BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 130-142
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__130_0>

Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre;
par M. HALPHEN.

(Séance du 19 mars 1873)

INTRODUCTION

Quand on considère des courbes ou des surfaces pour la détermination desquelles M conditions sont nécessaires, il y a lieu de se demander le nombre de ces courbes ou de ces surfaces qui satisfont à M conditions données. Il peut arriver que quelques-unes de ces conditions aient entre elles une telle dépendance qu'il ne soit pas possible de les considérer comme des conditions séparées sans introduire des solutions étrangères au problème proposé. On peut employer les noms de condition double, triple, etc., à désigner l'ensemble de plusieurs conditions inséparables.

D'une manière générale, les M conditions données peuvent se composer de m_1 conditions simples, m_2 conditions doubles, ..., m_i conditions multiples d'ordre i, ..., indépendantes les unes des autres, de sorte que l'on ait $m_1+2m_2+\ldots+im_i+\ldots=M$. Chaque groupement des M conditions en conditions séparées donne lieu à un problème particulier, dont la solution fournira un théorème enseignant, dans chaque cas, *quels sont les nombres relatifs à toute condition simple, double, etc., qu'il faut connaître, et comment il faut combiner ces nombres pour obtenir celui qu'on cherche;* en d'autres termes, *quelle fonction représente ce dernier nombre.*

C'est ainsi que, relativement à la détermination du nombre des droites qui satisfont à deux conditions dans un plan, il suffit de connaître, pour chaque condition, le nombre des droites qui y satisfont et passent par un point.

Relativement à la détermination des plans, les théorèmes sont également bien connus. Pour la détermination des droites dans l'espace, les problèmes sont résolus par deux théorèmes que j'ai communiqués à l'Académie des sciences en 1871 et en 1872 (*Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, t. LXXIII et LXXIV).

C'est en abordant ce genre de problèmes relativement aux coniques dans le plan que M. Chasles a tout d'abord ouvert la voie à cet ordre de recherches. Le premier problème est celui où l'une des conditions est simple. Les quatre autres conditions, qui peuvent être dépendantes ou indépendantes les unes des autres, déterminent un *système*. La solution du problème est contenue dans le théorème suivant :

Dans un système plan, le nombre des coniques qui passent en un point étant μ et le nombre de celles qui touchent une droite étant ν, le nombre de celles

qui satisfont à une condition quelconque est $\alpha\mu + \beta\nu$, *les nombres* α *et* β *ne dépendant que de la condition donnée* (*).

Ce beau théorème, que M. Chasles a découvert par l'induction, n'a pas encore été démontré.

Je me propose d'en donner une démonstration dans la première partie de ce mémoire.

Dans la seconde partie, j'aborderai le problème dans lequel les *cinq* conditions se partagent en deux, l'une triple, l'autre double. Ce problème est résolu par un théorème analogue au précédent; mais la formule est à *trois* termes. L'énoncé de ce théorème est contenu implicitement dans une note de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LIX, p. 345), ainsi que l'a fait remarquer M. Cremona, en le donnant explicitement (*Comptes rendus*, t. LIX, p. 776). Si la condition double se compose de deux conditions séparées, ce théorème découle facilement du précédent. Mais, s'il n'en est pas ainsi, il constitue un deuxième théorème distinct, non encore démontré, et dont on n'a même presque fait aucune vérification.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, je démontrerai ce théorème, et je ferai voir que l'ensemble de ces deux propositions fournit la solution complète des problèmes relatifs aux coniques dans le plan, de telle façon que, dans tous les cas, une condition simple, ainsi qu'une condition quadruple, est caractérisée par deux nombres, et une condition double ou triple par trois nombres.

Dans la troisième partie de ce mémoire, j'étudierai les problèmes relatifs à la détermination des coniques dans l'espace et des surfaces du second ordre; et je démontrerai, à cette occasion, plusieurs théorèmes nouveaux.

La première partie contient, tout d'abord, quelques théorèmes étrangers à la question proposée, mais qui seront d'un usage fréquent dans tout le cours du mémoire.

PREMIÈRE PARTIE

I. — THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES INTERSECTIONS DES COURBES PLANES ALGÉBRIQUES.

Soit, sur une courbe algébrique plane, un point O tel que la droite Oy ait r de ses points d'intersection avec la courbe réunis en O; soit Ox une autre droite. L'équation de la courbe, rapportée aux axes Ox, Oy, est de la forme

$$(1) \qquad y^r(A + By + \ldots + Ky^n) + xP = 0;$$

(*) Les nombres μ et ν sont appelés première et deuxième caractéristiques du système.

A, B, ..., K sont des polynômes en x seul, dont le premier ne s'évanouit pas avec x, P est un polynôme dont le degré en y est inférieur à r.

Pour une valeur infiniment petite de x, l'équation (1) détermine r racines y infiniment petites. Le produit des autres racines est $\pm \frac{A}{K}$. Soit maintenant s le moindre degré de x dans les termes indépendants de y, en sorte que ces termes soient $x^s(a + bx + ...)$. Le produit de toutes les racines de (1) est $\pm \frac{x^s(a+bx+...)}{K}$. Le produit des racines infiniment petites est donc égal à $\pm \frac{x^s(a+bx+...)}{A}$, c'est-à-dire de l'ordre de x^s. Prenant x pour infiniment petit du premier ordre, désignons par $\alpha_1, \alpha_2, ...$ les ordres de ces racines. Faisons le produit des r binômes $(y - x^\alpha)$. Nous obtenons un polynôme en y dont les r racines ont chacune un rapport fini avec une racine infiniment petite de (1). Les produits de ces deux groupes de racines ont donc un rapport fini, c'est-à-dire que la somme des nombres α est égale à s.

Or s marque le nombre des points d'intersection de la courbe et de Ox, confondus en O. Donc :

Théorème I. — *Le nombre des intersections d'une courbe et d'une droite, confondues en un point* O, *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par la courbe et la droite sur une sécante quelconque, dont la distance au point* O *est infiniment petite du premier ordre.*

On peut faire la remarque suivante : Une racine y étant de l'ordre α, on peut, pour trouver son rapport à x^α, se borner à considérer, dans (1), les termes en $y^i x^j$, tels que $j + i\alpha$ ait la même valeur pour tous ces termes. On en conclut aisément que les produits de ces rapports par x^α, ou les racines y de l'ordre α, bornées à leur premier terme, sont déterminés par une équation dont les coefficients ne contiennent que des puissances entières de x. On peut donc dire que : *si* ρ *est le nombre des segments ci-dessus de l'ordre* α, *le produit* $\rho\alpha$ *est toujours un nombre entier.*

Ce théorème est susceptible d'être étendu au cas de deux courbes, par l'analyse suivante.

Soient deux courbes S et S′ dans le même plan. On peut faire correspondre deux à deux les points de ces deux courbes qui ont même ordonnée y, et imaginer la courbe Σ dont les coordonnées rectilignes ξ, η sont les abcisses x, x' de deux points correspondants. Un point commun aux deux courbes S et S′ correspond à un point de Σ situé sur la bissectrice des axes. Supposons que le point O, origine des coordonnées x, y, soit commun aux deux courbes S, S′. La courbe Σ passe en Ω, origine des coordondées ξ, η.

D'après le théorème I, on trouvera le nombre des points communs à Σ et à la bissectrice des axes en considérant une valeur de ξ infiniment petite du premier ordre, cherchant l'ordre de chacune des valeurs de $(\eta - \xi)$ infiniment petites correspondantes, et faisant la somme de ces ordres. Cette somme sera le nombre cherché. En se reportant aux courbes S et S', on voit que cela revient à : mener une parallèle à $0y$, d'abcisse x du premier ordre; prendre les points m, infiniment voisins de 0, où cette droite coupe S; par chaque point m, mener une parallèle à $0x$; considérer sur chaque parallèle les points m' infiniment voisins de 0 et appartenant à S'; faire la somme des ordres des segments mm', interceptés sur ces parallèles.

En particulier, si les droites $0x$, $0y$ ne sont pas tangentes à la courbe S', les points m' situés sur chaque parallèle à $0x$ sont en même nombre que les points m'_1 infiniment voisins de 0 situés sur la parallèle à $0y$ et sur S'; chaque segment mm'_1 est du même ordre qu'un segment mm', et les nombres de ces deux groupes de segments sont les mêmes. On peut donc remplacer la somme des ordres des segments mm' par celle des segments mm'_1. Donc :

Théorème II. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point* 0, *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par les deux courbes sur une sécante dont la distance au point* 0 *est infiniment petite du premier ordre, et qui ne coïncide avec aucune tangente à l'une des courbes en ce point.*

De la remarque faite à propos du théorème I, on peut conclure ici que : *si* ρ_α *est le nombre des segments d'ordre* α, *le produit* $\rho\alpha$ *est toujours un nombre entier.*

Au lieu de deux courbes quelconques, considérons maintenant deux courbes S et S' telles qu'à chaque point m de la première correspondent a points m' de la seconde, situés sur la droite qui joint m à un point fixe C, où ne passe pas S; et que les groupes de a points m', correspondant aux différents points m en ligne droite avec C, soient tous différents.

D'après cette définition, si p est le degré de S et n l'ordre de multiplicité du point C dans S', cette dernière courbe coupe les droites issues du point C en $ap+n$ points. Ce nombre marque dans son degré.

Projetons en μ, μ', sur une droite CA, deux points correspondants m, m', et imaginons la courbe Σ dont les coordonnées rectilignes sont Cm et Cm'. Cette courbe est de degré $2ap+n$, et a, à l'origine des coordonnées, un point multiple provenant des couples de points m, m' situés sur la perpendiculaire élevée en C sur CA. On voit très-facilement que ce point compte pour ap intersections de Σ et de la bissectrice des axes. Il reste donc $ap+n$ autres points communs à ces deux lignes. Donc :

Théorème III. — *Si, à chacun des points d'une courbe de degré* p, *situés sur une droite issue d'un point fixe, où ne passe pas cette courbe, correspond un groupe distinct de* a *points sur la même droite, et que le point fixe soit multiple d'ordre* n *sur le lieu de ces derniers, le degré de ce lieu,* *ainsi que le nombre des couples de points correspondants confondus, est égal à* $ap+n$.

Les données restant les mêmes, si un point O est la réunion de plusieurs couples de points correspondants, on cherchera leur nombre en appliquant le théorème I à la courbe Σ. On sera conduit alors à mener une sécante à distance infiniment petite du premier ordre du point O, à considérer chaque point m d'intersection de cette sécante et de S infiniment voisin de O, à mener le rayon Cm et à faire la somme des ordres des segments mm' compris entre deux points correspondants infiniment voisins.

La sécante peut être prise non tangente à la courbe S. Si, de plus, le rayon CO n'est pas tangent à cette courbe, un rayon issu de C, et à distance du premier ordre de O, coupe S en des points à distance du premier ordre de ce point O, et en même nombre que la sécante considérée. Il y a donc sur ce rayon le même nombre de segments compris entre des points correspondants infiniment voisins de O, et du même ordre que sur les différents rayons considérés en premier lieu. Donc :

Théorème IV. — *S'il existe une correspondance entre les points de deux courbes situés sur les droites issues d'un point fixe* C, *et que* O *soit un point commun aux deux courbes, où aucune des tangentes à l'une d'elles ne passe en* C, *le nombre des couples de points correspondants, confondus en* O, *est égal à la somme des ordres des segments compris entre deux points correspondants infiniment voisins de* O, *et situés sur une droite issue de* C *dont la distance au point* O *est infiniment petite du premier ordre.*

On remarquera encore que : *si ρ est le nombre des segments d'ordre α, le produit $\rho\alpha$ est toujours un nombre entier.*

II. — DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE M. CHASLES SUR LES SYSTÈMES DE CONIQUES DANS LE PLAN.

Étant donné un système plan de coniques, prenons dans le plan du système une droite arbitraire Δ, et une origine a sur cette droite. Soient m et m' les points où une conique du système rencontre Δ. Considérons la courbe dont les coordonnées rectilignes sont $x=\frac{1}{2}(am+am')$, $y=\frac{am.am'}{K}$, K étant une longueur constante. A chaque conique du système correspond un point de cette courbe, et à chaque point de la courbe correspond une conique. Pour abréger le langage, j'appellerai cette courbe *indicatrice* du système relative à la droite Δ. Je vais démontrer qu'*elle a pour degré la première caractéristique du système.*

Soit μ cette caractéristique. Considérons, pour un instant, la courbe dont les coordonnées ξ, η sont am et am'. Elle est de degré 2μ, symétrique par rapport à la bissectrice des axes de coordonnées, et elle a, à l'infini, sur chacun des axes, un point multiple d'ordre μ. Les points de cette courbe, pour lesquels $am + am'$ a une valeur donnée, sont sur une droite perpendiculaire à l'axe de symétrie. Ils sont donc en nombre 2μ et disposés symétriquement par rapport à cet axe. Ils répondent à μ coniques. En second lieu, les points, pour lesquels $am.am'$ a une valeur donnée, sont sur une hyperbole qui coupe la courbe en 4μ points, dont 2μ sont à l'infini et 2μ disposés symétriquement par rapport à l'axe de symétrie. Ces derniers répondent donc également à μ coniques. Donc, dans l'indicatrice, à chaque valeur de x ou de y répondent μ coniques du système et μ valeurs de y ou de x. D'ailleurs, x et y ne deviennent infinis qu'ensemble, pour les coniques ayant une asymptote parallèle à Δ. Donc l'indicatrice est de degré μ.

Un couple quelconque de points m et m' de la droite Δ peut être représenté sur le plan par un point dont les coordonnées sont : $x = \frac{1}{2}(am + am')$, $y = \frac{am.am'}{K}$. Deux points m et m' qui coïncident sont représentés par un point situé sur la parabole P dont l'équation est $Ky = x^2$. Si le point (x, y) décrit une ligne droite $Ax + By + C = 0$, les points m et m' sont liés par la relation $\frac{A}{2}(am + am') + B.am.am' + C = 0$, qui est l'équation générale de deux divisions homographiques *en involution*, sur la droite Δ. Donc : *Chaque droite du plan represente deux divisions en involution sur Δ, et inversement*. Par suite, *les deux points d'intersection d'une droite et de la parabole* P *représentent les deux points doubles de l'involution. Toute droite tangente à cette parabole représente une involution où les deux points doubles coïncident, c'est-à-dire une seule série de points variables sur Δ, et un point fixe dont la distance à l'origine sur Δ est égale à l'abscisse du point de contact.* Et, par suite, *chaque point du plan représente deux points sur Δ, dont les distances à l'origine sur cette droite sont les abscisses des points de contact des tangentes à la parabole issues du point considéré.*

Considérons maintenant les μ intersections d'une droite D et de l'indicatrice J d'un système de coniques. Ces μ points répondent aux μ coniques qui divisent harmoniquement le segment de Δ compris entre les points de cette droite correspondant aux points d'intersection de D et de la parabole P. Si la droite D est tangente à P, ces μ coniques passent au point de Δ correspondant au point de contact. Ainsi *les μ points d'intersection de l'indicatrice et d'une tangente à la parabole répondent à μ coniques se coupant sur Δ.*

Si la tangente à la parabole est en même temps tangente à l'indicatrice, deux de ces coniques sont infiniment voisines. Ainsi *le point de contact avec la parabole d'une tangente commune à cette courbe et à l'indicatrice représente un point où Δ coupe l'enveloppe du système de coniques.*

Les 2μ points d'intersection de l'indicatrice et de la parabole répondent aux coniques qui coupent Δ en deux points réunis. Parmi ces coniques, les unes sont des coniques ordinaires tangentes à Δ, les autres sont des coniques réduites à une droite, que j'appellerai, pour abréger, des *droites-coniques*.

Il faut remarquer que les points répondant aux premières sont de simples points d'intersection des deux courbes. Car, s'il y avait contact, cela indiquerait que la droite Δ touche une conique du système en un point où cette conique touche l'enveloppe du système. La droite Δ serait donc tangente à cette enveloppe, ce qui n'aura pas lieu si la droite Δ est quelconque. En second lieu, si un de ces points était multiple dans l'indicatrice, cela indiquerait qu'il y correspond, ou une conique multiple tangente à Δ, ou deux coniques tangentes à Δ au même point ; ce qui n'aura pas lieu non plus, si la droite μ est quelconque. Par suite, si ω désigne le nombre des points d'intersection des deux courbes afférents aux droites-coniques, et ν la deuxième caractéristique du système, on a $\nu = 2\mu - \omega$.

Au contraire, aux points correspondants à des droites-coniques, il peut arriver que, quelle que soit la droite Δ, l'indicatrice soit multiple et touche la parabole P. Quand ce fait se produit, la droite-conique figure pour plusieurs unités dans le nombre ω. On dit alors d'habitude qu'elle est *multiple*. Il me paraît convenable de désigner par *ordre de multiplicité* de la droite-conique le nombre des branches de l'indicatrice au point correspondant. J'appellerai *valeur* de la droite conique le nombre des unités pour lesquelles elle figure dans ω. Cette valeur peut différer beaucoup de l'ordre de multiplicité, et être multiple quand ce dernier est l'unité. L'application du théorème II va servir à mettre en évidence les éléments géométriques qui déterminent la valeur d'une droite-conique dans un système.

Soit, sur l'indicatrice J, un point O répondant à une droite-conique, et, par suite, situé sur la parabole P. Menons une sécante arbitraire à distance du premier ordre du point O. Soit π le point voisin de O où elle coupe P, et p un des points voisins de O où elle coupe J. Sur la droite Δ, soit M le point représenté par O, μ par π, et m, m' les deux points représentés par p. Le segment $M\mu$ est infiniment petit du premier ordre. Soit μ_1 le point de Δ représenté par le second point d'intersection de la sécante et de P. Le segment $M\mu_1$ est fini.

Pour trouver la valeur de la droite-conique, il suffit de faire la somme des ordres des segments $p\pi$. Soit θ l'angle de la sécante et de l'axe Ox. Chaque segment $p\pi$ est égal à la différence des abscisses des points p, π divisée par $\cos\theta$; c'est-à-dire, en désignant par C le milieu de mm', à $\frac{C\mu}{\cos\theta}$. Mais $C\mu = \frac{\overline{Cm}^2}{C\mu_1}$. Chaque segment a donc pour longueur $\frac{\overline{Cm}^2}{C\mu_1 \cos\theta}$, et est de l'ordre de $\overline{Cm}^2$. Ainsi, *pour trouver la valeur de la droite-conique, il suffit de* *chercher les coniques infiniment aplaties qui divisent harmoniquement un segment dont une extrémité est à distance infiniment petite du premier ordre de la droite-conique, et de faire la somme des ordres des carrés des segments interceptés par ces coniques.* Si la sécante est perpendiculaire à l'axe Ox, le point μ_1 est à l'infini ; mais $C\mu_1 \cos\theta$ reste fini et devient égal à K. Par suite, *la même règle s'applique en considérant les coniques qui interceptent sur une droite des segments dont le milieu est à distance du premier ordre de la droite-conique.*

On parvient au même résultat en considérant directement les segments interceptés par les courbes sur une sécante parallèle à Oy, à distance λ du premier ordre de O. Un point p infiniment voisin de O sur cette sécante et sur l'indicatrice répond à une conique coupant Δ en deux points m, m', dont le milieu est à distance λ du point M. En désignant par σ le demi-segment mm', on a

$$\frac{am + am'}{2} = a\mathrm{M} + \lambda, \quad \frac{am.am'}{\mathrm{K}} = \frac{(a\mathrm{M}+\lambda)^2}{\mathrm{K}} - \frac{\sigma^2}{\mathrm{K}};$$

$\frac{am.am'}{\mathrm{K}}$ et $\frac{(a\mathrm{M}+\lambda)^2}{\mathrm{K}}$ sont les ordonnées de deux points de la sécante, situés sur l'indicatrice et sur la parabole. Le segment intercepté par ces deux courbes est donc $\frac{\sigma^2}{\mathrm{K}}$.

Les coefficients angulaires des différentes tangentes à l'indicatrice en O sont les différentes valeurs de $\frac{\lambda(2a\mathrm{M}+\lambda)-\sigma^2}{\mathrm{K}\lambda}$, ou $\left(\frac{2a\mathrm{M}}{\mathrm{K}} - \frac{\sigma^2}{\mathrm{K}\lambda}\right)$. Je vais montrer que $\frac{\sigma^2}{\lambda}$ ne peut être infini, si la droite Δ est quelconque ; c'est-à-dire qu'il ne saurait y avoir, dans ce cas, une tangente en O parallèle à l'axe des y.

Dans une conique, dont les axes sont a et b, si une droite Δ fait, avec l'axe b, l'angle φ, le diamètre conjugué de sa direction Δ' fait, avec l'axe a, l'angle χ, tel que l'on ait $\operatorname{tang}\chi = -\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\varphi$. Si la conique est infiniment aplatie, c'est-à-dire si le rapport $\frac{b}{a}$ est infiniment petit et égal à ε, χ est de l'ordre de ε^2, dès que φ est fini. Si D est une droite faisant un angle infiniment petit ψ avec l'axe a, et coupant cet axe en un point d, les droites D et Δ' interceptent sur Δ un segment de l'ordre de $(\psi - \chi)$, si le point d n'est pas infiniment voisin de Δ, ce qui n'arriverait que pour des droites particulières Δ.

Supposons maintenant que D soit la droite-conique d'un système, et que la conique infiniment aplatie considérée soit une conique du système, voisine de D ; le segment dont il vient d'être question est précisément la longueur λ. Donc λ est de l'ordre de $(\psi - \chi)$; d'ailleurs, σ est de l'ordre de ε. Puisque χ est de l'ordre de ε^2, le rapport de σ^2 à λ ne peut être infini que si ψ est du même ordre que χ, et si la différence $(\psi - \chi)$ est d'ordre supérieur, ce qui nécessiterait une direction déterminée pour la droite Δ. Donc, la droite Δ étant quelconque, la droite menée par O parallèlement à l'axe des y n'est pas tangente à l'indicatrice.

On voit, de plus, que le cas où λ est de l'ordre de σ^2 est le seul où l'indicatrice ne soit pas tangente à la parabole. Pour que ce fait se produise, il faut et il suffit que l'angle ψ soit d'un ordre égal ou supérieur à celui de σ^2. On en conclut : *si une droite-conique a pour valeur l'unité, le déplacement angulaire du grand axe, dans les coniques voisines, est d'un ordre égal ou supérieur au second, relativement à l'angle des asymptotes.*

Si λ est de l'ordre de σ, et qu'il n'y ait qu'une branche d'indicatrice au point O, il y a simple contact entre cette courbe et la parabole; la valeur de la droite-conique est 2. C'est le cas où *le déplacement angulaire de l'axe est du même ordre que l'angle des asymptotes.*

Soit λ infiniment petit par rapport à σ, mais d'ordre moindre que 2 relativement à σ, par exemple d'ordre $\left(2 - \frac{p}{q}\right)$, $\frac{p}{q}$ étant une fraction irréductible de numérateur impair. σ^2 est alors de l'ordre de $\lambda^{\frac{2}{2-\frac{p}{q}}}$, ou de l'ordre $\frac{2q}{2q-p}$, λ étant censé du premier. Or, d'après une remarque faite à la suite du théorème II, le nombre ρ des segments interceptés entre l'indicatrice et la parabole, qui sont de l'ordre $\frac{2q}{2q-p}$, est tel que $\rho\,\frac{2q}{2q-p}$ est un nombre entier. Donc ρ est un multiple de $(2q-p)$; et, par suite, la valeur de la droite-conique est égale ou supérieure à $2q$, suivant qu'il n'y aura pas ou qu'il y aura d'autres segments.

Si le numérateur p est pair et égal à $2p'$, on trouvera de même que la valeur de la droite-conique est au moins égale à q.

Dans le premier cas, q est au moins égal à 2, dans le second à 3. Donc la valeur de la droite-conique est toujours supérieure à 2.

Soit maintenant λ infiniment grand par rapport à σ, de façon que σ soit de l'ordre $\left(\frac{p}{q}\right)$ $(p > q)$, λ étant du premier. $\frac{p}{q}$ étant irréductible, on voit comme ci-dessus que : 1° si q est impair, la valeur de la droite-conique est au moins $2p$, qui ne peut être moindre que 4 ; 2° si q est pair, elle est au moins égale à p qui ne peut être moindre que 3.

Les éléments géométriques qui déterminent la valeur d'une droite-conique étant ainsi nettement mis en évidence de la manière la plus générale, il va être facile de trouver le nombre des coniques d'un système qui satisfont à une condition donnée.

Soit un système de coniques A dans le plan. Prenons une conique fixe quelconque Σ. Par les points d'intersection de chaque conique A et de Σ menons les coniques A_1 qui satisfont à une condition donnée. Soit a le nombre des coniques qu'on peut mener par quatre points et satisfaisant à cette condition. Les coniques A_1 forment un système dont chaque conique répond à une conique A coupant Σ aux mêmes points; et à chaque conique A répondent a coniques A_1. Deux pareilles coniques A et A_1 seront dites *correspondantes*. Sur une sécante Δ, deux coniques correspondantes et la conique fixe Σ déterminent une involution, dont deux points, ceux de Σ, sont fixes. Par suite, les indicatrices J, J_1 de ces deux systèmes, relatives à une même droite Δ, sont deux courbes dont les points se correspondent de la manière définie au théorème III. De plus, l'indicatrice J_1, ainsi que l'indicatrice J, ne passe pas au point C, représentatif des deux points de Σ sur Δ. Donc, d'après le théorème III, l'indicatrice J_1 est de degré $a\mu$, puisque J est de degré μ; en second lieu, le nombre des couples de points correspondants confondus sur ces deux courbes est aussi $a\mu$. Si ces $a\mu$ points répondent à des coniques ordinaires A, ils répondent en même temps à des coniques ordinaires A_1 qui se confondent avec leurs correspondantes A. Ce sont des coniques communes aux deux systèmes. Mais il n'en est pas ainsi, en général; et quelques-uns de ces points répondent à des coniques infiniment aplaties. Il faut donc trouver le nombre de ces points, et, en le retranchant de $a\mu$, on aura le nombre des coniques ordinaires du système A qui satisfont à la condition donnée.

Soit $\alpha\beta\gamma\delta$ un quadrilatère, a le point de concours des côtés $\alpha\beta$, $\gamma\delta$; b celui des côtés $\beta\gamma$, $\delta\alpha$; et c le point de concours des diagonales $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ (*). A la condition, pour une conique, de passer par les points α, β, γ, δ, on peut substituer celle de passer en l'un d'eux α, et de toucher en t, t', sur la droite bc, deux droites at, at' formant avec ab et ac un faisceau harmonique. Si l'on cherche les coniques qui passent aux quatre points donnés et satisfont à une condition donnée, cette condition servira à déterminer l'arbitraire qui subsiste dans le couple de droites at, at'.

Si les droites $b\beta$ et $b\alpha$ font un angle infiniment petit θ, les mêmes choses subsistent. Mais, par la nature de la condition considérée, il peut arriver que, parmi les couples de droites at, at' que cette condition détermine, les uns diffèrent du couple $a\alpha$, $a\delta$, les autres en soient infiniment peu différents. Pour qu'une conique ainsi déterminée ne soit pas infiniment aplatie, il faut et il suffit que les droites at, at' fassent respectivement avec les droites $a\alpha$, $a\delta$ des angles infiniment petits du second ordre par rapport aux longueurs

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

$\alpha\beta$, $\gamma\delta$, ou par rapport à l'angle o, si l'on suppose le point b à distance finie des côtés du quadrilatère. Le nombre des couples de droites at, at', satisfaisant à cette condition, marquera le nombre des coniques ordinaires passant aux quatre points donnés et satisfaisant à la condition donnée.

Les autres couples de droites at, at' déterminent des coniques infiniment aplaties. Si les droites at, at' font avec $a\alpha$, $a\delta$ respectivement des angles finis, la conique infiniment aplatie correspondante a ses sommets, qui sont infiniment voisins de t et t', à des distances finies des côtés $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ du quadrilatère. Si, au contraire, ces angles sont de l'ordre des longueurs $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, les sommets sont infiniment voisins des côtés $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ du quadrilatère. Mais il est aisé de voir que ce dernier fait ne se produira que si le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ a quelque liaison avec la condition donnée, et non pas s'il est absolument quelconque.

Considérons, en effet, le système des coniques qui satisfont à la condition donnée, ont la droite bc pour polaire du point a et touchent la droite at au point t sur bc. Le point de contact des secondes tangentes menées de a aux coniques de ce système décrit une ligne, et vient en t' quand la conique variable devient infiniment aplatie. Ce point t' est donc déterminé par la condition, le point a, la droite bc, et le point t. Donner ce dernier équivaut à donner le côté $\alpha\beta$ du quadrilatère. Mais, avec ces données, le quadrilatère n'est pas déterminé, et le côté $\delta\gamma$ peut être sur une droite quelconque issue de a. Donc, pour que les droites at et at' fassent, avec les droites $a\alpha$, $a\gamma$, des angles du même ordre que les côtés $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ respectivement, le quadrilatère doit être particularisé ; et ce fait ne saurait se produire s'il est absolument quelconque relativement à la condition donnée.

En particulier, si ce quadrilatère est formé par les points d'intersection d'une conique fixe Σ avec une conique infiniment aplatie d'un système A, on voit qu'on peut évidemment choisir la conique Σ de manière à ce que ce fait ne se produise pas.

Ceci établi, soit b le nombre des couples de droites at, at', faisant avec $a\alpha$, $a\gamma$ des angles finis, déterminés par la condition donnée. A chaque conique infiniment aplatie du système A, correspondent $a - b$ coniques ordinaires, et b coniques infiniment aplaties. Puisqu'il n'y a aucune liaison entre le système proposé et la condition donnée, les couples de droites at et at', relatives à deux coniques infiniment aplaties correspondantes, diffèrent. D'ailleurs, la conique Σ étant quelconque, les segments $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ interceptés sur cette conique par une conique infiniment aplatie A sont infiniment petits de l'ordre de l'angle de ses asymptotes ; et, en second lieu, les points t et t' de contact des tangentes, issues d'un point a, à la conique infiniment aplatie A_1, étant à distance finie, les mêmes segments sont aussi de l'ordre de l'angle des asymptotes de cette dernière conique. Donc, sur une droite quelconque Δ, deux coniques infiniment aplaties correspondantes A et A_1 déterminent deux segments infiniment voisins et du même ordre, qui est celui de l'angle des asymptotes de A. D'ailleurs, les extrémités de ces segments sont à des distances du même ordre, puisque les sommets des deux coniques infiniment aplaties diffèrent. Il en résulte aisément que la distance du milieu de ces segments est de l'ordre de leurs carrés.

En effet, dans une conique infiniment aplatie, les polaires de tous les points du plan non infiniment rapprochés du grand axe font entre elles des angles de l'ordre du carré de l'angle des asymptotes. Dans les deux coniques A et A_1, les polaires d'un même point du plan, ou les diamètres conjugués d'une même direction, font donc des angles du second ordre (l'angle des asymptotes de A étant admis être du premier ordre) avec la droite bc qui est, pour toutes deux, la polaire du point a. Les diamètres conjugués d'une même droite Δ, relativement aux deux coniques, font donc entre elles un angle du second ordre relativement aux segments interceptés sur cette droite.

Revenons maintenant à la considération des indicatrices, J et J_1, des deux systèmes A et A_1. Puisque, à chaque conique infiniment aplatie A correspondent b coniques également aplaties A_1, et que la distance des milieux des cordes interceptées par une conique A et une conique A_1 correspondantes sur Δ est de l'ordre du carré de ces cordes, il en résulte qu'à chaque point p de J, infiniment voisin du point O, correspondent b points p_1 de J_1, situés sur la droite Cp, et dont les distances au point p sont de l'ordre du carré de la corde interceptée sur Δ par la conique répondant au point p.

Par suite, la distance de deux pareils points p, p_1 est du même ordre que la distance du point p au point π où la même droite coupe la parabole P, puisqu'on a démontré plus haut que $p\pi$ est de l'ordre du carré de cette corde.

Si l'on mène par C une sécante dont la distance à O soit du premier ordre, comme la droite CO n'est pas tangente à J, la somme des ordres des segments pp_1 terminés par des points correspondants de J et de J_1 sur cette sécante marque, d'après le théorème IV, le nombre des couples de points correspondants confondus en O. Mais chacun de ces segments est de l'ordre d'un segment $p\pi$; et, à chacun des segments $p\pi$, répondent b segments pp_1 du même ordre que $p\pi$.

La somme dont il s'agit est donc marquée par celle des ordres des segments $p\pi$ répétée b fois, c'est-à-dire b fois la valeur de la droite-conique répondant au point O.

Par suite, le nombre total des couples de points correspondants confondus, qui répondent à des droites-coniques des deux systèmes, est égal à b fois la somme des valeurs des droites-coniques du premier système. En désignant cette somme par ω, on a, pour le nombre des coniques ordinaires communes aux deux systèmes, $N = a\mu - b\omega$; et, en mettant pour ω sa valeur $(2\mu - \nu)$, on a $N = (a - 2b)\mu + b\nu$. Cette formule exprime le théorème de M. Chasles, qui se trouve ainsi entièrement démontré (*).

(*) Depuis que ces lignes ont été écrites, une démonstration analytique de ce théorème a été donnée par M. Clebsch, dans les *Mathematische Annalen*. Je suis, depuis longtemps, en possession d'une démonstration analytique très-simple de la même proposition, que j'aurai occasion d'exposer en un autre moment.