

BULLETIN DE LA S. M. F.

M. BAPTISTA DE CAMPOS

Faisceaux triangulaires sur l'espace projectif

Bulletin de la S. M. F., tome 116, n° 3 (1988), p. 279-293

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_3_279_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FAISCEAUX TRIANGULAIRES SUR L'ESPACE PROJECTIF

PAR

M. BAPTISTA DE CAMPOS (*)

RÉSUMÉ. — Le but est de démontrer les deux résultats suivants, en utilisant un sous-groupe algébrique fermé G de $GL(n+1)$, connexe et résoluble, dont $\text{Pic } G = 0$ (le groupe triangulaire est un cas particulier) :

1) Si \mathcal{F} est un faisceau G -équivariant et simple, sur un sous-schéma fermé et réduit de \mathbb{P}^n , alors il est G -linéarisable.

2) Dans tout sous-schéma fermé et G -invariant du module de Maruyama $\overline{M}(H; \mathbb{P}^n/\text{spec } K)$, il y a une classe d'équivalence fixe, qui contient un faisceau G -linéarisable. Celui-ci ou bien est stable ou bien est une somme directe finie de faisceaux stables.

ABSTRACT. — The aim is to state the following two assertions involving a closed algebraic subgroup G of $GL(n+1)$, connected and solvable, whose $\text{Pic } G = 0$ (the triangular group is a special case) :

1) If \mathcal{F} is a G -equivariant and simple sheaf over a reduced and closed subscheme of \mathbb{P}^n , then \mathcal{F} is G -linearized.

2) In every closed and G -stable subscheme of the Maruyama moduli $\overline{M}(H; \mathbb{P}^n/\text{spec } K)$, there exists a fixed equivalence class, which contains a G -linearized sheaf. This one is either stable or a finite direct sum of stable sheaves.

Introduction

J. BRIANÇON et A. IARROBINO, dans leur étude de la dimension du schéma de Hilbert ponctuel dans [5], ont utilisé, d'après une suggestion de D. MUMFORD, le théorème du point fixe de Borel [3], à l'égard d'une action du groupe triangulaire sur ce schéma-là. A. HIRSCHOWITZ, depuis longtemps, avait le désir de voir comment cette méthode, qui exhibe dans chaque composante irréductible de Hilb un point invariant sous le groupe triangulaire, s'adapte au cas des faisceaux cohérents de rang supérieur, c'est-à-dire à l'étude des schémas Quot de GROTHENDIECK [7'] et des

(*) Texte reçu le 27 janvier 1986, révisé le 9 mai 1988.

M. BAPTISTA DE CAMPOS, Rua de Lisboa n° 1, 4 A, 2765 Estoril, Portugal

modules de faisceaux semi-stables de MARUYAMA [10']. Ce travail est né des tentatives d'accomplir cet objectif.

Pour un faisceau \mathcal{F} défini sur un schéma X muni de l'action d'un groupe G , il y a deux concepts d'invariance :

- 1) G -équivariant, si pour tout $g \in G$, on a $g^*\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$;
- 2) G -linéarisable si la définition 1.2 de [10], qui généralise celle de [12] pour un faisceau inversible, est vérifiée.

Dans la généralisation, il y a un élément nouveau à étudier : savoir si un faisceau G -équivariant dans le Quot est (ou n'est pas) G -linéarisable et si une classe d'équivalence fixe de faisceaux semi-stables dans $\overline{M}(H; X/\text{spec } K)$ contient un faisceau G -équivariant et, dans le cas affirmatif, connaître s'il est linéarisable ou non. Dans [9], KANEYAMA a montré que, pour un tore T agissant sur une variété complète et lisse, un fibré T -équivariant est T -linéarisable. Dans [2], J. BERTIN et G. ELENCAWJG démontrent que tout fibré simple sur une variété projective lisse X , qui est U -équivariant par rapport à un sous-groupe U unipotent de $\text{Aut}(X)$, est aussi U -linéarisable. Un faisceau équivariant à l'égard d'un groupe G n'est pas nécessairement G -linéarisable, même dans des cas très élémentaires : $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ n'est pas $\text{PGL}(n)$ -linéarisable [12 p. 33]

Le but de ce travail est de démontrer les THÉORÈMES 6.1 et 7.1. Les premiers paragraphes constituent le matériel préparatoire pour aboutir à ces résultats.

Le groupe triangulaire est un cas particulier d'un groupe G dans les conditions mentionnées.

Notations et Terminologie

On considère comme schéma de base $\text{spec } K$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

\mathbb{P}^n désigne $\text{Proj } K[x_0, \dots, x_n]$. Quand on parle d'un faisceau sans donner de précisions, il est sous-entendu qu'il s'agit d'un faisceau algébrique cohérent. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, \mathcal{O} désigne le faisceau structural du schéma abordé et, si U est un ouvert d'un schéma X , la notation \mathcal{O}_U représente le faisceau structural de U considéré comme sous-schéma de X . On appellera *faisceau triangulaire* sur \mathbb{P}^n un faisceau T -équivariant, où T est le groupe triangulaire contenu dans $\text{GL}(n+1)$.

Étant donnés deux faisceaux G -équivariants \mathcal{A} et \mathcal{B} , on dira qu'ils sont G -équivariants à un morphisme θ près s'ils jouissent de la propriété suivante : il existe deux familles d'isomorphismes $\{\varphi_g\}_{g \in G}$ et $\{\psi_g\}_{g \in G}$ tels que le diagramme de la Figure 1 soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 g^* \mathcal{A} & \xrightarrow{g^*(\theta)} & g^* \mathcal{B} \\
 \varphi_g \downarrow & & \downarrow \psi_g \\
 \mathcal{A} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{B}
 \end{array}$$

Fig. 1

1. Action d'un groupe algébrique sur un module de Maruyama $\overline{M}(H; X/\text{spec } K)$.

PROPOSITION 1.1. — *Tout sous-groupe algébrique fermé G de $\text{GL}(n+1)$ agit sur un module de Maruyama $\overline{M}(H; X/\text{spec } K)$ où X est une sous-variété lisse, fermée et G -invariante de \mathbb{P}^n . En outre, si G est connexe et résoluble, dans tout sous-schéma fermé invariant de $\overline{M}(H; X/\text{spec } K)$ il y a une classe d'équivalence de faisceaux fixe.*

Démonstration. — Il suffit de montrer qu'un sous-groupe G de $\text{GL}(n+1)$ agit sur $\overline{M}(H; X/\text{spec } K)$, puisque le théorème du point fixe de BOREL [3] nous permettra aussitôt de conclure la véracité de la deuxième partie de l'énoncé, si l'on tient compte de [13] et du corollaire de [10', 5.9.1]. Soient φ l'action de G sur X et Φ l'automorphisme de $X \times_{\text{spec } K} G$ tel que $\Phi = (\varphi, p_G)$. Si T est un objet de $\underline{\text{Sch}}/\underline{G}$ (avec les notations de [10', p. 561]), $(\Phi \times_G 1_T)^*$ définit un automorphisme fonctoriel de $\overline{\Sigma}_{X \times_{\text{spec } K} G/G}^H$. Alors une propriété de $\overline{M}(H; X \times_{\text{spec } K} G/G)$ nous assure l'existence d'un automorphisme $\tilde{\Phi}$ de celui-ci. Comme $\overline{M}(H; X/\text{spec } K) \times_{\text{spec } K} G$ est isomorphe à $\overline{M}(H; X \times_{\text{spec } K} G/G)$ (cf [10', 6.4.1]), en identifiant ces deux schémas, $p_1 \circ \tilde{\Phi}$ (où p_1 est la première projection) devient l'action désirée.

2. La filtration de Jordan-Hölder-Seshadri.

PROPOSITION 2.1. — *La classe d'équivalence fixe, dans les conditions de l'énoncé de la PROPOSITION 1.1, contient un faisceau G -équivariant.*

Démonstration. — A cette classe-là, après avoir pris un de ses représentants, soit \mathcal{F} , on lui associe $\text{gr}(\mathcal{F})$ de [10', § 1]. Nous montrerons que $\text{gr}(\mathcal{F})$ est G -équivariant. En effet, si \mathcal{F} est stable, $\mathcal{F} = \text{gr}(\mathcal{F})$ et la véracité est évidente. Sinon, si $\text{gr}(\mathcal{F}) = \bigoplus_{i=1}^t \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$, en prenant $g \in G$, on a $g^*(\text{gr}(\mathcal{F})) = \bigoplus_{i=1}^t g^*(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1})$ et, étant donné que $\text{gr}[g^*(\text{gr}(\mathcal{F}))] \simeq \text{gr}(\mathcal{F})$ (puisque la classe de \mathcal{F} est fixe), la remarque 1.6.2 de [10'], conséquence

du théorème de Krull-Schmidt, nous assure que

$$\bigoplus_{i=1}^t \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i-1} \simeq \bigoplus_{i=1}^t g^*(\mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i-1}),$$

comme on voulait.

PROPOSITION 2.2. — *Si \mathcal{F} appartient à une classe d'équivalence G -invariante, dans les conditions des propositions antérieures, alors chaque terme direct de $\text{gr}(\mathcal{F})$ est un faisceau G -équivariant.*

Démonstration. — Soit $\text{gr}(\mathcal{F}) = \bigoplus_{i=1}^t \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i-1}$. Il faut distinguer deux cas selon que :

- 1) deux quotients quelconques de cette somme sont non isomorphes,
- 2) la condition 1) ne se vérifie pas.

1) Fixons un $1 \leq j \leq t$. Alors $G_0 = \{g \in G \mid g^*(\mathcal{F}_j / \mathcal{F}_{j-1}) \simeq \mathcal{F}_j / \mathcal{F}_{j-1}\}$ est un sous-groupe fermé de G . En effet, si l'on envisage le module de Maruyama $\overline{M}(H'; X/\text{spec } K)$, où H' est le polynôme de Hilbert de $\mathcal{F}_j / \mathcal{F}_{j-1}$, le groupe G_0 est un sous-groupe d'isotropie pour l'action de G sur ce module. L'hypothèse $G_0 \neq G$ entraîne une absurdité. En réalité, il y a un morphisme de G dans le groupe des permutations de t objets [10', remarque 1.6.2] et son noyau est contenu dans G_0 . Ainsi, en considérant les classes associées à gauche (par exemple) de G relativement à G_0 , on voit qu'il y a un nombre fini de classes; et si $G \neq G_0$, alors G serait une réunion finie d'au moins deux fermés isomorphes à G_0 , ce qui serait en contradiction avec l'irréductibilité de G .

2) On pourra récrire $\text{gr}(\mathcal{F})$ associant chaque famille de termes isomorphes. Maintenant, s'il y a dans $\text{gr}(\mathcal{F})$ des termes n'ayant pas de partenaire isomorphe, étant donné que deux faisceaux stables non isomorphes ne peuvent jamais être transformés par un $g \in G$ en deux faisceaux isomorphes, la remarque 1.6.2 de [10'] nous assure que la somme de tous ces termes est équivariante et ensuite 1) ci-dessus nous montre que chacun de ces termes est équivariant. Chaque famille de termes isomorphes associés, s'il n'en existe pas d'autre avec le même nombre de termes, est sûrement équivariante et chacune de ses composantes l'est donc aussi. Si une famille n'était pas équivariante, alors elle serait transformée par chaque $g \in G$ en une autre famille avec un nombre égal de termes isomorphes. Pour conclure la thèse, il nous reste ainsi à analyser la situation suivante : un faisceau équivariant qui soit une somme directe de termes où chacun est à son tour une somme directe d'une famille de faisceaux stables isomorphes, toutes les familles ayant le même nombre d'éléments. Dans ce cas, si à chaque $g \in G$ correspondait une permutation de m objets à savoir : les familles existantes, alors si l'on envisageait le faisceau qui serait

la somme directe de m faisceaux, un étant pris dans chaque famille, on constaterait qu'il serait équivariant et que nous serions ramenés au cas 1) ci-dessus. \square

L'assertion suivante est évidente :

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de la PROPOSITION 1.1, dans tout sous-schéma fermé et invariant d'un module $\overline{M}(H; X/\text{spec } K)$ de Maruyama, il y a une classe d'équivalence contenant un faisceau G -équivariant qui, ou bien est stable, ou bien est une somme directe finie de faisceaux stables G -équivariants.*

3. Linéarisation. — Par rapport à un sous-groupe algébrique fermé de $\text{GL}(n+1)$, les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ sont linéarisables, l'isomorphisme de linéarisation étant l'identité. C'est une conséquence de [7. II(2.8.8)].

De manière analogue, et dans les mêmes conditions, si X est un sous-schéma fermé et invariant de \mathbb{P}^n , alors $\mathcal{O}_X(m)$ est linéarisable. Ainsi, relativement à un groupe de ce type-là, un faisceau \mathcal{F} est linéarisable si et seulement il en est de même pour $\mathcal{F}(m)$.

Il est évident qu'un faisceau qui est une somme directe finie de faisceaux linéarisables est aussi linéarisable.

Nous appellerons faisceau semi-linéarisable à l'égard d'un groupe algébrique G , un faisceau \mathcal{F} pour lequel il existe un isomorphisme entre $\sigma^*\mathcal{F}$ et $p^*\mathcal{F}$, où σ désigne l'action du groupe et p la projection, la condition de compatibilité (désignée par MUMFORD condition de cocycle) ne se vérifiant pas nécessairement.

PROPOSITION 3.1. — *Soit X un schéma réduit, projectif au-dessus de $\text{spec } K$, muni de l'action d'un groupe algébrique G réduit et de type fini au-dessus de $\text{spec } K$. Si $A \xrightarrow{\varphi} B$ est un morphisme G -équivariant non nul où A est linéarisable et B simple, et si les complémentaires des lieux singuliers de A et B ont une intersection non vide, alors B est linéarisable.*

La démonstration repose sur les lemmes suivants :

LEMME 3.2. — *Soient X un schéma projectif au-dessus de $\text{spec } K$, S un schéma réduit, localement noëthérien au-dessus de $\text{spec } K$, et \mathcal{G} un faisceau cohérent sur $S \times X$, dont toutes les fibres aux points fermés de S sont isomorphes, i.e. $\mathcal{G}(s) \cong \mathcal{F}$ pour tout s fermé dans S , où \mathcal{F} est un faisceau sur X . Il existe alors un recouvrement de S par des ouverts S_α tels que $\mathcal{G}|_{S_\alpha \times X} \cong (p^*\mathcal{F})|_{S_\alpha \times X}$, où p est la projection de $S \times X$ dans X .*

Démonstration. — On admet que \mathcal{F} est suffisamment tordu pour qu'il soit engendré par ses sections globales. Si $H^0(X, \mathcal{F}) = N$, alors \mathcal{F} appartient à $\text{Quot}_{\mathcal{O}^{\oplus N}/X/\text{spec } K}^P = Q$ et il existe un morphisme μ de S

dans Q tel que $(\mu \times 1_X)^*U = \mathcal{G}$, où U est le faisceau universel sur $Q \times X$.

Étant donnés deux points fermés s et s' de S , l'isomorphisme entre $U_{\mu(s)}$ et $U_{\mu(s')}$ induit un automorphisme de $\mathcal{O}^{\oplus N}$, c'est-à-dire $U_{\mu(s)}$ et $U_{\mu(s')}$ sont sur la même orbite θ (orbite au sens général) de l'action de GLN sur Q ; et on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & S \\ & & \downarrow \mu \\ \text{GLN} & \xrightarrow{\varphi} & \theta \subseteq Q, \end{array}$$

après avoir fixé un $q_0 \in Q$ identifié avec $\mathcal{G}(s_0)$ où φ est le morphisme qui à chaque matrice fait correspondre le résultat de son action sur q_0 .

Si l'on considère l'action de GLN sur lui-même, l'alinéa c) de la proposition 3.1 de II, § 5 de [6] nous assure que $\text{GLN} \xrightarrow{\varphi_{\text{red}}} \theta_{\text{red}}$ est plat; et les alinéa a) et d) de la proposition 3.24 de [11] nous informent que φ_{red} est lisse.

Ainsi en prenant un recouvrement quasi-compact $\{\theta_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de θ_{red} , on peut appliquer l'assertion IV.17.16.3 de [7]. Pour chaque θ_α fixé, il existe donc un schéma affine V , un morphisme ν , étale et surjectif, de V dans θ_α et un morphisme ψ de V dans $\varphi_{\text{red}}^{-1}(\theta_\alpha)$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & V \\ & \swarrow \psi & \downarrow \nu \\ \text{GLN} \supseteq \varphi_{\text{red}}^{-1}(\theta_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_{\text{red}}} & \theta_\alpha \subseteq Q \end{array}$$

soit commutatif. Et on obtiendra le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V \times_{\theta_\alpha} S_\alpha & \xrightarrow{p} & S_\alpha = \mu^{-1}(\theta_\alpha) \\ p' \downarrow & & \downarrow \mu_{\text{red}} \\ V & \xrightarrow{\nu} & \theta_\alpha, \end{array}$$

où l'on a remplacé $\mu_{\text{red}|S_\alpha}$ par μ_{red} pour simplifier l'écriture. On aboutit ainsi au faisceau $(p \times 1_X)^* \mathcal{G} | S_\alpha \times X$ sur $V \times_{\theta_\alpha} S_\alpha \times X$. En regardant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V \times_{\theta_\alpha} S_\alpha = S' & \xrightarrow{p'} & V \\ & \searrow \Psi & \downarrow \nu \\ \text{GLN} \supseteq \varphi_{\text{red}}^{-1}(\theta_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_{\text{red}}} & \theta_\alpha, \end{array}$$

et, avec les abus de notations détectables dans la désignation des morphismes, on voit que $\nu \circ p'$ se factorise à travers GLN : $\nu \circ p' = \varphi_{\text{red}} \circ \psi \circ p'$.

Par conséquent, au moyen du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & & S' \times X & \\ & & & \downarrow (\nu \circ p') \times 1_X & \\ & & & \swarrow (\Psi \circ p') \times 1_X & \\ \varphi_{\text{red}}^{-1}(\theta_\alpha) \times X \equiv \varphi_{\text{red}}^{-1}(\theta_\alpha) \times \{q_0\} \times X & \xrightarrow{\varphi_{\text{red}} \times 1_X} & \theta_\alpha \times X & & \\ \downarrow j & & \downarrow i \times 1_X & & \\ Q \times X & \xleftarrow{p_{23}} & \text{GLN} \times Q \times X & \xrightarrow{\Sigma} & Q \times X, \end{array}$$

où Σ est l'action de GLN sur Quot et où i et j sont les inclusions naturelles et, étant donné que l'on a $(\mu_{\text{red}|S_\alpha} \times 1_X)^*(i \times 1_X)^*U = [(\mu \times 1_X)^*U]_{|S_\alpha \times X}$, on infère que la famille $(p \times 1_X)^* \mathcal{G}_{|S_\alpha \times X}$ est triviale (c'est-à-dire $(p \times 1_X)^* \mathcal{G}_{|S_\alpha \times X} \simeq p_2^* \mathcal{F}$, si p_2 est la projection de $S' \times X$ dans X), en tenant compte que U est GLN-linéarisable [10, pp. 110 et 111 et remarque 4.18].

Comme ν est étale et surjectif, il en est de même de p . Ainsi la preuve sera terminée si l'on connaît l'assertion suivante : *deux faisceaux cohérents, sur un schéma de type fini au-dessus de $\text{spec } K$, et qui sont localement isomorphes dans la topologie étale, le sont aussi dans la topologie de Zariski.*

Voici la justification : $f : X \rightarrow Y$ étant un morphisme étale tel que $f(x) = y$, où x et y sont des points fermés, \mathcal{F} et \mathcal{G} étant deux faisceaux

cohérents sur Y , nous démontrerons que l'existence d'un isomorphisme entre $(f^*\mathcal{F})_x$ et $(f^*\mathcal{G})_x$ entraîne l'existence d'un isomorphisme entre \mathcal{F}_y et \mathcal{G}_y .

On peut identifier $f^*(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{F}, f^*\mathcal{G})$ (cf. [0, 6.7.6] de [7]). En désignant $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ par \mathcal{H} et $f^*(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$ par \mathcal{H}^* , on sait que

$$\widehat{\mathcal{H}}_y/\widehat{\mathfrak{m}}_y\widehat{\mathcal{H}}_y \simeq \widehat{\mathcal{H}}_x^*/\widehat{\mathfrak{m}}_x\widehat{\mathcal{H}}_x^* \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{H}}_y \simeq \widehat{\mathcal{H}}_x^*$$

(cf. [VI, 4.5] de [1]). Ceci nous mène au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{H}}_y/\widehat{\mathfrak{m}}_y\widehat{\mathcal{H}}_y & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & \widehat{\mathcal{H}}_x^*/\widehat{\mathfrak{m}}_x\widehat{\mathcal{H}}_x^* \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathcal{H}_y/\mathfrak{m}_y\mathcal{H}_y & \longrightarrow & \mathcal{H}_x^*/\mathfrak{m}_x\mathcal{H}_x^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_K(\mathcal{F}_y/\mathfrak{m}_y\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y/\mathfrak{m}_y\mathcal{G}_y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(\mathcal{F}_x^*/\mathfrak{m}_x\mathcal{F}_x^*, \mathcal{G}_x^*/\mathfrak{m}_x\mathcal{G}_x^*). \end{array}$$

Le but est de montrer qu'il y a un germe de \mathcal{H} au point y qui est un isomorphisme. Il nous suffira pour cela de trouver une section σ de \mathcal{H} dans un voisinage de y telle que $(f^*\sigma)_x$ soit un isomorphisme, puisque le morphisme $\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$ est fidèlement plat. Or, en partant d'un germe σ'_x qui est un isomorphisme, en regardant le diagramme ci-dessus et en prenant une section locale σ telle que $\varphi(\sigma_y \otimes \bar{1}) = \sigma'_x \otimes \bar{1}$, nous atteignons notre objectif. En effet, $(f^*\sigma)_x$ est surjective d'après le lemme de Nakayama. L'existence d'un isomorphisme τ de \mathcal{G}_x^* dans \mathcal{F}_x^* , inverse de σ'_x , nous mène à $\tau \circ (f^*\sigma)_x$ qui est un endomorphisme surjectif de \mathcal{F}_x^* . Cet endomorphisme est bijectif d'après [4, Alg. VIII, 2], d'où il résulte que $(f^*\sigma)_x$ est bijectif. La preuve du lemme est ainsi achevée.

LEMME 3.3. — *Soit X un schéma réduit de faisceau structural $\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}_X$, de type fini au-dessus de $\mathrm{spec} K$, soient \mathcal{G} un faisceau cohérent de \mathcal{O}_X -modules, X' un ouvert où \mathcal{G} est localement libre et s et s' deux sections globales non nulles de \mathcal{G} . Si pour tout point fermé $x \in X'$, il existe $\lambda_x \in K$ tel que $s(x) = \lambda_x s'(x)$ et $\lambda_x \neq 0$, alors il existe une section globale de \mathcal{O}_x^* , dont la valeur en chaque point x est égale à λ_x .*

Démonstration. — Signalons que l'existence de X' est assurée par le corollaire 1.3.1 de [10''].

Il faut tenir compte de la remarque suivante : sur un ouvert U de X deux sections de \mathcal{O} qui ont la même valeur en chaque point fermé coïncident, puisque pour tout ouvert affine $V \subseteq U$, l'anneau $\mathcal{O}_X(V)$ est de radical nul. Il existe un point fermé $x \in X'$ où $s(x) \neq 0$. En prenant une trivialisation de \mathcal{G} dans un voisinage ouvert W de X , en désignant $s|_W$ et $s'|_W$ respectivement par (s_1, \dots, s_n) et (s'_1, \dots, s'_n) où les s_j et s'_j appartiennent à $\mathcal{O}(W)$, on a $s_i(x) \neq 0$ pour un certain i . Ainsi s_i et s'_i sont inversibles dans un voisinage ouvert U de x . Il y a une seule section de \mathcal{O}^* au-dessus de U dont la valeur en chaque point x' est $\lambda_{x'}$, qui est la section $s_i|_U s'^{-1}_i|_U$. Si l'on prend un autre point fermé $x'' \neq x$, avec $x'' \in X'$ et $s(x'') \neq 0$, il y aurait un ouvert U' contenant x'' et une section $\bar{s}_\ell|_{U'} s'^{-1}_\ell|_{U'}$ appartenant à $\mathcal{O}^*(U')$, section correspondant à une autre trivialisation; et la remarque initiale impliquerait

$$(s_i|_U s'^{-1}_i|_U)|_{U \cap U'} = (\bar{s}_\ell|_{U'} s'^{-1}_\ell|_{U'})|_{U \cap U'}.$$

La preuve est terminée.

Nous pouvons donc revenir à la démonstration effective de la PROPOSITION 3.1.

Preuve de 3.1. — Soit $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recouvrement ouvert de G auquel sont associés des isomorphismes $\{\theta_\alpha\}_{\alpha \in I}$ entre $p^*\mathcal{B}|_{U_\alpha \times X}$ et $\sigma^*\mathcal{B}|_{U_\alpha \times X}$ selon le LEMME 3.2 et soient X' et X'' les ouverts complémentaires respectivement des lieux singuliers de \mathcal{B} et de \mathcal{A} .

Le faisceau $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{G \times X}}(p^*\mathcal{A}, \sigma^*\mathcal{B})$ est un faisceau localement libre sur $U_\alpha \times (X' \cap X'')$ pour tout α appartenant à I . En considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^*\mathcal{A} & \xrightarrow{p^*(\varphi)} & p^*\mathcal{B} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \theta_\alpha \\ \sigma^*\mathcal{A} & \xrightarrow{\sigma^*(\varphi)} & \sigma^*\mathcal{B}, \end{array}$$

un point fermé $g \in U_\alpha$ et un point fermé $x \in X' \cap X''$, on conclut que $[\theta_\alpha \circ p^*(\varphi)](g, x) = \lambda_g[\sigma^*(\varphi) \circ \rho]$, où $\lambda_g \in K$.

Nous pouvons donc appliquer le LEMME 3.3. Il existe alors une section globale inversible unique s_α de $\mathcal{O}|_{U_\alpha \times (X' \cap X'')}$ qui a la valeur λ_g en chaque point fermé (g, x) . Si l'on fixe un point fermé $x_0 \in X' \cap X''$ et si on envisage

le morphisme j de U_α dans $U_\alpha \times (X' \cap X'')$ qui à chaque point fermé g fait correspondre (g, x_0) , on déduit que la section globale de $\mathcal{O}|_{U_\alpha}$ associée à l'élément $s_\alpha \otimes 1$ du faisceau

$$j^{-1}\mathcal{O}|_{U_\alpha \times (X' \cap X'')} \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}|_{U_\alpha \times (X' \cap X'')}} \mathcal{O}|_{U_\alpha} \simeq j^*\mathcal{O}|_{U_\alpha \times (X' \cap X'')} \simeq \mathcal{O}|_{U_\alpha}$$

a la valeur λ_g en chaque point fermé g de U_α .

Cette section inversible est identifiée avec une section globale inversible t_α de $\mathcal{O}|_{U_\alpha \times X}$.

En remplaçant θ_α par $\theta'_\alpha = t_\alpha^{-1}\theta_\alpha$ dans le diagramme ci-dessus, on obtient un diagramme commutatif. La remarque initiale du LEMME 3.3 nous assure que les $\{\theta'_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se recollent en un isomorphisme θ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^*\mathcal{A} & \xrightarrow{p^*(\varphi)} & p^*\mathcal{B} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \theta \\ \sigma^*\mathcal{A} & \xrightarrow{\sigma^*(\varphi)} & \sigma^*\mathcal{B} \end{array}$$

soit commutatif, puisqu'en répétant un raisonnement du même type de celui que nous venons de faire — au moyen du LEMME 3.3 — on inférerait l'existence d'une section inversible de $\mathcal{O}_{(U_\alpha \cap U_\beta) \times X'}$ qui coïnciderait avec l'identité pour chaque couple $(\alpha, \beta) \in I$ dont l'intersection des ouverts associés soit non vide. Nous achevons de démontrer que \mathcal{B} est semi-linéarisable.

Montrons ensuite que la condition de cocycle est vérifiée. En appliquant au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \sigma^*\mathcal{A} & \xrightarrow{\sigma^*(\varphi)} & \sigma^*\mathcal{B} \\ \rho^{-1}=\rho' \downarrow & & \downarrow \theta'=\theta^{-1} \\ p^*\mathcal{A} & \xrightarrow{p^*(\varphi)} & p^*\mathcal{B} \end{array}$$

les foncteurs $(1_G \times \sigma)^*$, $(\mu \times 1_X)^*$ et p_{23}^* , on aboutit aux carrés commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} (1_G \times \sigma)^* \sigma^* \mathcal{A} & \longrightarrow & (1_G \times \sigma)^* \sigma^* \mathcal{B} \\ (1_G \times \sigma)^*(\rho') \downarrow & & \downarrow (1_G \times \sigma)^*(\theta') \\ (1_G \times \sigma)^* p^* \mathcal{A} & \longrightarrow & (1_G \times \sigma)^* p^* \mathcal{B} \end{array}$$

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} (\mu \times 1_X)^* \sigma^* \mathcal{A} & \longrightarrow & (\mu \times 1_X)^* \sigma^* \mathcal{B} \\ (\mu \times 1_X)^*(\rho') \downarrow & & \downarrow (\mu \times 1_X)^*(\theta') \\ (\mu \times 1_X)^* p^* \mathcal{A} & \longrightarrow & (\mu \times 1_X)^* p^* \mathcal{B} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} p_{23}^* \sigma^* \mathcal{A} & \longrightarrow & p_{23}^* \sigma^* \mathcal{B} \\ p_{23}^*(\rho') \downarrow & & \downarrow p_{23}^*(\theta') \\ p_{23}^* p^* \mathcal{A} & \longrightarrow & p_{23}^* p^* \mathcal{B}. \end{array}$$

Puisque l'on a $p_{23}^* \sigma^* \mathcal{A} = (1_G \times \sigma)^* p^* \mathcal{A}$ et $p_{23}^* \sigma^* \mathcal{B} = (1_G \times \sigma)^* p^* \mathcal{B}$, on peut, par composition des premier et troisième diagrammes, écrire le diagramme

$$(**) \quad \begin{array}{ccc} (1_G \times \sigma)^* \sigma^* \mathcal{A} & \longrightarrow & (1_G \times \sigma)^* \sigma^* \mathcal{B} \\ (1_G \times \sigma)^*(\rho') \downarrow & & \downarrow (1_G \times \sigma)^*(\theta') \\ (1_G \times \sigma)^* p^* \mathcal{A} & & (1_G \times \sigma)^* p^* \mathcal{B} \\ p_{23}^*(\rho') \downarrow & & \downarrow p_{23}^*(\theta') \\ p_{23}^* p^* \mathcal{A} & \longrightarrow & p_{23}^* p^* \mathcal{B} \end{array}$$

Ce diagramme est encore commutatif. Les morphismes horizontaux inférieurs des diagrammes (*) et (**) sont égaux; et il en est de même de ceux placés aux lignes horizontales supérieures. En résumé, on arrive au diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 (\mu \times 1_X)^* \sigma^* \mathcal{A} & \xrightarrow{(\mu \times 1_X)^* \sigma^* (\varphi)} & (\mu \times 1_X)^* \sigma^* \mathcal{B} \\
 & \searrow & \downarrow \nu \quad \downarrow \tau \\
 & & (\mu \times 1_X)^* p^* \mathcal{B},
 \end{array}$$

$(\mu \times 1_X)^* p^* (\varphi) \circ (\mu \times 1_X)^* (\rho')$

où $\tau = p_{23}^*(\theta') \circ (1_G \times \sigma)^*(\theta')$ et $\nu = (\mu \times 1_X)^*(\theta')$. Dans ce diagramme, ou bien le triangle auquel appartient τ est commutatif, ou bien le triangle auquel appartient ν est commutatif (ne pas oublier que ρ' est une linéarisation de \mathcal{A} par hypothèse). Si l'on envisage le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{G \times G \times X}}((\mu \times 1_X)^* \sigma^* \mathcal{B}, (\mu \times 1_X)^* p^* \mathcal{B})$, on a $\tau(g, g', x) = \lambda_{(g, g')} \nu(g, g', x)$, avec $\lambda_{(g, g')} \in K$, en vertu de la simplicité de \mathcal{B} . En prenant un point de X où le morphisme φ est non nul, on constate que, quels que soient g et g' , $\lambda_{(g, g')} = 1$. La remarque initiale du LEMME 3.3 nous montre alors que $\tau = \nu$.

PROPOSITION 3.2. — *Soit X un schéma réduit, projectif au-dessus de $\text{spec } K$, muni de l'action d'un groupe algébrique G , réduit et de type fini au-dessus de $\text{spec } K$. Si l'on a $\text{Pic } G = 0$, alors tout faisceau équivariant cohérent et simple \mathcal{F} sur X est semi-linéarisable.*

Démonstration. — La thèse est une conséquence directe du LEMME 3.2 et du lemme 3.16 de la page 11 de [10'''].

4. Simplicité des faisceaux stables.

PROPOSITION 4.1. — *Tout faisceau \mathcal{F} cohérent et sans torsion, sur \mathbb{P}^n , qui est stable au sens de Gieseker-Maruyama est simple.*

Cette assertion est connue. On l'énonce ici faute de référence.

5. Existence de sections semi-invariantes pour un faisceau simple.

PROPOSITION 5.1. — *Soient X un schéma réduit, projectif au-dessus de $\text{spec } K$, muni de l'action d'un groupe algébrique linéaire G , connexe, résoluble et tel que $\text{Pic } G = 0$. Soit aussi \mathcal{F} un faisceau G -équivariant*

et simple sur X . Dans ces conditions, il existe un entier p' positif suffisamment grand tel que $H^0(\mathcal{F}(p')) \neq 0$ et qui possède la propriété suivante : chaque $g \in G$ définit un K -automorphisme d'espace vectoriel et possède un vecteur propre commun à tous les éléments de G (section semi-invariante).

Démonstration. — L'isomorphisme φ entre $\sigma^*\mathcal{F}(p')$ et $p^*\mathcal{F}(p')$ (dont l'existence a été établie dans la PROPOSITION 3.2) et la formule de Künneth nous permettent de définir un K -automorphisme Φ de $H^0(\mathcal{F}(p'))$ dans $H^0(\mathcal{F}(p')) \otimes_K A$ (où A est tel que $\text{spec } A = G$)

$$\begin{aligned} \Phi : s \in H^0(\mathcal{F}(p')) &\longrightarrow s \otimes 1 \in H^0(\sigma^*\mathcal{F}(p')) \xrightarrow{\varphi} \\ &\xrightarrow{\varphi} \varphi(s \otimes 1) \in H^0(p^*\mathcal{F}(p')) = H^0(\mathcal{F}(p')) \otimes_K A. \end{aligned}$$

L'isomorphisme φ induit des isomorphismes φ_g entre $g^*(\mathcal{F}(p'))$ et $\mathcal{F}(p')$, pour tout $g \in G$, dont on déduit des K -endomorphismes de $H^0(\mathcal{F}(p'))$.

On va vérifier que G agit sur $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{F}(p')))$. On notera par \bar{s} le point de l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{F}(p')))$ de représentant $s \in H^0(\mathcal{F}(p'))$. Il suffit de constater que :

$$(1) \quad \overline{\varphi}_g[\varphi_g(s \otimes 1) \otimes 1] = \overline{\varphi}_{g'}(s \otimes 1)$$

et que l'application

$$(2) \quad (g, \bar{s}) \in G \times \mathbb{P}(H^0(\mathcal{F}(p'))) \longmapsto \overline{\varphi}_g(s \otimes 1) \in H^0(\mathcal{F}(p'))$$

est un morphisme de schémas. Or (1) découle de la relation $\varphi_{g'} \circ g'^*(\varphi_g) = \lambda \varphi_{gg'}$ qui est une conséquence de la simplicité de \mathcal{F} . Et, après avoir fixé une base (e_1, \dots, e_m) de l'espace vectoriel $H^0(\mathcal{F}(p'))$, le K -morphisme Φ associe à chaque e_i l'élément $\Phi(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij} \otimes e_j$, où $a_{ij} \in A$. Ainsi les a_{ij} définissent un morphisme de G dans A^{m^2} , identifié à l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre m , l'image de $g \in G$ étant $[a_{ij}(g)]$. Le fait que le K -endomorphisme φ_g de $H^0(\mathcal{F}(p'))$ défini par g soit induit par Φ , allié à l'égalité (1), nous montre que $[a_{ij}(g)] \in \text{GL}(m)$. Comme ce groupe agit sur $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{F}(p')))$, on en infère que l'application (2) est une action au sens de la Géométrie Algébrique. Donc le théorème du point fixe de Borel [3] nous assure la véracité de la thèse.

6. Un théorème de linéarisation pour les faisceaux simples.

THÉOREME 6.1. — Soient X un sous-schéma fermé et réduit de \mathbb{P}^n , G un sous-groupe algébrique fermé de $\text{GL}(n+1)$, connexe, résoluble, dont

$\text{Pic } G = 0$ et \mathcal{F} un faisceau G -équivariant et simple sur X . Alors \mathcal{F} est G -linéarisable.

Démonstration. — Prenons un entier m positif de sorte que, d'après le théorème bien connu de Serre, on ait $H^0(\mathcal{F}(m)) \neq 0$. Alors la PROPOSITION 5.1 nous permet de prendre une section semi-invariante de $H^0(\mathcal{F}(m))$, qui définit un morphisme θ de \mathcal{O} dans $\mathcal{F}(m)$. Si l'on considère, pour tout $g \in G$, le morphisme identité de $g^*\mathcal{O}$ dans \mathcal{O} , d'après l'identification de ceux-ci, et le morphisme φ_g de $g^*(\mathcal{F}(m))$ dans $\mathcal{F}(m)$, référés dans la démonstration de 5.1, provenant de l'isomorphisme φ de $\sigma^*\mathcal{F}(m)$ pour $p^*\mathcal{F}(m)$ construit dans 3.2, on constate que, par rapport aux familles de morphismes $\{1\}_{g \in G}$ et $\{\varphi_g\}_{g \in G}$, θ est G -équivariant à moins de multiplication par un scalaire λ_g pour chaque $g \in G$. En remplaçant la famille $\{\varphi_g\}_{g \in G}$ par $\{\lambda_g^{-1}\varphi_g\}_{g \in G}$, on voit que θ devient G -équivariant. Et en recourant à la PROPOSITION 3.1 on conclut que $\mathcal{F}(m)$ est linéarisable, d'où, en tenant compte d'une remarque effectuée au début du § 3, \mathcal{F} est linéarisable, ainsi qu'on voulait le prouver.

7. Application aux sous-schémas invariants de $\overline{M}(H; \mathbb{P}^n/\text{spec } K)$.

THÉORÈME 7.1. — Soit G un sous-groupe algébrique fermé de $\text{GL}(n+1)$, connexe, résoluble et dont $\text{Pic } G = 0$. Alors, dans tout sous-schéma fermé et G -invariant de $\overline{M}(H; \mathbb{P}^n/\text{spec } K)$, il y a une classe d'équivalence fixe qui contient un faisceau G -linéarisable. Celui-ci ou bien est stable ou bien est une somme directe finie de faisceaux stables.

Démonstration. — Il suffit de faire la combinaison du COROLLAIRE de la PROPOSITION 2.2, de la PROPOSITION 4.1, du THÉORÈME 6.1 et d'une remarque du début du § 3 relative à une somme directe de faisceaux linéarisables, pour croire à la véracité de la thèse.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALTMAN (A.) and KLEIMAN (S.). — Introduction to Grothendieck Duality Theory, *Lecture Notes in Mathematics*, **146**, Springer.
- [2] BERTIN (S.) et ELENCAWAG (G.). — Symétries des Fibrés vectoriels sur \mathbb{P}^n et nombre d'Euler, *Duke Math. J.*, t. **49**, 1982, p. 805–831.
- [3] BOREL (A.). — *Linear Algebraic Groups*, Notes by H. Bass. — New York, W.A. Benjamin, 1969.
- [4] BOURBAKI (N.). — *Éléments de Mathématique*.
- [5] BRIANÇON (J.) and IARROBINO (A.). — Dimension of the Punctual Hilbert Scheme, *J. Algebra*, t. **55**, 1978, p. 536–544.

- [6] DEMAZURE (M.) and GABRIEL (P.). — Introduction to Algebraic Geometry and Algebraic Groups, *North Holland Math. Studies*, **39**, 1980, ou *Groupes Algébriques*, tome 1, Paris, Masson et Cie, 1970.
 - [7] GROTHENDIECK (A.). — E.G.A., *Publ. Math. (IHES)*, n° 4, 8, 11, 20, 24, 28, 32.
 - [7'] GROTHENDIECK (A.). — Technique de Construction et Théorème d'Existence en Géométrie Algébrique- IV, *Les schémas de Hilbert*, *Séminaire Bourbaki*, n° 221, t. **13**, 1960-61.
 - [8] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic Geometry*. — G.T.M., Springer, n° 52.
 - [9] KANEYAMA (T.). — On equivariant vector bundles on an almost homogeneous variety, *Nagoya Math. J.*, t. **57**, 1975, p. 65-86.
 - [10] MARUYAMA (M.). — Moduli of stable sheaves, I, *J. Math. Kyoto Univ.*, t. **17-1**, 1977, p. 91-126.
 - [10'] MARUYAMA (M.). — Moduli of stable sheaves, II, *J. Math. Kyoto Univ.*, t. **18-3**, 1978, p. 557-614.
 - [10''] MARUYAMA (M.). — Openness of a family of torsion free sheaves, *J. Math. Kyoto Univ.*, t. **16-3**, 1976, p. 627-637.
 - [10'''] MARUYAMA (M.). — Moduli of stable sheaves, Generalities and the curve of jumping lines of vector bundles on \mathbb{P}^2 . *Advanced Studies in Pure Math. I*, Alg. Var. and Anal. Var. Kinokuniya, Tokyo, 1983.
 - [11] MILNE (J.S.). — *Etale Cohomology*. — Princeton Math. Series **33**, 1980.
 - [12] MUMFORD (D.) and FOGARTY (J.). — *Geometric Invariant Theory*. — Berlin, Springer-Verlag (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, band **34**), 1982.
 - [13] FORSTER . — Les fibrés vectoriels et Équations différentielles, [Colloque International, Nice], Birkhäuser, 1979.
-