

BULLETIN DE LA S. M. F.

FERDAOUS BOUAZIZ-KELLIL

Représentations sphériques des groupes agissant transitivement sur un arbre semi-homogène

Bulletin de la S. M. F., tome 116, n° 3 (1988), p. 255-278

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_3_255_0

© Bulletin de la S. M. F., 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS SPHÉRIQUES DES GROUPES AGISSANT TRANSITIVEMENT SUR UN ARBRE SEMI-HOMOGENÈME

PAR

FERDAOUS BOUAZIZ-KELLIL (*)

RÉSUMÉ. — Le groupe Γ des automorphismes d'un arbre semi-homogène est analogue à $SL_2(\mathbb{R})$ et admet des séries dites principales et complémentaires de représentations unitaires sphériques.

Nous étudions les sous-groupes fermés unimodulaires Δ de Γ agissant transitivement sur l'arbre et montrons qu'à part un nombre fini d'entre elles, les représentations précédentes se restreignent en des représentations irréductibles de Δ .

ABSTRACT. — The automorphism group Γ of a semi-homogeneous tree is similar to $SL_2(\mathbb{R})$ and admits so called principal and complementary series of spherical unitary representations.

We are studying here closed unimodular subgroups Δ of Γ which act transitively on the set of vertices of the same index, and we prove that apart from a finite number among them, the previous representations restrict to irreducible representations of Δ .

Introduction

Un certain nombre d'articles de A. FIGA TALAMANCA, M.A. PICARDELLO et d'autres ont été consacrés à de l'analyse harmonique sur des groupes discrets, plus particulièrement des groupes libres ou des produits amalgamés : voir en particulier [7], [8], [1], [11] et les références citées dans ces articles.

Une notion importante dans ce cadre est celle de fonction radiale sur le groupe. Mais comme l'a remarqué F. CHOUKROUN dans [3] pour le groupe libre, ce groupe Δ agit simplement transitivement sur un arbre homogène X et l'algèbre de convolution des fonctions radiales sur Δ se définit entièrement grâce à l'arbre X . En fait X est "l'espace symétrique" Γ/K

(*) Texte reçu le 28 juin 1985, révisé le 18 avril 1988.

F. BOUAZIZ-KELLIL, Université de Nancy I, Département de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy, France et Département de Mathématiques, Université de Annaba, Annaba, Algérie.

d'une paire de GUELFAND (Γ, K) où Γ est le groupe des automorphismes de X . Ainsi beaucoup de notions d'analyse harmonique sur Δ , Γ ou X sont identiques.

Parmi ces articles certains s'intéressent plus particulièrement à l'étude des représentations sphériques unitaires d'un groupe discret Δ et à leur irréductibilité : ces représentations peuvent se définir sur le plus gros groupe Γ qui possède une paire de GUELFAND (Γ, K) , mais le problème est de montrer que la restriction des représentations à Δ est encore irréductible.

Cette étude a été initiée par A. FIGA TALAMANCA et M.A. PICARDELLO [7], [8] pour le cas du groupe libre à r générateurs (r fini) qui agit simplement transitivement sur un arbre homogène X_{2r} d'indice $2r$.

Par la suite leurs travaux ont été généralisés par W. BETTORI et M. PAGLIACCI [1] qui ont traité le cas du produit amalgamé $(\mathbb{Z}^{*r}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*s}$ agissant simplement transitivement sur X_{2r+s} . De plus ils ont démontré que ces groupes sont les seuls agissant simplement transitivement sur un arbre homogène.

D'autre part A. IOZZI et M.A. PICARDELLO [11] ont démontré des résultats analogues dans le cas du produit amalgamé ${}^T(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ qui agit simplement transitivement sur un graphe symétrique.

Dans cet article, on se propose de généraliser ces résultats au cas de certains groupes agissant sur un arbre semi-homogène $X_{q,\ell}$ d'indice $(q+1, \ell+1)$ avec $q \geq 1$ et $\ell \geq 1$. Ces arbres sont aussi appelés arbres de Bruhat-Tits ou immeubles affines de rang 1, les représentations du groupe de leurs automorphismes ont été étudiés par G. I. OL'SHANSKII [15]. Comme un graphe symétrique peut être considéré comme un arbre semi-homogène, on retrouve ainsi tous les cas particuliers déjà étudiés.

Les résultats et ingrédients principaux sont les suivants :

On calcule le noyau de Green et le noyau de Martin de l'arbre $X_{q,\ell}$ comme cela est fait par P. CARTIER [2] dans le cas d'un arbre homogène. L'algèbre de convolution des fonctions radiales est la même pour tout groupe Δ agissant sur $X_{q,\ell}$ transitivement sur l'ensemble S^q des sommets d'indice $q+1$. Ceci évite le calcul (un peu technique) des fonctions sphériques puisqu'il suffit de traduire les résultats de [11] faits pour un cas particulier. Ces fonctions sphériques définissent des représentations unitaires irréductibles (série principale et complémentaire) du groupe $\Gamma_{q,\ell}$ des automorphismes de $X_{q,\ell}$.

Le groupe Δ agissant toujours transitivement sur S^q on donne, relativement à un système particulier de générateurs, une décomposition de tout élément de Δ analogue à celle des groupes libres ou produits amalgamés.

Sauf pour un nombre fini de représentations, on obtient l'irréductibilité

de la restriction des représentations unitaires ci-dessus de $\Gamma_{q,\ell}$ à tous les sous-groupes Δ fermés unimodulaires de $\Gamma_{q,\ell}$ transitifs sur S^q . Le principe de la démonstration est le même que celui de [7] (déjà utilisé dans [1] et [11]). Le travail est de montrer qu'un lemme technique sur Δ est encore vrai pour ces groupes Δ très généraux, on utilise alors la décomposition déjà signalée.

Un exemple à la fin du chapitre II montre que si l'on affaiblit l'hypothèse " Δ transitif sur S^q ," quelques autres restrictions de représentations deviennent réductibles.

1. Le groupe Γ des automorphismes d'un arbre semi-homogène X

1.1. Arbres semi-homogènes. — Soient X un arbre, S l'ensemble des sommets. L'ensemble S est muni d'une distance : si $s, t \in S$ $d(s, t)$ est la longueur de la géodésique joignant s à t .

L'indice d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant pour extrémités ce sommet.

Un arbre semi-homogène $X_{q,\ell}$ est un arbre d'indice $(q+1, \ell+1)$ (avec $q \geq 1$; $\ell \geq 1$). C'est-à-dire que tout sommet est soit d'indice $q+1$, soit d'indice $\ell+1$ et si un sommet est d'indice $q+1$, tout sommet voisin est d'indice $\ell+1$ et réciproquement. (Il est clair que $X_{q,\ell}$ est unique à un isomorphisme près).

On considère alors deux cas :

a) $q \neq \ell$: on définit S^q comme l'ensemble des sommets d'indice $q+1$ et S^ℓ comme l'ensemble des sommets d'indice $\ell+1$. On a $S^q \cap S^\ell = \emptyset$ et $S = S^q \cup S^\ell$.

b) $q = \ell$: on définit une subdivision de S en deux, on choisit $s_0 \in S$ et on pose :

$$\begin{aligned} S' &= \{s \in S ; d(s, s_0) \text{ est pair}\} \\ S'' &= \{s \in S ; d(s, s_0) \text{ est impair}\}. \end{aligned}$$

Ainsi S' et S'' sont les classes d'équivalences pour la relation :

$$s \sim s' \iff d(s, s') \text{ est pair.}$$

Dans la suite chaque fois que l'on parlera de S^q ou S^ℓ , il faudra lire S' (resp. S'') à la place de S^q (resp. S^ℓ) si $q = \ell$.

Si X_q est un arbre homogène, d'indice $q+1$ (où $q \geq 2$), d'ensemble de sommet Σ , c'est aussi un arbre semi-homogène de type $X_{q,1}$ où $S^q = \Sigma$ et $S^1 = (\text{milieu des arêtes de } \Sigma)$. Cependant les distances sur Σ sont doubles dans $X_{q,1}$.

X_q est aussi un arbre semi-homogène de type $X_{q,q}$.

On peut relier cette notion d'arbre semi-homogène à celle de graphe symétrique définie dans [11] : *si on a un arbre semi-homogène $X_{q,\ell}$, l'ensemble S^q est l'ensemble des sommets d'un graphe symétrique obtenu en joignant par une arête deux sommets de S^q à distance deux.*

Réciproquement à partir d'un graphe symétrique, on construit un arbre semi-homogène : l'ensemble S^q est l'ensemble des sommets du graphe. L'ensemble S^ℓ est l'ensemble des barycentres des polygones du graphe. Un élément de S^q et un élément de S^ℓ sont joints par une arête si le sommet correspondant appartient au polygone correspondant.

Le dictionnaire permettant de traduire les résultats de [11] dans nos notations est donc :

$$k \mapsto \ell + 1; \quad r \mapsto q + 1; \quad q \mapsto \ell q; \quad {}^r\mathbb{Z}_k \mapsto X_{q,\ell}$$

(les distances sur S^q ou Σ diffèrent cependant d'un facteur 2).

Fixons un sommet s_0 et considérons une géodésique infinie d'origine s_0 . C'est une suite infinie $[s_0, s_1, \dots, s_n, \dots]$ où les s_i sont différents deux à deux et où s_n est lié à s_{n-1} pour tout $n \geq 1$. On introduit une relation d'équivalence : deux telles géodésiques infinies définissent le même bout si elles ne diffèrent que par un nombre fini de sommets. Donc un bout ne dépend plus de l'origine.

Soit $\hat{S} = S \cup B$, où B est l'ensemble des bouts. On définit $\delta_t(s, s') = d(s, t) - d(s', t)$ pour tout $s, s', t \in S$. De même $\delta_b(s, s') = \delta_t(s, s')$ où t est le point d'intersection des géodésiques $[s, s']$; $[s, b]$; $[s', b]$. La relation $\delta_b(s, s') = 0$ est une relation d'équivalence entre sommets s, s' . Les classes d'équivalences s'appellent les *horocycles associés* à b [2].

De manière plus explicite, choisissons un sommet s_0 de référence et pour tout entier n , notons H_n l'ensemble des sommets s tels que $\delta_b(s, s_0) = n$. Les H_n sont les horocycles associés à b . On a $s_0 \in H_0$ et $S = \coprod_{n=-\infty}^{\infty} H_n$, les H_n sont deux à deux disjoints.

On note aussi $S_n = \{s \in S \mid d(s, s_0) = n\}$ la sphère de centre s_0 et de rayon n .

THÉORÈME 1.1 : [2]. — *Il existe une topologie compacte sur \hat{S} telle que :*

- 1) S est un ouvert, dense, discret de \hat{S} ;
- 2) B est un compact;
- 3) Si $b = \{s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\} \in B$, alors les ensembles :

$$V_{b,n}^{s_0} = \left\{ b' \in B \mid b' = \{s_0, \dots, s_n, s'_{n+1}, \dots\} \right\} \cup \left\{ s' \in S \mid s_n \in [s'_0 s'] \right\}$$

forment, quand n varie, une base de voisinages de b .

1.2. Groupe des automorphismes. — On considère le groupe des automorphismes $\Gamma_{q,\ell}$ (ou Γ) de l'arbre $X_{q,\ell}$. Il stabilise automatiquement S^q et S^ℓ si $q \neq \ell$.

Si $q = \ell$, on appelle $\Gamma_{q,q}$ le groupe des automorphismes de $X_{q,q}$ qui stabilisent S' et S'' (c'est un sous-groupe d'indice 2 du groupe Γ_q de tous les automorphismes de $X_q = X_{q,q}$).

Le groupe Γ agit isométriquement sur S .

PROPOSITION 1.2. — *Soit $X_{q,\ell}$ un arbre semi-homogène, alors :*

- 1) Γ opère transitivement sur $S^q \times B$;
- 2) Si $s_0 \in S^q$, le stabilisateur K_0 de s_0 opère transitivement sur l'ensemble B et sur S_n pour $n \geq 1$;
- 3) Γ opère doublement transitivement sur S^q relativement à la distance, c'est-à-dire que les orbites de Γ dans S^q sont formées de tous les couples de sommets à la même distance.

Démonstration. — C'est évident par transport de structure.

THÉORÈME 1.3 (cf. [2]). — *Il existe une topologie sur Γ telle que :*

- 1) Γ soit localement compact;
- 2) Si on fixe $s_0 \in S$ et si on considère K_0 le stabilisateur de s_0 , alors K_0 est un compact, ouvert;
- 3) L'application

$$\begin{aligned}\Gamma \times \widehat{S} &\longrightarrow \widehat{S} \\ (\gamma, s) &\longmapsto \gamma s\end{aligned}$$

est continue.

COROLLAIRE 1.4. — (Γ, K_0) est une paire de GUELFAND.

Démonstration. — Γ agit doublement transitivement sur S^q relativement à la distance.

COROLLAIRE 1.5. — *Il existe une unique mesure μ_{s_0} de masse totale 1 sur B invariante par K_0 .*

Démonstration. — La mesure de $V_{b,n}^{s_0} \cap B$ est nécessairement : $[(q+1)\ell(\ell q)^{p-1}]^{-1}$ si $2p = n$ et $[(q+1)(\ell q)^{p-1}]^{-1}$ si $2p-1 = n$. Il est facile de voir que ceci définit une unique mesure [2].

Remarques 1.6.

- 1) D'après [2], si on change s_0 , on a :

$$d\mu_{s'_0}(b) = K_{s'_0, s_0}(b) d\mu_{s_0}(b)$$

où $K_{s'_0, s_0}(b)$ est la fonction qui va être définie et calculée par la suite.

2) Il existe une métrique sur Γ définie de la façon suivante : on fixe $s_0 \in S$ et $g, h \in \Gamma$, alors :

$$\delta(g, h) = \sum_{s \in S} d(gs, hs) \alpha^{-2d(s_0, s)}, \quad \alpha > \sup(q, \ell) + 1.$$

Cette métrique induit sur Γ la topologie ci-dessus.

1.3. Groupes transitifs sur S^q . — On considère un sous-groupe Δ de Γ , un élément $s_0 \in S^q$ et le stabilisateur Δ_0 de s_0 dans Δ .

Pour $\delta \in \Gamma$, on pose $|\delta| = d(s_0, \delta s_0)$.

Pour une partie Δ_2 de Δ , on considère la condition (*) suivante.

$$(*) \quad \begin{cases} \text{l'application } \Delta_2 \rightarrow S_2 \text{ définie par } \delta \mapsto \delta s_0 \text{ est une bijection} \\ \text{de } \Delta_2 \text{ sur l'ensemble } S_2 \text{ des sommets à distance deux de} \\ s_0. \end{cases}$$

PROPOSITION 1.7 (comparer à [4]). — *S'il existe une partie $\Delta_2 \subset \Delta$ vérifiant (*) alors :*

1) *Pour tout $s \in S^q$ avec $d(s, s_0) = 2n$, il existe $\delta_1, \dots, \delta_n \in \Delta_2$ uniques tels que :*

$$s = \delta_1 \dots \delta_n s_0.$$

2) *Pour tout $\delta \in \Delta$ tel que $|\delta| = 2n$, il existe $\delta_1, \dots, \delta_n \in \Delta_2$ et $\delta_0 \in \Delta_0$ uniques tels que :*

$$\delta = \delta_1 \dots \delta_n \delta_0.$$

De plus $\delta_1, \dots, \delta_n$ sont déterminés par δs_0 .

3) *Si $\delta_1, \dots, \delta_n \in \Delta_2$ et $\delta_0 \in \Delta_0$, on a $|\delta_1 \dots \delta_n \delta_0| = 2n$ si et seulement si $|\delta_i \delta_{i+1}| = 4$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.*

Remarques.

1) Comme $\text{Card} \{s \in S \mid d(s, s_0) = 2\} = (q+1)\ell$, on a $|\Delta_2| = (q+1)\ell$.

2) Si Δ_2 vérifie (*) et si $\delta \in \Delta$, alors ${}^\delta \Delta_2$ vérifie l'analogie de la condition (*) obtenue en remplaçant s_0 par δs_0 où ${}^\delta \Delta_2 = \delta \Delta_2 \delta^{-1}$.

3) Si $\delta_1, \dots, \delta_n \in \Delta_2$, notons $s_i = \delta_1 \dots \delta_i s_0$. Pour $1 \leq i \leq n$, on a $d(s_i, s_{i-1}) = 2$. Donc $d(s_0, s_n) = 2n$ si et seulement si $[s_0, s_1, \dots, s_n]$ est la géodésique dans S^q joignant s_0 à s_n .

Démonstration.

1) Soit $s \in S^q$; $d(s, s_0) = 2n$, on considère la géodésique dans S^q joignant s_0 à s , soit $[s_0, s_1, \dots, s_n = s]$. D'après la Remarque 3, les $\delta_1, \dots, \delta_n$ cherchés sont tels que $\delta_1 \dots \delta_i s_0 = s_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Par récurrence, on peut supposer qu'on a trouvé $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ uniques tels que $\delta_1 \dots \delta_i s_0 = s_i$, avec $1 \leq i \leq n-1$. Il faut trouver $\delta_n \in \Delta_2$ unique tel que $\delta_1 \dots \delta_n s_0 = s_n = s$. Soit $\delta'_n = (\delta_1 \dots \delta_{n-1}) \delta_n (\delta_1 \dots \delta_{n-1})^{-1}$, on a donc $\delta_1 \dots \delta_n s_0 = \delta'_n s_{n-1}$. Comme on cherche $\delta_n \in \Delta_2$, l'élément δ'_n doit être dans $\delta_1 \dots \delta_{n-1} \Delta_2$. Comme de plus $d(s_n, s_{n-1}) = 2$, on conclut grâce à la *Remarque 2* ci-dessus.

2) La seconde partie est une conséquence évidente de la première partie.

3) Pour la troisième partie, il suffit d'après la *Remarque 3* de remarquer qu'une suite s_0, s_1, \dots, s_n de points de S^q à distance 2 est une géodésique si et seulement $d(s_i, s_{i+2}) = 4$ et que

$$d(\delta_1 \dots \delta_{i-1} s_0, \delta_1 \dots \delta_{i+1} s_0) = d(s_0, \delta_i \delta_{i+1} s_0) = |\delta_i \delta_{i+1}|.$$

COROLLAIRE 1.8. — Δ agit transitivement sur S^q si et seulement s'il existe un $\Delta_2 \subset \Delta$ vérifiant (*).

PROPOSITION 1.9. — Soit Δ_2 une partie de Γ vérifiant (*). Soient Δ le sous-groupe de Γ engendré par Δ_2 (Δ agit transitivement sur S^q) et Δ_0 l'ensemble des éléments de Δ qui fixent s_0 . Alors Δ_0 est la réunion (croissante) des sous-groupes Δ_0^i définis par récurrence comme suit : $\Delta_0^0 = \{1\}$. Si Δ_0^i est défini, on note Δ_2^i l'ensemble des conjugués d'un élément de Δ_2 par un élément de Δ_0^i et Δ_0^{i+1} le groupe engendré par Δ_0^i et les éléments de l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{aligned} \delta\delta' & \text{ avec } \delta, \delta' \in \Delta_2^i \text{ et } |\delta\delta'| = 0; \\ \delta\delta'\delta'' & \text{ avec } \delta, \delta', \delta'' \in \Delta_2^i \text{ et } |\delta\delta'\delta''| = 0. \end{aligned}$$

Cette proposition (non essentielle pour la suite) se démontre par la même méthode que la précédente.

1.10. Exemples de sous-groupes Δ de $\Gamma_{q,\ell}$ transitifs sur S^q . Le but de ce travail est de généraliser un certain nombre de travaux se situant dans le sillage de [7].

Ceux-ci traitent de cas particuliers de groupes agissant sur un arbre semi-homogène.

a) Le groupe libre à r générateurs agit simplement transitivement sur X_{2r} (cf. [7], [8], [13]).

b) Le produit libre $\mathbb{Z}^{*r} * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*s}$ agit simplement transitivement sur X_{2r+s} (cf. [1]). D'après [1] ou [14], ces groupes sont les seuls agissant simplement transitivement sur un arbre homogène.

c) Le produit amalgamé $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{*r}$ agit simplement transitivement sur un graphe symétrique (cf. [11]), c'est-à-dire qu'il agit sur $X_{r-1,k-1}$, avec une seule orbite dans S^{r-1} . Les r sous-groupes $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ engendrant ce groupe sont les stabilisateurs de r voisins d'un sommet s d'indice r . Ils permutent chacun transitivement l'ensemble de leurs sommets voisins.

d) Le produit amalgamé $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ qui contient le groupe précédent, agit transitivement sur un graphe symétrique (cf. [11]), c'est-à-dire sur $X_{r-1,k-1}$ transitivement sur S^{r-1} et S^{k-1} . Les groupes $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ sont les stabilisateurs de deux sommets voisins de $X_{r-1,k-1}$ respectivement d'un sommet d'indice r et d'un sommet d'indice k . Ils permutent chacun transitivement l'ensemble de leurs sommets voisins.

e) On peut trouver dans [13] la classification de tous les groupes agissant sur des arbres. Si on exige que cet arbre soit un arbre semi-homogène $X_{q,\ell}$ et que le groupe Δ agisse simplement transitivement sur S^q et sur S^ℓ , on trouve que le seul exemple est le suivant : $q = \ell$ et Δ est le groupe fondamental du graphe formé de deux sommets et de $q + 1$ arêtes joignant ces deux sommets. Le groupe Δ est donc un groupe libre à q générateurs agissant sur l'arbre $X_{q,q}$ qui est le revêtement universel du graphe précédent.

Si $q = 2r - 1$ est impair, le groupe libre F à r générateurs agit sur X_q (simplement transitivement sur tous les sommets) et Δ est le sous-groupe de F formé des mots de longueur paire.

f) On peut construire (grâce à la PROPOSITION 1.9) un exemple de groupe discret Δ agissant transitivement sur X_q , qui ne possède pas de sous groupe agissant simplement transitivement sur X_q . Ainsi la démonstration au chapitre 3 de l'irréductibilité de la restriction à Δ de certaines représentations de Γ ne se déduit pas trivialement de la même démonstration dans [1] pour le cas b).

2. Analyse harmonique sur $X_{q,\ell}$

2.1. Noyaux sur $X_{q,\ell}$. — Un noyau est une fonction

$$P : S \times S \longrightarrow [0, +\infty] \\ (s, t) \longmapsto P(s, t).$$

Si on a deux noyaux P, Q , on définit leur produit de convolution

$$PQ(s, t) = \sum_{u \in S} P(s, u)Q(u, t).$$

Si Q est un noyau, on note Q^q (resp. Q^ℓ) le noyau dont la valeur en (s, t) est $Q(s, t)$ si $s \in S^q$ (resp. S^ℓ) et 0 sinon. On a donc $Q = Q^q + Q^\ell$.

a) Noyau de GREEN. On arrive à trouver explicitement le noyau de Green G et à démontrer qu'il est fini, grâce à des calculs analogues à ceux de [2].

PROPOSITION 2.1. — *Le noyau de GREEN est fini et vaut $G^\ell + G^q$, avec*

$$G^\ell(s, t) = \begin{cases} \frac{\ell(q+1)}{\ell q - 1}(\ell q)^{-n} & \text{si } s, t \in S^\ell \text{ et } d(s, t) = 2n \\ \frac{q+1}{q\ell - 1}(\ell q)^{-n} & \text{si } s \in S^\ell, t \in S^q \text{ et } d(s, t) = 2n + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$G^q(s, t) = \begin{cases} \frac{q(\ell+1)}{\ell q - 1}(\ell q)^{-n} & \text{si } s, t \in S^q \text{ et } d(s, t) = 2n \\ \frac{\ell+1}{\ell q - 1}(\ell q)^{-n} & \text{si } s \in S^q, t \in S^\ell \text{ et } d(s, t) = 2n + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) Noyau de MARTIN associé à P . On veut définir une fonction localement constante sur \hat{S} prenant la valeur :

$$K_{s,s'}(t) = \frac{G(s, t)}{G(s', t)} \quad \text{pour tout } t \in S.$$

On obtient selon les différents cas :

$$K_{s,s'}(t) = \begin{cases} (\ell q)^{-\delta_t(s,s')/2} & \text{si } (s, s', t) \in \begin{cases} S^\ell \times S^\ell \times S^\ell \\ S^\ell \times S^\ell \times S^q \\ S^q \times S^q \times S^q \\ S^q \times S^q \times S^\ell \end{cases} \\ \frac{q+1}{q(\ell+1)}(\ell q)^{(-\delta_t(s,s')+1)/2} & \text{si } (s, s', t) \in \begin{cases} S^\ell \times S^q \times S^\ell \\ S^\ell \times S^q \times S^q \end{cases} \\ \frac{\ell+1}{\ell(q+1)}(\ell q)^{(-\delta_t(s,s')+1)/2} & \text{si } (s, s', t) \in \begin{cases} S^q \times S^\ell \times S^q \\ S^q \times S^\ell \times S^\ell \end{cases} \end{cases}$$

On prolonge $K_{s,s'}$ sur S par :

$$K_{s,s'}(b) = K_{s,s'}(t)$$

où t est un point d'intersection des géodésiques $[s, b]$ et $[s', b]$. D'où :

$$K_{s,s'}(b) = \begin{cases} (\ell q)^{-\delta_b(s,s')/2} & \text{si } (s, s') \in \begin{cases} S^\ell \times S^\ell \\ S^q \times S^q \end{cases} \\ \frac{q+1}{q(\ell+1)}(\ell q)^{(-\delta_b(s,s')+1)/2} & \text{si } (s, s') \in S^\ell \times S^q \\ \frac{\ell+1}{\ell(q+1)}(\ell q)^{(-\delta_b(s,s')+1)/2} & \text{si } (s, s') \in S^q \times S^\ell \end{cases}$$

Ainsi le noyau de MARTIN se détermine en choisissant un sommet s_0 de référence.

Le noyau de MARTIN est $K_{s_0}(s, b) = K_{s, s_0}(b)$. D'où :

$$K_{s_0}(s, b) = \begin{cases} (\ell q)^{-n/2} & \text{si } s \in H_n(b) \text{ et } (s, s_0) \in \begin{cases} S^\ell \times S^\ell \\ S^q \times S^q \end{cases} \\ \frac{q+1}{q(\ell+1)} (\ell q)^{(-n+1)/2} & \text{si } s \in H_n(b) \text{ et } (s, s_0) \in S^\ell \times S^q \\ \frac{\ell+1}{\ell(q+1)} (\ell q)^{(-n+1)/2} & \text{si } s \in H_n(b) \text{ et } (s, s_0) \in S^q \times S^\ell. \end{cases}$$

Remarques 2.2.

1) Dans le cas $\ell = q$ ou $\ell = 1$, on retrouve les résultats de [2] pour un arbre homogène.

2) Dans le cas $(s, s_0) \in S^q \times S^q$ on retrouve les formules de [11] où $K_{s_0}(\gamma s_0, b)$ est noté $P(\gamma, b)$ et appelé noyau de Poisson.

3) Si s, s' appartiennent au même horocycle relatif à b , on a

$$K_{s_0}(s, b) = K_{s_0}(s', b).$$

Si $\ell > 1$ ou $q > 1$, on peut démontrer que la réciproque est vraie, ce qui généralise un résultat de CARTIER [2] dans le cas homogène.

2.2. Fonctions radiales et fonctions sphériques

Définition 2.3. — Une fonction radiale sur $X_{q,\ell} \times X_{q,\ell}$ est une fonction invariante par Γ , soit $F(s, t) = F(\gamma s, \gamma t)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'espace vectoriel R des fonctions radiales est une algèbre pour le produit de convolution. Une fonction radiale F s'écrit de la façon suivante :

$$F(s, t) = F_{q,q}(s, t) + F_{q,\ell}(s, t) + F_{\ell,\ell}(s, t) + F_{\ell,q}(s, t)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{q,q}(s, t) &= \begin{cases} F(s, t) & \text{si } s, t \in S^q; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ F_{\ell,\ell}(s, t) &= \begin{cases} F(s, t) & \text{si } s, t \in S^\ell; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ F_{q,\ell}(s, t) &= \begin{cases} F(s, t) & \text{si } s \in S^q, t \in S^\ell; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ F_{\ell,q}(s, t) &= \begin{cases} F(s, t) & \text{si } s \in S^\ell, t \in S^q; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

D'après la PROPOSITION 1.2, les fonctions $F_{q,q}$; $F_{q,\ell}$; $F_{\ell,q}$ et $F_{\ell,\ell}$ (restreintes à leur support) ne dépendent que de $d(s, t)$. Ainsi R est la somme directe de quatre espaces vectoriels

$$R = R_{q,q} \oplus R_{q,\ell} \oplus R_{\ell,q} \oplus R_{\ell,\ell}$$

définis par $F \in R_{x,y} \Leftrightarrow F = F_{x,y}$.

PROPOSITION 2.4. — $R_{q,q}$ et $R_{\ell,\ell}$ sont deux sous-algèbres commutatives et commutant entre elles de R .

Démonstration. — Il est clair que le produit de convolution de deux éléments de $R_{q,q}$ et $R_{\ell,\ell}$ est zéro.

En utilisant le même genre de calcul que [7] on arrive à démontrer que $R_{q,q}$ est une sous-algèbre commutative engendrée par F^1 où

$$F^1(s, t) = \begin{cases} ((q+1)\ell)^{-1} & \text{si } s, t \in S^q \text{ et } d(s, t) = 2; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans la suite on ne s'occupe que de l'algèbre commutative

$$R' = R_{q,q} \oplus R_{\ell,\ell}$$

et, sauf indication contraire, que de $R_{q,q}$. On choisit $s_0 \in S^q$.

Définition 2.5. — Soit Δ un sous-groupe de Γ transitif sur S^q . Une fonction radiale sur Δ est une fonction telle que

$$f(\delta) = f(|\delta|) \quad \text{où} \quad |\delta| = d(s_0, \delta s_0).$$

On note \mathcal{R}_Δ l'ensemble des fonctions radiales sur Δ .

COROLLAIRE 2.6.

1. L'application $F \rightarrow f$ de $R_{q,q}$ vers \mathcal{R}_Δ définie par $f(\delta) = F(s_0, \delta s_0)$ est une bijection entre fonctions radiales.

2. Cette bijection conserve le produit de convolution.

Démonstration. — La première partie est claire. Pour la seconde on utilise les mêmes genres de calculs que [3].

Remarque 2.7. — L'algèbre de convolution des fonctions radiales est donc la même qu'on la considère sur $S^q \times S^q$ ou sur n'importe quel groupe Δ transitif sur S^q .

En particulier, pour $\Delta = \Gamma$, le couple (Γ, K_0) est une paire de GUELFAND où $\Delta = \overset{q+1}{*} \mathbb{Z}_{\ell+1}$.

Tous les résultats d'analyse harmonique sur les fonctions radiales démontrés pour l'un de ces exemples s'étendent donc à tous les cas envisagés ici.

Fonctions sphériques.

Définition 2.8. — Une *fonction sphérique* φ est une fonction radiale telle que :

1. $\varphi(s_0, s_0) = 1$.
2. φ est un vecteur propre de l'opérateur de convolution à droite par F^1 .

Remarque 2.9. — Grâce à la *Remarque 2.7* et au dictionnaire qui nous permet de passer d'un graphe symétrique à un arbre semi-homogène, on trouve :

1. Les fonctions sphériques sont, pour $z \neq \frac{1}{2} + (ki\pi)/\log(\ell q)$, données par la formule

$$\varphi_z(s_0, s) = c_z h_z(s_0, s) + c_{1-z} h_{1-z}(s_0, s)$$

où l'on a posé, pour simplifier,

$$c_z = \frac{[q + (\ell q)^z][(\ell q)^z - \ell q]}{(q + 1)[(\ell q)^{2z} - \ell q]} \quad \text{et} \quad h_z(s_0, s) = (\ell q)^{-zd(s_0, s)/2}.$$

Pour $z = \frac{1}{2} + (ki\pi/\log(\ell q))$ et $k \in \mathbb{Z}$, elles sont données par la formule

$$\varphi_z(s_0, s) = \left[1 + \frac{2\ell q + (-1)^k(\ell - 1)\sqrt{\ell q} - \ell(q + 1)}{\ell(q + 1)} \frac{d(s_0, s)}{2} \right] \times (-1)^{kd(s_0, s)/2} (\ell q)^{-d(s_0, s)/4}.$$

La valeur propre de l'opérateur de convolution associé à φ_z est

$$\gamma(z) = \frac{\ell - 1 + (\ell q)^{1-z} + (\ell q)^z}{\ell(q + 1)}$$

et, pour $\delta \in \Gamma$ tel que $|\delta| = 2$, on a $\varphi_z(\delta) = \varphi_z(s_0, \delta s_0) = \gamma(z)$.

2. φ_z est bornée si et seulement si $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$.

3. On a les équivalences

$$\varphi_z = \varphi_{z'} \iff \gamma(z) = \gamma(z') \iff z = z' \text{ ou } 1 - z' \text{ à } 2hi\pi/\log(\ell q) \text{ près.}$$

4. On a $\varphi_z(s_0, s) = \int_B K_{s_0}^z(s, \omega) d\mu_{s_0}(\omega)$.

5. Soit φ_z une fonction sphérique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) φ_z est de type positif;
- b) $\gamma(z)$ est réel et $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$;
- c) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ ou $\operatorname{Im} z = k\pi/\log(\ell q)$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$.

2.3. Représentations sphériques. — Soit $E(s)$ l'ensemble des bouts b tels que la géodésique de s_0 à b passe par s .

On note $X_s = X_{E(s)}$ la fonction caractéristique de $E(s)$. Ces fonctions engendrent un espace vectoriel $K(B)$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère la représentation π_z de Δ (supposé transitif sur S^q) dans $K(B)$ défini par :

$$\pi_z(\gamma)\xi(\omega) = K_{s_0}^z(\gamma s_0, \omega)\xi(\gamma^{-1}\omega).$$

On note par **1** la fonction identiquement égale à 1 sur B . On remarque que $\varphi_z(s_0, \gamma s_0) = \langle \pi_z(\gamma)\mathbf{1} \mid \mathbf{1} \rangle$ où $\langle \mid \rangle$ est le produit scalaire usuel dans $(L^2(B), d\mu_{s_0})$.

PROPOSITION 2.10. — *Le sous-espace K_z de $K(B)$ engendré par la fonction **1** et l'action de π_z est $K(B)$ l'espace tout entier si et seulement si :*

$$\begin{cases} z \neq 2ik\pi/\log(\ell q), \\ z \neq (\log \ell + (2k+1)i\pi)/\log(\ell q), \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. En particulier le vecteur **1** est cyclique pour la représentation π_z si et seulement si z est différent des valeurs ci-dessus.

Démonstration. — Il suffit d'adapter la démonstration de [11] à notre cas en remarquant que seule la transitivité de Δ sur S^q intervient. On notera que si $z = 2ki\pi/\log(\ell q)$, on a $K_{s_0}^z(\gamma s_0, \omega) = 1$ et donc $K_z = \mathbb{C}\mathbf{1}$.

Si $z = \log \ell + (2k+1)i\pi/\log(\ell q)$, l'espace K_z est engendré par **1** et les fonctions $\ell X_s - X_{s_-}$ pour $s \in S^q$ et $d(s, s_0) > 0$ (on note s_- le sommet de $X_{q,\ell}$ tel que $d(s, s_0) = 1$ et $d(s_0, s_-) = d(s, s_0) - 1$). Il n'est pas dense dans $K(B)$ car son orthogonal pour la norme L^2 contient les fonctions $X_{s'} - X_{s''}$ pour $s', s'' \in S^\ell$ et $s'_- = s''_-$.

COROLLAIRE 2.11. — *Soit la transformation de Poisson définie par $P_z\xi(\gamma) = \langle \pi_z(\gamma^{-1})\xi \mid \mathbf{1} \rangle$ pour tout $\xi \in K(B)$. Si $z \neq 1 + 2ki\pi/\log(\ell q)$ ou si $z \neq 1 - (\log \ell + (2k+1)i\pi)/\log(\ell q) = (\log q + (2k+1)i\pi)/\log(\ell q)$, alors P_z est injective.*

Démonstration. — La démonstration est la même que celle de [11] en s'appuyant sur la proposition précédente et en notant que l'adjointe de

$\pi_z(\gamma)$ est $\pi_z(\gamma)^* = \pi_{1-\bar{z}}(\gamma^{-1})$ et donc que $P_z \xi(\gamma) = (\xi, \pi_{1-\bar{z}}(\gamma) \cdot \mathbf{1}) = \int_B \xi(\omega) \cdot K_{s_0}^{1-z}(\gamma s_0, \omega) d\mu_{s_0}(\omega)$.

Remarque 2.12.

1. La transformation de Poisson applique l'espace K_z sur l'espace des combinaisons linéaires de translatés à droite de la fonction sphérique φ_z . Puisque

$$\begin{aligned}(P_z \pi_z(\gamma_i) \mathbf{1})(\gamma) &= \langle \pi_z(\gamma^{-1}) \pi_z(\gamma_i) \mathbf{1} \mid \mathbf{1} \rangle \\ &= \langle \pi_z(\gamma^{-1} \gamma_i) \mathbf{1} \mid \mathbf{1} \rangle = \varphi_z(\gamma^{-1} \gamma_i).\end{aligned}$$

2. En utilisant le fait que $\varphi_z(\gamma) = \int_B \pi_z(\gamma) \mathbf{1} d\mu_{s_0}(\omega)$ et que $K(B)$ est dense dans $L^2(B)$, on prolonge π_z en une *représentation unitaire* dans $(L^2(B), d\mu_{s_0})$ dans le cas $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ (quitte à noter par π_z le prolongement) et c'est la *série principale*.

D'autre part pour $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, $\operatorname{Im} z = k\pi/\log(\ell q)$ et $k \in \mathbb{Z}$, on sait, d'après le THÉORÈME 2, que φ_z est de type positif, ce qui va nous permettre de prolonger π_z en une représentation unitaire sur un espace de Hilbert \mathcal{H}_z défini comme suit : pour $\xi \in K_z$ tel que $\xi = \sum_i C_i \pi_z(\gamma_i) \mathbf{1}$, on considère la fonction

$$\|\xi\|_2^2 = \sum_{i,j} C_i C_j \varphi_z(\gamma_i^{-1} \gamma_j).$$

Alors $\|\cdot\|_z$ définit une structure préhilbertienne sur K_z et \mathcal{H}_z est le séparé complété de K_z pour $\|\cdot\|_z$.

Si de plus P_z est injective, \mathcal{H}_z est le complété de K_z pour la norme $\|\cdot\|_z$. Ce qui correspond à la *série complémentaire* (si $\operatorname{Re} s \neq 0, 1$).

Cas particuliers 2.13.

a) $z = 2ki\pi/\log(\ell q)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma(z) = 1$, $\varphi_z(\gamma) = 1$, alors $K_z = \mathbb{C}\mathbf{1}$ et (π_z, \mathcal{H}_z) est la représentation triviale.

b) $z = 1 + 2ki\pi/\log(\ell q)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma(z) = 1$, $\varphi_z(\gamma) = 1$, alors $K_z = K(B)$; $\operatorname{Im} P_z = \mathbb{C}\varphi_z$, la structure préhilbertienne sur K_z n'est pas séparée et (π_z, \mathcal{H}_z) est la représentation triviale.

c) $z = (\log \ell + (2k + 1)i\pi)/\log(\ell q)$, $\ell \neq q$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma(z) = -1/\ell$; $\varphi_z(\gamma) = (-1/\ell)^{|\gamma|/2}$, alors $K_z \neq K(B)$ et P_z est injectif, c'est-à-dire que K_z est séparé pour la structure préhilbertienne.

d) $z = (\log q + (2k + 1)i\pi)/\log(\ell q)$, $\ell \neq q$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma(z) = -1/\ell$; $\varphi_z(\gamma) = (-1/\ell)^{|\gamma|/2}$, alors $K_z = K(B)$, mais P_z n'est pas injectif, la structure préhilbertienne sur K_z n'est pas séparée.

e) $\ell = q$, $z = \frac{1}{2} + (2k+1)i\pi/(2\log q)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma(z) = -1/\ell$, $\varphi_z(\gamma) = (-1/\ell)^{|\gamma|/2}$, alors $K_z \neq K(B)$ et P_z n'est pas injectif. Donc \mathcal{H}_z est un sous-quotient de $L^2(B)$: le quotient de l'adhérence de K_z par l'adhérence du noyau de P_z .

f) En dehors de ces cinq cas, on a $K_z = K(B)$ et P_z est injectif, donc \mathcal{H}_z est soit $L^2(B)$ si $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, soit le complété de $K(B)$ pour $\|\cdot\|_z$ si $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, $\operatorname{Im} z = k\pi/\log(\ell q)$, $k \in \mathbb{Z}$.

g) $z = (2k+1)i\pi/\log(\ell q)$ ou $z = 1 + (2k+1)i\pi/\log(\ell q)$, $\gamma(z) = (2(\ell-1))(\ell(q+1)) - 1$.

Par analogie avec la théorie des groupes de Lie (cf [11]), ces cas sont exclus de la série complémentaire (de même les cas a) et b)).

COROLLAIRE 2.14. — Dans le cas $\Delta = \Gamma$, $\Delta_0 = K_0$. Si $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ ou si $\operatorname{Im} z = k\pi/\log(\ell q)$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, alors la représentation (π_z, \mathcal{H}_z) est irréductible.

Démonstration. — Comme (Γ, K_0) est une paire de GUELFAND, l'ensemble des fonctions sphériques de type positif est équivalent à l'ensemble des représentations sphériques unitaires irréductibles. D'après [6], l'espace de Hilbert associé à φ_z est le complété de l'espace préhilbertien des combinaisons linéaires des translatés à droite de φ_z , on voit donc que c'est bien l'espace que nous venons de construire.

Remarques 2.15.

1. On s'intéresse au chapitre 3 à l'irréductibilité de la restriction de π_z à un sous-groupe Δ de Γ (elle est claire dans les cas a) et b)) et on se restreindra pour cela aux séries principales et complémentaires (c'est-à-dire tous les cas sauf a), b), g)).

2. Considérons le cas d'un arbre homogène X_q . Il correspond au cas d'un arbre semi-homogène avec $\ell = 1$. Les résultats ci-dessus permettent donc de retrouver les formules de [7] et [8], si on se rappelle que les distances dans $X_{q,1}$ sont doubles de celles dans X_q . Mais on peut aussi considérer X_q comme un arbre semi-homogène $X_{q,q}$ (les distances sont alors les mêmes dans X_q et dans $X_{q,q}$). On a donc le sous-groupe $\Gamma_{q,q}$ de $\Gamma_q = \Gamma_{q,1}$ des automorphismes conservant la parité des sommets.

D'après la Remarque 1.6, le noyau de MARTIN est le même pour les deux points de vue. L'expression intégrale des fonctions sphériques montre que la fonction sphérique φ_z ne dépend que de l'arbre. On peut d'ailleurs vérifier directement cette égalité des fonctions φ_z pour $X_{q,1}$ et $X_{q,q}$ (en se rappelant le facteur 2 sur les distances). De plus, les représentations π_z dans $K(B)$ sont restrictions l'une de l'autre.

Par contre les opérateurs de convolution $*F^1$ et donc la valeur propre

$\gamma(z)$ sont différents. De plus le COROLLAIRE 2.9 montre que la période de la fonction $z \mapsto \varphi_z$ est $i\pi/\log q$ pour $\Gamma_{q,q}$ et $2i\pi/\log q$ pour Γ_q et qu'il y a plus de fonctions sphériques φ_z de type positif pour $\Gamma_{q,q}$ que pour Γ_q : une représentation de la série principale (*resp.* complémentaire) de Γ_q se restreint à $\Gamma_{q,q}$ en une représentation de la série principale (*resp.* complémentaire), mais deux représentations non isomorphes peuvent avoir des restrictions isomorphes; d'autre part certaines représentations (la moitié) de la série complémentaire de $\Gamma_{q,q}$ ne sont pas des restrictions de représentations de la série complémentaire de Γ_q .

Intéressons-nous maintenant au cas $z_0 = \frac{1}{2} + (2k+1)i\pi/\log q$. La représentation correspondante (série principale) π_{z_0} de Γ_q dans $L^2(B)$ est irréductible (d'après le corollaire ci-dessus avec $\ell = 1$) et, comme on le verra plus tard, sa restriction à un sous-groupe fermé unimodulaire de Γ_q transitif sur X_q est encore irréductible. Par contre d'après le cas particulier e) ci-dessus l'espace engendré par $\pi_{z_0}(\Gamma_{q,q})\mathbf{1}$ n'est pas dense dans $K(B)$, donc la restriction de la représentation π_{z_0} de Γ_q dans $L^2(B)$ à $\Gamma_{q,q}$ (ou à tout sous-groupe de $\Gamma_{q,q}$ unimodulaire transitif en respectant la parité des sommets) ne l'est pas.

Ceci permet de répondre négativement à une question énoncée dans [9].

2.16 *Noyau reproduisant.* — Soit $A_z = \{P_z\xi \mid \xi \in L^2(B)\}$. Dans le cas $z \neq 1 + 2ki\pi/\log(\ell q)$ ou $z \neq (\log q + (2k+1)i\pi)/\log(\ell q)$ et, du fait que P_z est injective, on définit une norme sur A_z par :

$$\|P_z\xi\| = \|\xi\|_{L^2(B)}.$$

L'espace A_z , muni de cette norme, est un espace de Hilbert. De plus il est évident de voir que :

$$|P_z\xi(\gamma)| \leq \sup_{\omega \in B} |K_{s_0}^{1-z}(\gamma s_0, \omega)| \|\xi\|_{L^2(B)} \quad \forall \gamma \in \Delta.$$

Donc d'après ARONSAJN-BERGMAN (*cf* YOSIDA [16], p. 96), il existe pour A_z un *noyau reproduisant*, c'est-à-dire une fonction H_z définie sur $\Delta \times \Delta$, telle que pour tout γ' fixé dans Δ :

- a) La fonction $\gamma \mapsto H_z(\gamma, \gamma')$ est dans A_z ,
- b) Pour toute $F \in A_z$, on a $F(\gamma') = \langle F(\gamma) \mid H_z(\gamma, \gamma') \rangle_\gamma$ où le produit scalaire est pris dans A_z sur les deux fonctions de la variable γ .

PROPOSITION 2.17. — Dans le cas $z \neq 1 + 2ki\pi/\log(\ell q)$ ou $z \neq (\log q + (2ki)i\pi)/\log(\ell q)$

$$H_z(\gamma, \gamma') = \int_B K_{s_0}^{1-z}(\gamma s_0, \omega) \overline{K_{s_0}^{1-z}(\gamma' s_0, \omega)} d\mu_{s_0}(\omega)$$

défini sur $\Delta \times \Delta$ est un noyau reproduisant sur A_z .

Démonstration.

- a) $\gamma \xrightarrow{\Phi} H_z(\gamma, \gamma') \in A_z$ car $\Phi(\gamma) = P_z \xi(\gamma)$ avec $\xi(\omega) = \overline{K_{s_0}^{1-z}(\gamma' s_0, \omega)}$.
 b) Pour toute $F \in A_z$, il existe $f \in L^2(B)$ telle que $F = P_z f$ et d'où
 $\langle F(\gamma) \mid H_z(\gamma, \gamma') \rangle = \langle F(\gamma) \mid \Phi(\gamma) \rangle = \int_B f(\omega) \overline{K_{s_0}^{1-z}(\gamma' s_0, \omega)} d\mu_{s_0}(\omega) =$
 $P_z f(\gamma') = F(\gamma').$

Remarque 2.18. — Dans le cas $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, on a $H_z(\gamma, \gamma') = \varphi_z(\gamma'^{-1}\gamma)$ pour tout $\gamma, \gamma' \in \Delta$. On obtient ainsi l'analogie au résultat de P. EYMARD dans le cas de $Su(1, 1)$ [5].

Démonstration. — Comme

$$H_{s_0}^{1-z}(\gamma s_0, \omega) = \pi_{1-z}(\gamma) \mathbf{1}(\omega), \quad K_{s_0}^{1-z}(\gamma' s_0, \omega) = \pi_{1-z}(\gamma') \mathbf{1}(\omega),$$

on a $H_z(\gamma, \gamma') = \langle \pi_{1-z}(\gamma) \mathbf{1} \mid \pi_{1-z}(\gamma') \mathbf{1} \rangle_{L^2(B)}$ et comme pour $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, π_{1-z} est unitaire dans $L^2(B)$, il vient

$$H_z(\gamma, \gamma') = \langle \pi_{1-z}(\gamma'^{-1}\gamma) \mathbf{1} \mid \mathbf{1} \rangle_{L^2(B)} = \varphi_{1-z}(\gamma'^{-1}\gamma) = \varphi_z(\gamma'^{-1}\gamma)$$

car $\varphi_z = \varphi_{1-z}$.

3. Sous-groupes fermés unimodulaires de Γ transitifs sur X

1. Caractérisation des sous-groupes fermés unimodulaires.

On considère un sous-groupe fermé Δ de Γ , ce groupe est donc localement compact. On appelle μ la mesure de Haar à gauche telle que $\mu(\Delta_0) = 1$ (c'est possible puisque Δ_0 est un compact ouvert). On suppose toujours que Δ agit transitivement sur S^q .

PROPOSITION 3.1. — Δ est unimodulaire si et seulement si il existe une partie Δ_2 de Δ telle que Δ_2 et Δ_2^{-1} vérifient la condition (*) du 1.3).

Démonstration. — Considérons S_2/Δ_0 . Si $\bar{s} \in S_2/\Delta_0$, on note $\operatorname{mult}(\bar{s})$ le cardinal de \bar{s} (comme orbite de Δ_0 dans S_2).

Soit $\Delta^2 = \{\delta \in \Delta : |\delta| = 2\}$. Il est stable à gauche et à droite par Δ_0 . L'application $\delta \mapsto \delta^{-1}$ induit une bijection involutive sur Δ^2 et, par passage au quotient, une bijection involutive $\Psi : \Delta_0 \backslash \Delta^2 / \Delta_0 \rightarrow \Delta_0 \backslash \Delta^2 / \Delta_0$ telle que $\bar{\delta} \mapsto \overline{\delta^{-1}}$. L'application $\Delta_0 \backslash \Delta^2 / \Delta_0 \xrightarrow{\pi} S_2 / \Delta_0$ telle que $\delta \mapsto \delta_{s_0}$ est évidemment bijective (puisque $\underline{\Delta}$ est transitif). Alors $\varphi = \pi \circ \Psi \circ \pi^{-1} : S_2 / \Delta_0 \rightarrow S_2 / \Delta_0$ telle que $\delta_{s_0} \mapsto \overline{\delta^{-1}}_{s_0}$ est une bijection involutive.

La proposition résulte du lemme suivant :

LEMME. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) Δ est unimodulaire,
- 2) $\text{mult}(\bar{s}) = \text{mult}(\varphi(\bar{s}))$ pour tout $\bar{s} \in S_2/\Delta_0$,
- 3) Il existe $\Delta_2 \subset \Delta$ tel que Δ_2 et Δ_2^{-1} vérifient (*).

Démonstration.

$1 \Leftrightarrow 2$. — Soit θ la fonction module : $\Delta \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. On a $\theta(\Delta_0) = 1$ et donc θ passe au quotient par $\Delta_0 \backslash \Delta / \Delta_0$.

Démontrer que μ est invariante à droite revient à démontrer que $\theta(\delta) = 1$ pour tout $\delta \in \Delta^2$ (car Δ^2 et Δ_0 engendrent Δ). Or $\{\delta' \in \Delta \mid \delta'^{-1}s_0 = \delta^{-1}s_0\} = \Delta_0\delta$ donc $\theta(\delta) = \mu(\{\delta' \in \Delta \mid \delta'^{-1}s_0 = \delta^{-1}s_0\})$ et comme $\theta(\delta)$ ne dépend que de la classe de δ dans $\Delta_0 \backslash \Delta^2 / \Delta_0$ on a

$$\theta(\delta) = \frac{1}{\text{mult}(\delta^{-1}s_0)} \mu\left(\{\delta' \in \Delta \mid \delta'^{-1}s_0 \in \overline{\delta^{-1}s_0}\}\right).$$

Or $\delta'^{-1}s_0 \in \overline{\delta^{-1}s_0} \Leftrightarrow \delta's_0 \in \varphi(\delta^{-1}s_0)$. Donc

$$\begin{aligned} \theta(\delta) &= \frac{1}{\text{mult}(\delta^{-1}s_0)} \mu\left(\{\delta' \in \Delta \mid \delta's_0 \in \varphi(\delta^{-1}s_0)\}\right) \\ &= \frac{\text{mult}(\varphi(\delta^{-1}s_0))}{\text{mult}(\delta^{-1}s_0)}. \end{aligned}$$

On a donc bien $\theta(\delta) = 1$ pour tout $\delta \in \Delta^2$ si et seulement si $\text{mult}(\bar{s}) = \text{mult}(\varphi(\bar{s}))$ pour tout $\bar{s} \in S_2/\Delta_0$.

$2 \Rightarrow 3$. — Considérons $\Delta'_2 \subset \Delta^2$ vérifiant (*) (qui existe puisque Δ est transitif). Alors Δ'_2 est réunion disjointe des $\Delta'_{2,\bar{s}} = \{\delta' \in \Delta'_2 \mid \delta s_0 \in \bar{s}\}$ pour $\bar{s} \in S_2/\Delta_0$. Par définition l'application $\Delta'_{2,\bar{s}} \rightarrow \bar{s}$ telle que $\delta \mapsto \delta s_0$ est une bijection. Donc $|\Delta'_{2,\bar{s}}| = \text{mult}(\bar{s}) = \text{mult}(\varphi(\bar{s})) = h$. Soit alors $\Delta'_{2,\bar{s}} = \{\delta_1, \dots, \delta_h\}$. On définit $\Delta_{2,\bar{s}} = \{\delta_i \delta_{0,i} \mid \delta_{0,i} \in \Delta_0, \delta_i \in \Delta'_{2,\bar{s}}, 1 \leq i \leq h\}$ où les $\delta_{0,i}$ sont choisis de telle façon que l'application $(\Delta_{2,\bar{s}})^{-1} \rightarrow \varphi(\bar{s})$ telle que $\delta \mapsto \delta s_0$ soit une bijection. C'est-à-dire que les $\delta_{0,i}^{-1} \delta_i^{-1}$ soient tous différents. C'est possible car $\varphi(\bar{s})$ est une orbite de Δ_0 et les ensembles ont les mêmes cardinaux. Alors $\Delta_2 = \coprod \Delta_{2,\bar{s}}$ et $\Delta_2^{-1} = \coprod (\Delta_{2,\bar{s}})^{-1}$.

$3 \Rightarrow 2$. — Considérons les bijections $\pi_1 : \Delta_2 \rightarrow S_2$ et $\pi_2 : \Delta \rightarrow S_2$ définies par $\delta \mapsto \delta s_0$ et $\delta \mapsto \delta^{-1}s_0$. On a $\varphi(\pi_1(\delta)) = \pi_2(\delta)$ et donc $\text{mult}(\bar{s}) = \text{mult}(\varphi(\bar{s}))$.

2. Irréductibilité de π_2 .

Remarque 3.2. — Si on regarde la démonstration de l'irréductibilité par IOZZI et PICARDELLO [11], on voit que tout repose sur les faits suivants :

a) $q_{2n}(j, x, y) = 1/(q+1)\ell(\ell q)^{n-1} \mu(\{\delta' \in \Delta; |\delta| = 2n; |y^{-1}\delta x| = |x| + |y| + 2n - 2j\})$ a une limite $p_j(x, y)$ quand n tend vers l'infini. Cette limite ne dépend que de $|x|$, $|y|$ et de j . De plus $q_{2n}(j, x, y) - p_j(x, y) = O(q^{-n})$.

b) Les résultats analogues à 2.10 et 2.11.

Pour étudier a), considérons :

$$A_j(n, x, y) = \left\{ \omega : |\omega| = 2n; |y^{-1}\omega x| = 2n + |x| + |y| - 2j \right\}.$$

On a $q_{2n}(j, x, y) = 1/(q+1)\ell(\ell q)^{n-1} \mu(A_j(n, x, y))$.

On peut supposer d'autre part que $n \geq |x| + |y| + 4$ puisqu'on veut estimer $\mu(A_j(n, x, y))$ pour n grand.

On définit aussi pour $u, v \in \Delta_2$ et $k \in \mathbb{N}$ l'ensemble $C_h(u, v)$ des $\omega \in \Delta$ qui satisfont la condition $|\omega| = 2k$, avec $\omega = \omega_{i_1} \dots \omega_{i_h}$ et $\omega_{i_1} = u, \omega_{i_h} = v, |\omega_{i_j} \omega_{i_{j+1}}| = 4$ pour $1 \leq j \leq h-1$ et $\omega_i \in \Delta_2$.

LEMME 3.3. — $|C_h(u, v)|/(q+1)\ell(\ell q)^{h-1}$ converge quand h tend vers l'infini vers une limite L indépendante de u et de v . De plus $|C_k(u, v)|/(q+1)\ell(\ell q)^{h-1} = L + O(q^{-h})$.

Démonstration. — Nous allons adopter la démonstration dans [8] ou [11] de ce genre de résultat au cas qui nous intéresse.

Comme $|\Delta_2| = (q+1)\ell$, écrivons $\Delta_2 = \{\delta_1, \dots, \delta_{(q+1)\ell}\}$. Considérons la matrice carrée S d'ordre $(q+1)\ell$ dont les coefficients sont donnés par la formule :

$$S_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } d(\delta_i^{-1}s_0, \delta_j s_0) = 4, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\omega = \omega_{i_1} \dots \omega_{i_h} \in (\Delta_2)^h$, on a $\omega \in C_h(u, v)$ ce qui signifie $\omega_{i_1} = u$ et $\omega_{i_h} = v$ ainsi que $S_{i_j, i_{j+1}} \neq 0$ pour $1 \leq j \leq h-1$, ce qui équivaut encore à $\prod_{j=1}^{h-1} S_{i_j, i_{j+1}} = 1$.

Donc, si $u = \delta_{i_1}$ et $v = \delta_{i_h}$, on a

$$|C_h(u, v)| = \sum_{i_2, \dots, i_{h-1}=1}^{(q+1)\ell} \prod_{j=1}^{h-1} S_{i_j, i_{j+1}}$$

et donc $|C_h(u, v)|$ est le coefficient $(S^{h-1})_{i_1, i_h}$ de la matrice S^{h-1} .

D'autre part on remarque que la somme des coefficients de la matrice S dans chaque ligne ou dans chaque colonne est ℓq . D'où $\lambda = \ell q$ est une valeur propre pour la matrice S . De plus le vecteur $(1, \dots, 1) = \mathbf{1}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre ℓq .

Donc $\mathbb{R}^{(q+1)\ell} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}^\perp$ et $\mathbf{1}^\perp$ est stable par S puisque si $v \in \mathbf{1}^\perp$, alors $v = \sum_{i=1}^{(q+1)\ell} v_i e_i$ avec $\sum_{i=1}^{(q+1)\ell} v_i = 0$.

$$\begin{aligned} Sv_i &= \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} S_{ij} v_j \\ \sum_{i=1}^{(q+1)\ell} Sv_i &= \sum_{i=1}^{(q+1)\ell} \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} S_{ij} v_j \\ &= \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} v_j \sum_{i=1}^{(q+1)\ell} S_{ij} = \ell q \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} v_j = 0. \end{aligned}$$

Soit alors $T = S - (1)$ où (1) est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Comme (1) est nulle sur $\mathbf{1}^\perp$, l'action de S sur $\mathbf{1}^\perp$ est la même que celle de T . La somme des modules de coefficients de T dans chaque colonne ou dans chaque ligne est ℓ .

On considère alors la norme $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^{(q+1)\ell}$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq (q+1)\ell} |X_i|$. On a

$$\begin{aligned} T &= (t_{ij})_{ij}, \quad Y = TX \\ y_i &= \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} t_{ij} X_j \implies |y_i| \leq \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} |t_{ij}| |X_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} |t_{ij}| \|X\|_\infty = \ell \|X\| \end{aligned}$$

donc $|y_i| \leq \ell \|X\|$ pour tout $1 \leq i \leq (q+1)\ell$.

Par conséquent $\|Y\|_\infty \leq \ell \|X\|_\infty$ implique $\|T\|_\infty \leq \ell$. Or le coefficient $(S^{h-1})_{i_1 i_k}$ est le coefficient sur e_{i_1} de $S^{h-1} e_{i_k}$ (si e_i désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{(q+1)\ell}$). On a $e_{i_h} = 1/((q+1)\ell) \mathbf{1} + v$ avec $v \in \mathbf{1}^\perp$ et $\|v\|_\infty \leq 2$ et $S^{h-1} e_{i_k} = (\ell q)^{h-1} / ((q+1)\ell) \mathbf{1} + T^{h-1} v$, puis

$$\begin{aligned} \|S^{h-1} e_{i_h} - \frac{(\ell q)^{h-1}}{(q+1)\ell} \mathbf{1}\|_\infty &\leq \|T^{h-1} v\|_\infty \\ &\leq \|T\|_\infty^{h-1} \|v\|_\infty. \end{aligned}$$

Il en résulte la majoration

$$\left| \frac{(S^{h-1})_{i_1, i_h}}{(q+1)\ell(\ell q)^{h-1}} - \frac{1}{(q+1)^2 \ell^2} \right| \leq \frac{2\ell^{h-1}}{(q+1)\ell(\ell q)^{h-1}} = O(q^{-h}),$$

ce qui prouve le résultat avec $L = 1/(q+1)^2 \ell^2$.

3.4 Exemples de matrices S .

1) Soit $\Delta_{2,m} = \{\delta \in \Delta \mid d(\delta s_0, s_m) = 1 \text{ où } s_m \in S^\ell \text{ et } d(s_0, s_m) = 1\}$. Alors $\Delta_2 = \coprod_{m=1}^{q+1} \Delta_{2,m}$.

Si on suppose que $(\Delta_{2,m})^{-1} = (\Delta_2^{-1})_m = \{\delta' \in \Delta_2^{-1} \mid d(\delta' s_0, s_m) = 1\}$, la matrice S est formée de coefficients égaux à 1 sauf pour des blocs diagonaux $\ell \times \ell$ formés de 0.

Dans ce cas S est une matrice symétrique, trouver $(S^{h-1})_{i_1, i_h}$ revient à diagonaliser S . On retrouve ainsi la démonstration de [11].

2) Si $\Delta_2 = \coprod_{j=1}^{q+1} \Delta_2^j$ et s'il y a une bijection d'ordre deux de :

$$\{1, \dots, (q+1)\} \rightarrow \{1, \dots, (q+1)\}; j \mapsto j'$$

de façon que $(\Delta_2^j)^{-1} = (\Delta_2^{-1})^{j'}$.

On obtient encore une matrice symétrique formée de 1 sauf pour les blocs diagonaux carrés de dimension $\ell \times \ell$ ou $2\ell \times 2\ell$ et de la forme (0_ℓ) ou $\begin{pmatrix} 1_\ell & 0_\ell \\ 0_\ell & 1_\ell \end{pmatrix}$ respectivement.

3) L'exemple 1.10 e) montre que l'on ne peut pas toujours se ramener au cas 2. En particulier S n'est pas toujours symétrique. Cependant dans tous les exemples calculés jusqu'ici elle est diagonalisable.

THÉOREME 3.5. — *Soit Δ un sous-groupe fermé de Γ , transitif sur S^q et unimodulaire. Alors $q_{2n}(j, x, y)$ a une limite $p_j(x, y)$ quand n tend vers l'infini. De plus cette limite ne dépend que de $|x|$, de $|y|$ et de j et l'on a*

$$q_{2n}(j, x, y) - p_j(x, y) = O(q^{-n}).$$

Démonstration. — Soit $\delta \in \Delta$ avec $|\delta| = 2n$. Ecrivons $\delta = \delta' \delta_0$ où $\delta_0 \in \Delta_0$ et $\delta' = \delta_1 \dots \delta_n \in (\Delta_2)^n$.

$$y = \delta_1^y \dots \delta_{|y|/2}^y \delta_0^y; \quad \delta_0^y \in \Delta_0; \quad \delta_i^y \in \Delta_2, \\ \delta_0 = \delta_1^x \dots \delta_{|x|/2}^x \delta_0^x \quad \text{où} \quad \delta_0^x \in \Delta_0; \quad \delta_i^x \in \Delta_2^{-1}$$

(car Δ_2^{-1} vérifie (*)).

D'après ce qui précède, les δ_i^x ne dépendent que de $\delta_0 x s_0$, donc que de x et de la classe de δ_0 dans le quotient de Δ_0 par le sous-groupe :

$$\Delta_0^{|x|} = \{\delta \in \Delta \mid \delta s = s \text{ si } d(s_0, s) \leq |x|\}.$$

Soit $B_n(i_1, i_2) = \{\delta \in \Delta_2 : |\delta| = 2n, |y^{-1}\delta| = 2n + |y| - 2i_2|\delta x| = 2n + |x| - 2i_1\}$. Alors $A_j(n, x, y)$ est la réunion disjointe des $B_n(i_1, i_2)$

pour $i_1 + i_2 = j$ avec $i \leq |x|$ et $i_2 \leq |y|$. Il suffit donc d'estimer $\mu(B_n(i_1, i_2))/(q+1)\ell(\ell q)^{n-1}$.

L'hypothèse $|y^{-1}\delta| = 2n + |y| = 2i_2$ se traduit par $d(ys_0, \delta s_0) = 2n + |y| - 2i_2$. Donc selon les cas :

$$\begin{aligned} \text{si } i_2 = 2j_2 \quad & \text{par } \begin{cases} \delta_i = \delta_i^y & \text{pour } i \leq j_2, \\ |\delta_{j_2+1}^{-1} \delta_{j_2+1}^y| = 4 & \text{si } |y| > i_2. \end{cases} \\ \text{si } i_2 = 2j_2 + 1 \quad & \text{par } \begin{cases} \delta_i = \delta_i^y & \text{pour } i \leq j_2, \\ |\delta_{j_2+1}^{-1} \delta_{j_2+1}^y| = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

L'hypothèse $|\delta x| = 2n + |x| - 2i_1$ se traduit par $d(xs_0, \delta^{-1}s_0) = d(\delta_0 x s_0, \delta'^{-1}s_0) = 2n + |x| - 2i_1$. Donc selon les cas :

$$\begin{aligned} \text{si } i_1 = 2j_1 \quad & \text{par } \begin{cases} \delta_{n+1-i}^{-1} = \delta_i^x & \text{pour } i \leq i_1, \\ |\delta_{n-j_1} \delta_{j_1+1}^x| = 4 & \text{si } |x| > i_1 \end{cases} \\ \text{si } i_1 = 2j_1 + 1 \quad & \text{par } \begin{cases} \delta_{n+1-i}^{-1} = \delta_i^x & \text{pour } i \leq i_1, \\ |\delta_{n-j_1} \delta_{j_1+1}^x| = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Les conditions ne portent donc que sur δ' et sur $\delta'_0 \in \Delta_0/\Delta_0^{|x|}$. Donc

$$B_n(i_1, i_2) = \coprod_{\bar{\delta}_0, u, v} \delta_1^y \dots \delta_{j_2}^y C_{n-j_1-j_2}(u, v) (\delta_{j_1}^x)^{-1} \dots (\delta_1^x)^{-1} x \bar{\delta}_0 \Delta_0^{|x|}$$

où la réunion disjointe porte sur $\bar{\delta}_0 \in \Delta_0/\Delta_0^{|x|}$ et les $u, v \in \Delta_2$ vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} |\delta_{j_2}^y u| = 4 = |v(\delta_{j_1}^x)^{-1}|, \\ |u^{-1} \delta_{j_2+1}^y| = 4 & \text{si } i_2 = 2j_2 \quad \text{et } i_2 < |y|, \\ |v \delta_{j_1+1}^x| = 4 & \text{si } i_1 = 2j_1 \quad \text{et } i_1 < |x|, \\ |u^{-1} \delta_{j_2+1}^y| = 2 & \text{si } i_2 = 2j_2 + 1, \\ |v \delta_{j_1+1}^x| = 2 & \text{si } i_1 = 2j_1 + 1. \end{cases}$$

Ainsi $\mu(B_n(i_1, i_2)) = \sum_{\bar{\delta}_0, u, v} |C_{n-j_1-j_2}(u, v)| \mu(\Delta_0^{|x|})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(B_n(i_1, i_2))}{(q+1)\ell(\ell q)^{n-1}} = \sum_{\bar{\delta}_0, u, v} \frac{L}{(\ell q)^{j_1+j_2}} \mu(\Delta_0^{|x|}).$$

Si par exemple $i_1 = 2j_1 + 1$; $i_2 = 2j_2 < |y|$ cette limite est

$$\sum_{\bar{\delta}_0} \ell \times \ell q \times \frac{L}{(\ell q)^{j_1+j_2}} \mu(\Delta_0^{|x|}) = \ell \times \ell q \times \frac{L}{(\ell q)^{j_1+j_2}}.$$

Tous les autres cas se démontrent de la même façon et on a donc un théorème analogue à celui de [11].

THÉORÈME 3.6. — *Soit Δ un sous-groupe de Γ , transitif sur S_q et unimodulaire. Alors la restriction de π_2 à Δ est irréductible dès que π_z est dans la série principale ou complémentaire et satisfait à $\gamma(z) \neq -1/\ell$ si $\ell \geq q$.*

Remarque. — Pour un groupe Δ discret vérifiant les hypothèses ci-dessus, la réciproque du théorème est également vraie, car si $\gamma(z) = -1/\ell$ et $\ell > q$, alors le coefficient φ_z de π_z est dans $\ell^2(\Delta)$ et donc π_z est réductible.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BETTORI (W.) and PAGLIACCI (M.). — Harmonic analysis for groups acting on trees, *Boll. Un. Mat. Ital. A*(6), t. **3-B**, 1984.
- [2] CARTIER (P.). — Fonctions harmoniques sur un arbre, *Sympos. Math.*, t. **9**, 1972, p. 203–270.
- [3] CHOUKROUN (F.). — Analyse harmonique sur le groupe des automorphismes d'un arbre homogène et application aux groupes libres, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **296**, 1983, p. 585–588.
- [4] CHOUKROUN (F.). — Groupes opérant simplement transitivement sur un arbre homogène et plongement dans $\mathrm{PGL}_2(Q_p)$, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **298**, 1984, p. 313–315.
- [5] EYMARD (P.). — Le noyau de Poisson et la théorie des groupes, *Sympos. Math.*, t. **12**, 1977, p. 107–132.
- [6] FARAUT (J.). — Analyse harmonique sur les paires de Gelfand et les espaces hyperboliques, [Analyse harmonique, Nancy 1980], *CIMPA*, Nice 1983.
- [7] FIGA-TALAMANCA (A.) and PICARDELLO (M.A.). — Spherical functions and harmonic analysis on free groups, *J. Funct. Anal.*, t. **47**, 1982, p. 281–304.
- [8] FIGA-TALAMANCA (A.) and PICARDELLO (M.A.). — Harmonic analysis on free groups, [L.N. in Pure and Applied Mathematics], 1983, M. Dekker, New-York.
- [9] FIGA-TALAMANCA (A.) and PICARDELLO (M.A.). — Restriction of spherical representations of $\mathrm{PGL}_2(Q_p)$ to a discrete subgroup, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **91**, 1984, p. 405–408.
- [10] HAAGERUP (U.). — An example of a non nuclear C -algebra wich has the metric approximation property, *Invent. Math.*, t. **50**, 1978, p. 279–293.
- [11] IOZZI (A.) and PICARDELLO (M.A.). — Spherical functions on symetric graphs, [Harmonic analysis], *Proceedings Cortona 1982*, Springer LN **992**.

- [12] MATSUMOTO (H.). — Représentations irréductibles de certains groupes d'automorphismes d'un arbre demi-homogène, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **290**, 1980, p. 737-740.
 - [13] SERRE (J.P.). — Arbres amalgames, SL_2 , *Astérisque* t. **46**, 1977.
 - [14] TITS (J.). — Sur le groupe des automorphismes d'un arbre, [Mémoires dédiés à Georges DE RHAM], pp. 188-211. — 1970, Berlin, Springer-Verlag.
 - [15] OL'SHANSKII (G.I.). — Classification of irreducible representations of groups of automorphisms of Bruhat-Tits trees, *Functional Anal. Appl.*, t. **11**, 1977, p. 26-34.
 - [16] YOSIDA (K.). — Functional analysis, 4^{ième} édition, Springer, 1974.
-