim} G$ avec $G \subset \mathbb{D}$, alors G est formellement conjugué à $G_{-1,1}$. Réciproquement, supposons que $G \subset \mathbb{D}$ soit formellement conjugué à $G_{-1,1}$. Alors G est engendré par l'involution $I(x) = -x$ et un élément $g \in \mathbb{D}_1$ formellement conjugué à $x \rightarrow x/(1-x)$ dont le cocycle $c(g)$ est I -équivariant. La synthèse de g à partir de $c(g)$ fournit naturellement un homéomorphisme qui conjugue G à $G_{-1,1}$. Ceci prouve le point b) du théorème.

Dans toute la suite de ce chapitre H désigne un sous-groupe non abélien de \mathbb{H} qui n'est pas homographiquement conjugué à $G_{-1,1}$. D'après le COROLLAIRE 4.1, si $H \stackrel{\text{Top}}{\sim} G$ avec $G \subset \mathbb{D}$, alors G est holomorphiquement conjugué à un sous-groupe H' de \mathbb{H} . Ceci signifie que :

$$H^{\text{Top}} = \{[H']_{\mathbb{H}}; H' \stackrel{\text{Top}}{\sim} H \quad \text{avec} \quad H' \subset \mathbb{H}\}.$$

3. Preuve du théorème pour un sous-groupe à deux générateurs.

PROPOSITION 2. — Soit H_a le sous-groupe de \mathbb{H} engendré par t_1 et s_a avec $a \neq 1$. Si $H_a \stackrel{\text{Top}}{\sim} H$ avec $H \subset \mathbb{H}$ alors H est homographiquement conjugué à H_a .

Démonstration de la PROPOSITION 2. — Modulo une conjugaison dans \mathbb{H} , nous pouvons supposer que $H = H_{a'}$ et que l'homéomorphisme de conjugaison Φ échange s_a et $s_{a'}$ et laisse fixe t_1 . Il s'agit donc de montrer que $a = a'$.

Lorsque $|a| = 1$, il est clair que $|a'| = 1$. Puisque le nombre de rotation est un invariant topologique, a est alors égal à a' . Supposons dans la suite $|a| > 1$; évidemment on a aussi $|a'| > 1$. Montrons que :

(i) Les arguments α, α' de a, a' sont égaux. Φ_* échange $s_a^p t_1$ et $s_{a'}^p t_1$ pour $p \in N$. Ainsi pour $|x|$ assez grand, on a :

$$\Phi(x + a^p) = \Phi(x) + a'^p.$$

En particulier, Φ échange leurs rayons invariants asymptotiques (voir 0.3.2). $\mathbb{R}^+ e^{2i\pi p\alpha}$, $\mathbb{R}^+ e^{2i\pi p\alpha'}$ et définit ainsi une application

$$\varphi : \Delta = \{e^{2i\pi p\alpha} ; p \in N\} \longrightarrow \Delta' = \{e^{2i\pi p\alpha'} ; p \in N\}$$

qui est évidemment bijective. Plus précisément φ est monotone en ce sens : si m_1, m_2, m_3 sont trois points de Δ tels que pour une orientation de S^1 on ait $m_1 < m_2 < m_3$, pour la même orientation on vérifie que $\varphi(m_1) < \varphi(m_2) < \varphi(m_3)$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, ceci prouve que $\alpha = \alpha'$. Lorsque $\alpha \notin \mathbb{Q}$, Δ, Δ' sont denses dans S^1 et φ se prolonge en un homéomorphisme de S^1 qui conserve l'orientation et conjugue les rotations d'angle α et α' ; par suite, $\alpha = \alpha'$.

(ii) $|a|$ et $|a'|$ sont égaux. Soit $C = \{z \in \mathbb{C} ; \rho \leq |z| < |a|\rho\}$ une couronne fondamentale pour s_a . Pour ρ assez grand, son image $\Phi(C)$ est un domaine fondamental de $s_{a'}$. Pour $\rho' > 0$ et $p \in N$, fixés, assez grands, $\Phi(C_\rho)$ est contenu dans la couronne

$$C' = \{z \in \mathbb{C} ; \rho' \leq |z| < |a'|^p \rho'\}.$$

Puisque Φ_* laisse fixe t_1^n , pour $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, assez grand on a :

$$\Phi(x + n) = \Phi(x) + n \quad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, il existe $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $x + n$ appartient à $a^{k(n)}C$ et son image par Φ , $\Phi(x) + n$, appartient à $a'^{k(n)}\Phi(C) \subset C'$. Ceci se traduit par les doubles inégalités :

$$|a|^{k(n)}\rho \leq a + n < |a|^{k(n)+1}\rho$$

et

$$|a'|^{k(n)}\rho' \leq |\Phi(x) + n| < |a'|^{k(n)+p}\rho'.$$

On en déduit :

$$\text{Log } |a| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } n}{k(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } n}{k(n) + p} = \text{Log } |a'|.$$

4. Preuve du théorème lorsque J^1H n'est pas réel. — Soient H, H' deux sous-groupes de \mathbb{H} topologiquement conjugués par Φ . Modulo des conjugaisons homographiques et compte-tenu de la proposition précédente, on peut supposer que t_1 et s_a appartiennent simultanément à H et H' et que :

$$\Phi_* t_1 = t_1, \quad \Phi_* s_a = s_a.$$

Nous allons montrer que si g appartient à H , $g' = \Phi_* g$ est égal à g . Notons :

$$g: x \longrightarrow \alpha x + \beta \quad g': x \longrightarrow \alpha' x + \beta'.$$

Les nombres α, α' sont invariants par conjugaison homographique. En appliquant la PROPOSITION 2 aux couples $(t_1, g), (t_1, g')$ on obtient déjà $\alpha = \alpha'$.

L'homéomorphisme Φ échange les triplets (t_1, t_a, g_1) et (t_1, t_a, g'_1) , avec

$$\begin{aligned} g_1 = [t_a, g]: x &\longrightarrow x + \rho\beta, & t_a &= s_a * t_1 \\ g'_1 [t_a, g']: x &\longrightarrow x + \rho\beta' & \text{où } \rho &= \frac{a-1}{\alpha}. \end{aligned}$$

On peut toujours supposer que $\text{Rel } a, \text{Rel } \rho\beta' \geq 0$. Pour $x > 0$ fixé, assez grand et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Phi(t_1^n(x)) = t_1^n(\Phi(x)), \quad \Phi(t_a^n(x)) = t_a^n(\Phi(x)), \quad \Phi(g_1^n(x)) = g_1'^n(\Phi(x)).$$

Le parallélogramme P de sommets $x, x+1, x+a$ est un domaine fondamental pour le groupe engendré par t_1, t_a . Il existe deux suites $k(n), k'(n)$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g_1^n(x) \in t_a^{k'(n)}(P) \quad \text{et donc} \quad g_1'^n(x) \in t_1^{k(n)} \cdot t_a^{k'(n)}(\Phi(P)).$$

Par suite il existe $K, K' > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|n\rho\beta - (k(n) + k'(n)a)| < K \quad \text{et} \quad |n\rho\beta' - k(n) + k'(n)a| < K'.$$

Il en résulte que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n) + k'(n)a}{n} = \beta = \beta'.$$

5. Démonstration du théorème lorsque $J^1H \subset \mathbb{R}$. — Soit H un sous-groupe non abélien de \mathbb{H} qui n'est pas conjugué à $G_{-1,1}$ et tel que J^1H soit réel.

L'ensemble $T_H = \{b; t_b \in H\}$ est un sous-groupe abélien de \mathbb{C} invariant par la multiplication par les éléments de J^1H . Notant \overline{T}_H l'adhérence de T_H , on est dans l'une des quatre situations suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{T}_H &= \mathbb{C}, \quad \overline{T}_H = b_1\mathbb{R}, \quad \overline{T}_H = b_1\mathbb{R} + b_2\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad J^1H = \{-1, 1\}, \\ T_H &= b_1\mathbb{Z} + b_2\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad J^1H = \{-1, 1\} \end{aligned}$$

où $b_1, b_2 \in \mathbb{C}^*$ sont \mathbb{R} -indépendants. Modulo une conjugaison par un élément de \mathbb{H} , nous pouvons supposer que H contient :

la translation t_1 et que $b_1 = 1$ dans les trois derniers cas,
une similitude s_{a_0} , avec $a_0 \neq 1$.

Soit H' un sous-groupe de \mathbb{H} topologiquement conjugué à H par un homéomorphisme Φ (défini au voisinage de ∞). D'après la PROPOSITION 2, nous pouvons supposer que t_1 et s_{a_0} sont invariants par Φ_* . D'autre part, Φ_* induit un isomorphisme (continu) φ entre les groupes abéliens $T_H, T_{H'}$ tel que pour $|x|$ assez grand :

$$(*) \quad \Phi(x + b) = \Phi(x) + \varphi(b) \quad \text{si} \quad b \in T_H.$$

*Démonstration de $H' = L_*H$ avec $L \in \text{GL}^+(2, \mathbb{R})$.* — Etudions séparément les différents cas :

c₁) $\overline{T}_H = \mathbb{C}$; φ se prolonge par continuité en $L \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$. D'après (*) Φ est une application \mathbb{R} -affine de partie linéaire L . Puisque s_{a_0} est invariant par Φ_* , on a :

$$\Phi(a_0x) = a_0\Phi(x),$$

et ainsi $\Phi \equiv L$ et $H' = L_*H$.

$c_2)$ $\overline{T}_H = \mathbb{R}$; H est un sous-groupe du groupe $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ des homographies à coefficients réels; en effet si

$$g(x) = ax + b \in H, \quad [g, s_{a_0}](x) = x + \left(\frac{1}{a_0} - 1\right)b$$

et b est réel. Les mêmes arguments que dans le cas précédent montrent que la restriction de Φ à \mathbb{R} est un élément de $\mathrm{GL}(1, \mathbb{R})$; c'est en fait 1 $_{\mathbb{R}}$ puisque la translation t_1 est laissée fixe. Par suite $H = H'$.

$c_3)$ $T_H = \mathbb{Z} + b_2\mathbb{Z}$ et $J^1H = \{-1, 1\}$. Par hypothèse, H contient t_1, s_{-1}, t_{b_2} avec $b_2 \notin \mathbb{R}$. Si $g \in H$ n'est pas une translation, $s_{-1} \circ g$ en est une. Ainsi H est engendré par t_1, s_{-1}, t_{b_2} et $\Phi_*H = H'$ l'est par $t_1, s_{-1}, t_{\varphi(b_2)}$.

Montrons que $\varphi(b_2)$ n'est pas réel; T_H n'étant pas monogène $T_{H'}$ n'est pas monogène. Si $\varphi(b_2)$ était réel $T_{H'}$ serait un sous-groupe dense de \mathbb{R} et l'orbite d'un point par H' posséderait des points d'accumulation; ce qui n'est pas le cas pour l'orbite d'un point par H . Ainsi, H' est engendré par $t_1, s_{-1}, t_{\varphi(b_2)}$ avec $\varphi(b_2) \notin \mathbb{R}$ et on a :

$$H' = L_*H, \quad \text{avec } L \in \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}), \quad L(1) = 1, \quad L(\varphi(b_2)) = \varphi(b).$$

$c_4)$ $\overline{T}_H = \mathbb{R} + b_2Z$ et $J^1H = \{-1, 1\}$. La preuve précédente montre déjà que Φ_* applique (t_1, s_{-1}, t_{b_2}) sur $(t_1, s_{-1}, t_{\varphi(b_2)})$ avec $\varphi(b_2) \notin \mathbb{R}$. Soit encore L l'élément de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ correspondant ($L(1) = 1, L(b_2) = \varphi(b_2)$). Comme dans le cas 2, la restriction de Φ à \mathbb{R} est l'identité et ainsi $H' = L_*H$.

Nous avons donc établi dans le cas où j^1H est réel que la conjugaison topologique implique la conjugaison via un élément de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ (à distance finie via des homéomorphismes de type $z \rightarrow L_{\infty}(z) = 1/L(1/z)$, $L \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$). On a ainsi prouvé que :

$$H^{\mathrm{Top}} = \{[L_*H]_{\mathbb{H}}; L \in \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})\}.$$

On remarque que H^{Top} s'identifie à un quotient de l'espace \mathbb{M} des modules du Tore \mathbb{T}^2 . Dans le cas $c_2)$ où $\overline{T}_H = \mathbb{R}$, H^{Top} est trivial, dans le cas $c_3)$, H^{Top} est précisément \mathbb{M} (position du réseau $T_H = \mathbb{Z} + b_2\mathbb{Z}$). Les cas c_1 et c_4 sont intermédiaires.

Remarques. — Les résultats topologiques obtenus ici s'appliquent aussi aux diagrammes et aux équations différentielles. Donnons deux exemples de telles applications :

1) un diagramme $d = (f_1, f_2)$ topologiquement conjugué au diagramme $(x^2, x^3/(1+x)^3)$ lui est holomorphiquement conjugué; en fait on

peut classifier les diagrammes ensemblistement conjugués à $(x^2, x^3/(1+x)^3)$.

2) une équation de Pfaff $\Omega = adx + bdy$ topologiquement conjuguée à $\Omega_R = d(y^2 + x^3) + x(2xdy - 3ydx)$ lui est holomorphiquement conjuguée; ceci résulte du fait que Ω_R conduit après résolution à une équation de Ricatti, son holonomie projective étant de type $(-x, jx/(1+x))$.

Note. — E. GHYS nous a signalé, après la remise de notre manuscrit, un article de A.A. SHCHERBAKOV, topological and analytical conjugacy of non commutativ groups of germs of conformal mappings. Trudy Seminera Imeni, I, G, Pertrovskogo, n°10, p. 170–196, (1984), dans lequel il est montré le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient G, G' deux sous-groupes de \mathbb{D} topologiquement conjugués. Alors si G est non résoluble, G et G' sont holomorphiquement conjugués.*

D'autre part, on vérifie aisément qu'un sous-groupe résoluble G non commutatif de \mathbb{D} est formellement conjugué à un sous-groupe dont les éléments s'écrivent $a \exp tX_{p,0}$ où $p \in \mathbb{N}$ est fixé et où $a, t \in \mathbb{C}$. C'est-à-dire que G est formellement conjugué ou relevé par $z \rightarrow z^p$ d'un sous-groupe du groupe \mathbb{H} des homographies. Il est clair que nos résultats sur la classification de ces sous-groupes se "relèvent" par $z \rightarrow z^p$.

Ainsi nos résultats complètent agréablement le théorème de A.A. SHCHERBAKOV et permettent d'obtenir une description complète de l'espace des modules (topologique-formel) des sous-groupes non abéliens de \mathbb{D} .

BIBLIOGRAPHIE

- [C] CAMACHO (C.). — On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in \mathbb{C}^2 , *Astérisque*, t. **59–60**, 1978, p. 83–94.
- [Ce] CERVEAU (D.). — Espaces de modules de certaines équations différentielles du premier ordre. *preprint Dijon*, 1986.
- [Ce,S] CERVEAU (D.) et SAD (P.). — Problèmes de modules pour les formes différentielles singulières dans le plan complexe, *Comment. Math. Helv.*, t. **61**, 1986, p. 222–253.
- [D] DUFOUR (J.-P.). — Diagrammes d'applications différentiables. *Thèse Montpellier*, 1979.
- [Du] DULAC (H.). — Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, *J. École Pol.*, t. **2,9**, 1904, p. 1–125.
- [E1] ECALLE (J.). — *Les fonctions résurgentes. Tome II Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération.* — Publ. Math. d'Orsay, 1981.

- [E₂] ECALLE (J.). — *Les fonctions résurgentes. Tome III L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux.* — Publ. Math. d'Orsay, 1985.
- [H] HERMAN (M.). — Recent results and some open questions on Siegel's linearisation theorem ..., *preprint Centre Math. École Polytechnique*, 1986.
- [L] LINS (N.). — *Construction of singularities of holomorphic vector-fields in \mathbb{C}^2 with a given holonomy.* — Preprint IMPA.
- [Ma] MALGRANGE (B.). — Travaux d'Ecalte et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques, *Séminaire Bourbaki*, [Exposé n°582], novembre 1981.
- [M, R₁] MARTINET (J.) et RAMIS (J.-P.). — Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre, *Publ. Math. IHES*, t. **55**, 1982, p. 63-124.
- [M, R₂] MARTINET (J.) et RAMIS (J.-P.). — Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, t. **16**, 1983, p. 571-621.
- [M, M] MATTEI (J.-F.) et MOUSSU (R.). — Holonomie et intégrales premières, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, t. **13**, 1980, p. 409-523.
- [Mo] MOUSSU (R.). — *Holonomie évanescence des équations différentielles dégénérées transverses.* In *singularities and Dynamical systems.* — North Holland 1985, pp. 151-173.
- [Mo] MOUSSU (R.). — Lettre de Moussu à Martinet.
- [P] POINCARÉ (H.). — Mémoires sur les courbes définies par une équation différentielle, *J. Math. Pures Appl.*, t. **3.7**, 1881, p. 375-442.
- [R] RAMIS (J.-P.). — Preprint IMPA, 1986.
- [S] SIEGEL (C.L.). — Über der normal Form analytischen Differentialgleichungen in der Näher einer Gleichgewichtslösung. *Göttingen Nachrichten des Wissenschaften*, 1952, pp. 21-30.
- [T] TAKENS (F.). — Singularities of vector fields, *Publ. Math. IHES*, t. **43**, 1974, p. 47-100.
- [V] VORONIN (S.M.). — Analytic classification of pair of involutions and its applications, *Functional Anal.*, t. **16**, n° 2, 1982, p. 94-100.