

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES TILOUINE

**Un sous-groupe  $p$ -divisible de la jacobienne de  $X_1(Np_r)$   
comme module sur l'algèbre de Hecke**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 115 (1987), p. 329-360

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1987\\_\\_115\\_\\_329\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__329_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UN SOUS-GROUPE  $p$ -DIVISIBLE  
DE LA JACOBIEENNE DE  $X_1(Np')$   
COMME MODULE SUR L'ALGÈBRE DE HECKE

PAR

JACQUES TILOUINE (\*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous déterminons la structure d'un groupe  $p$ -divisible de la jacobienne de  $X_1(Np')$  sur l'algèbre de Hecke, sous des hypothèses pour restrictives permettant ainsi de généraliser des résultats d'interpolation  $p$ -adique obtenus par Hida dans [7].

ABSTRACT. — In this paper, we determine the structure of a certain  $p$ -divisible group of the jacobian of  $X_1(Np')$  as a module over the Hecke algebra, under rather weak hypotheses. This will allows us to generalize in a forthcoming paper some results of Hida [7] on  $p$ -adic interpolation of special values of  $L$  series.

Soit  $\mathfrak{h}$  le demi-plan de Poincaré muni de l'action habituelle de  $SL_2(\mathbb{Z})$  et soit  $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ , le demi-plan complété. L'élément de  $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{Q}$  est noté  $\infty$ . Pour chaque entier  $M \geq 1$ , on note  $\Gamma_1(M)$  le sous-groupe de  $SL_2(\mathbb{Z})$  constitué des matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $a \equiv d \equiv 1$  modulo  $M$  et  $c \equiv 0$  modulo  $M$ . On peut munir l'espace quotient  $\Gamma_1(M) \backslash \mathfrak{h}^*$  d'une structure de surface de Riemann compacte connexe. Son corps des fonctions admet un modèle défini sur  $\mathbb{Q}$  composé des fonctions invariantes par  $\Gamma_1(M)$  dont le  $q$ -développement au point  $\infty$  est à coefficients rationnels. On note  $X_1(M)$  la courbe algébrique définie sur  $\mathbb{Q}$  projective lisse géométriquement connexe associée à ce corps de fonctions. On note  $\varphi$  la projection de  $\mathfrak{h}^*$  sur  $X_1(M)(\mathbb{C})$ . Par construction  $\varphi(\infty)$  est rationnel sur  $\mathbb{Q}$ .

On fixe désormais un entier  $N \geq 1$  et  $p$  un nombre premier  $\geq 5$  ne divisant pas  $N$ . Pour chaque  $r \geq 1$ , on note en abrégé  $X_r = X_1(Np^r)$ .

---

(\*) Texte reçu le 10 février 1986, révisé le 16 février 1987

J. TILOUINE, Mathématiques, Bât. n 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex.

Le groupe  $G_r = (\mathbb{Z}/Np^r\mathbb{Z})^\times / \{\pm 1\}$  opère fidèlement par automorphismes  $\mathbb{Q}$ -rationnels sur  $X_r$ .

On note  $a \mapsto \langle a \rangle$  (diamant de  $a$ ) cette action. Elle est caractérisée par la formule suivante : pour  $a \in G_r$ , soit  $\gamma_a$  dans  $SL_2(\mathbb{Z})$  tel que  $\gamma_a \equiv \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \pmod{Np^r}$ , pour tout  $z$  de  $\mathfrak{h}$ ,  $\langle a \rangle \varphi(z) = \varphi(\gamma_a(z))$ .

Rappelons de plus qu'on peut définir pour chaque nombre premier  $l$  une correspondance de Hecke  $T(l)$  sur  $X_r$ , rationnelle sur  $\mathbb{Q}$  et caractérisée par les formules :

$$T(l)\varphi(z) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{l-1} \varphi\left(\frac{z+i}{l}\right) + \langle l \rangle (\varphi(lz)) & \text{si } l \nmid Np \\ \sum_{i=0}^{l-1} \varphi\left(\frac{z+i}{l}\right) & \text{si } l \mid Np. \end{cases}$$

Pour  $M \geq 1$ , on note  $J_1(M)$  la jacobienne de  $X_1(M)/\mathbb{Q}$  et on note en abrégé  $J_r$  la jacobienne de  $X_r$ . On note  $h_r(\mathbb{Z})$  l'algèbre engendrée sur  $\mathbb{Z}$  par les correspondances de Hecke et les diamants dans l'anneau des endomorphismes  $\mathbb{Q}$ -rationnels de  $J_r$ , vue comme variété de Picard de  $X_r$ . Pour tout anneau  $A$ , on pose  $h_r(A) = h_r(\mathbb{Z}) \otimes A$ . On abrège  $h_r = h_r(\mathbb{Z}_p)$ .

Le but de cet article est d'améliorer un résultat récent de Hida sur la structure d'une partie du groupe  $p$ -divisible

$$J_{r,p} = J_r[p^\infty]$$

comme module sur l'algèbre de Hecke  $h_r$ . Nous aurons besoin pour préciser l'énoncé de notations supplémentaires.

Soit

$$J_{\infty,p} = \varinjlim_r J_{r,p}$$

où les applications de transition sont déduites des revêtements naturels  $X_r \rightarrow X_s$  pour  $r \geq s \geq 1$ .

Posons de plus

$$h_\infty = \varprojlim_r h_r$$

C'est une  $\mathbb{Z}_p$ -algèbre compacte opérant fidèlement sur  $J_{\infty, p'}$ . De plus  $h_{\infty}$  est une algèbre sur l'algèbre d'Iwasawa  $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$  où  $\Gamma$  est la pro- $p$ -partie de  $G_{\infty} = \varprojlim_r G_r = G_1 \times \Gamma$  vu comme sous-groupe de  $h_{\infty}$  via la représentation

« diamant ».

Soit  $e$  (resp.  $e_r$ ) l'idempotent de  $h_{\infty}$  (resp. de  $h_r$ ) associé à  $T(p)$  (voir [4], p. 236). On pose :

$$h_{\infty}^0 = eh_{\infty}, \quad h_r^0 = e_r h_r.$$

HIDA [6] a montré que  $h_{\infty}^0$  est un  $\Lambda$ -module libre de type fini. En particulier, on peut la décomposer en un produit fini d'algèbres locales grâce au lemme de Hensel.

On choisit  $\gamma = \langle 1 + Np \rangle \in \Lambda$  comme générateur topologique de  $\Gamma$ , et on note  $\omega_r = \gamma^{p^r-1} - 1$ . Le second résultat de théorie d'Iwasawa de l'algèbre  $h_{\infty}^0$  que nous invoquons alors ([7], théorème 1.2) affirme que la projection naturelle  $h_{\infty}^0 \rightarrow h_r^0$  se factorise en un isomorphisme

$$h_{\infty}^0 / \omega_r h_{\infty}^0 \simeq h_r^0.$$

Si donc  $R$  est un facteur local de  $h^0$ ,  $R_r = R / \omega_r R$  est facteur local de  $h_r^0$  pour chaque  $r \geq 1$ .

D'autre part, le groupe  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$  contenu dans  $G_{\infty}$  permet une décomposition  $h_{\infty}^0 = \bigoplus_{a \bmod p-1} h_{\infty}^0(a)$  où

$$h_{\infty}^0(a) = \{ t \in h_{\infty}^0 : \forall x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}, \langle x \rangle \cdot t = \omega^a(x) \cdot t \},$$

où  $\omega$  désigne le caractère de Teichmüller :  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times} \rightarrow \mathbb{Z}_p^{\times}$ .

On fixe désormais une composante locale  $R$  de  $h_{\infty}^0$  d'idempotent  $1_R \in h_{\infty}^0$  et on suppose que l'entier  $a$  modulo  $p-1$  pour lequel  $R \subset h_{\infty}^0(a)$  vérifie l'hypothèse :

$$(\star) \quad a \neq -1, 0.$$

Soit  $J_{\infty, p}(R) = 1_R J_{\infty, p}(\tilde{\mathbb{Q}})$ . C'est la limite inductive des groupes  $p$ -divisibles  $1_R J_r J_r(\tilde{\mathbb{Q}})$ . Soit  $\Pi_p = \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p$  le tore  $p$ -adique. Le théorème démontré dans cet article s'énonce alors :

**THÉOREME.** — Sous l'hypothèse  $(\star)$ , on a pour chaque  $r$  des isomorphismes compatibles de  $R_r$ -modules :

$$J_{r, p}(R) \simeq (R_r \otimes \Pi_p) \oplus \text{Hom}(R_r, \Pi_p)$$

d'où à la limite :

$$J_{\infty, p}(R) \simeq R \otimes_{\Lambda} \text{Hom}(\Lambda, \Pi_p) \oplus \text{Hom}(R, \Pi_p).$$

Le résultat analogue de Hida nécessitait l'hypothèse  $(a, p-1) > 1$  donc excluait beaucoup de classes modulo  $p-1$ . La conséquence de l'affaiblissement d'hypothèses est de permettre au théorème III d'interpolation de [7] de rester valide pour toutes les branches de la fonction  $L$  autres que 1 et 2 modulo  $p-1$  (cf. [7], § 1, pour le décalage de deux unités entre notre énoncé et celui du théorème III).

Pour démontrer cela, on loge, pour chaque  $r \geq 1$ ,  $J_{r, p}(R)$  dans une sous-variété abélienne  $A_r$  de  $J_r$ , ayant bonne réduction potentielle en  $p$ , puis on identifie cette variété à isogénie près au bon quotient de Mazur-Wiles  $B_r$ . On détermine alors la structure de la partie ordinaire du groupe  $p$ -divisible de  $B_r$  en suivant les idées de [15].

Je tiens à remercier J. Coates pour les exhortations incessantes au travail « concret » qu'il ne se lasse pas de me prodiguer, et H. Hida pour m'avoir suggéré la possibilité de ce travail, avoir répondu sans s'énervier aux questions tous azimuts dont je l'ai agoni et pour m'avoir communiqué le manuscrit de Mazur-Wiles utilisé ici.

### 1. Une sous-variété abélienne de $J_r$ avec bonne réduction potentielle en $p$

Pour  $C \geq 1$ , on note  $S_2(\Gamma_1(C))$  l'espace des formes  $\Gamma_1(C)$ -modulaires paraboliques de poids 2. Si  $f \in S_2(\Gamma_1(C))$ , on note

$$f = \sum_{n \geq 1} a(n, f) q^n \quad \text{où } q = e^{2\pi iz}$$

le  $q$ -développement de  $f$ . L'algèbre de Hecke  $h_r(C)$  opère fidèlement sur  $S_2(\Gamma_1(C))$ .

Soit  $f$  une forme propre pour  $h_r(C)$ , normalisée :

$$\text{i. e. } \forall n \geq 1, \quad f | T(n) = a(n, f) \cdot f.$$

On la suppose en outre primitive au sens d'ATKIN-LEHNER [2]. On abrège propre normalisée primitive en p. n. p.

On note  $A_f$  la sous-variété abélienne de  $J_1(C)$  définie par SHIMURA [19], (théorème 7.14) attachée à  $f$ .

Pour chaque diviseur  $C \geq 1$  de  $M = Np'$  et  $t \geq 1$ , diviseur de  $M/C$ , on a un morphisme naturel  $\mathbf{Q}$ -rationnel  $X_1(M) \rightarrow X_1(C)$  déduit de l'inclusion

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1(M) \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \subset \Gamma_1(C).$$

En passant aux variétés de Picard, on obtient un morphisme  $\mathbf{Q}$ -rationnel

$$[t] : J_1(C) \rightarrow J,$$

dont l'application tangente s'identifie à

$$\begin{aligned} S_2(\Gamma_1(C)) &\rightarrow S_2(\Gamma_1(M)) \\ g &\mapsto g(tz) = g|[t](z). \end{aligned}$$

Or, la théorie d'Atkin-Lehner nous fournit une décomposition :

$$S_2(\Gamma_1(M)) = \bigoplus_{C|M, t|M/C} S_2^{\text{new}}(\Gamma_1(C))|[t]$$

où  $S_2^{\text{new}}(\Gamma_1(C))$  désigne le sous-espace de  $S_2(\Gamma_1(C))$  composé des formes nouvelles au sens d'Atkin-Lehner.

On peut interpréter cette égalité par une isogénie : on fixe pour chaque  $C|M$  une base  $\mathcal{B}_C$  de  $S_2^{\text{new}}(\Gamma_1(C))$  diagonalisant l'action de l'algèbre de Hecke, et on note pour  $C|M$ ,  $n_C$  le nombre de diviseurs de  $M/C$ . Les applications produits des  $[t] : A_f \rightarrow J_r$ ,  $t$  parcourant l'ensemble des diviseurs de  $M/C$  et  $f$  parcourant  $\mathcal{B}_C$ , donnent une isogénie :

$$\prod_{C|M} \prod_{f \in \mathcal{B}_C} A_f^{n_C} \rightarrow J_r$$

Grâce à l'hypothèse (★) on a  $a \neq 0$ , on voit donc aisément en comparant les modules de Tate que le groupe  $p$ -divisible  $J_{r,p}(R)$  est contenu dans la somme des groupes  $p$ -divisibles des images  $A_f|[t]$  pour des  $f$  dont le Nebentypus  $\chi$  restreint à  $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$  n'est pas trivial, donc on peut supposer que  $p|C$ . Fixons alors un plongement  $\tau$  de  $\bar{\mathbf{Q}}$  dans une clôture algébrique de  $\mathbf{Q}_p$  munie de sa valeur absolue normalisée par  $|p|_p = p^{-1}$ . Suivant Hida [4], on dit que la forme p.n.p.  $f$ , de niveau divisible par  $p$ , est ordinaire en  $p$  (pour  $\tau$ ) si  $|\tau(a(p, f))|_p = 1$ .

On voit comme précédemment qu'on peut supposer que les formes  $f$  intervenant sont ordinaires en  $p$ . On invoque alors un résultat de Ogg-Li-Asai ([17], [10], [1]) :

**PROPOSITION 1.1.** — *Si  $f \in S_2(\Gamma_1(C))$  est propre normalisée primitive,  $C = C_1 p^\alpha$ ,  $p \nmid C_1$ ,  $\alpha \neq 0$ . Soit  $\chi$  son Nebentypus,  $C(\chi) = C_2 p^\beta$ ,  $p \nmid C_2$*

Si  $\beta \neq 0$ , on a

$$\begin{cases} |a(p, f)|^2 = p & \text{si } \alpha = \beta \\ = 0 & \text{si } \alpha > \beta. \end{cases}$$

On applique cette proposition comme suit. Soit  $f$  une forme p. n. p. dont le Nebentypus  $\chi$  restreint à  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  n'est pas trivial. Soit  $\chi_p$  la  $p$ -partie de  $\chi$ . Comme  $\beta \neq 0$ , on conclut que si  $f$  est ordinaire en  $p$ ,  $\chi_p$  est primitif.

Finalement, toujours en comparant les modules de Tate, on voit qu'on peut se limiter à des diviseurs  $t$  de  $M/C$ , premiers à  $p$ .

On peut donc poser la :

**DÉFINITION 1.2.** — Soit  $A_t = \sum_{C \mid M, f \in \mathcal{P}_C} A_f | [t]$  où la somme est étendue aux diviseurs  $C$  de  $M$  divisibles par  $p$ , aux formes dans un système maximal  $\mathcal{P}_C$  de formes p. n. p. de niveau  $C$  dont la  $p$ -partie du Nebentypus est primitive et deux à deux non conjuguées, et  $t$  parcourant l'ensemble des diviseurs premiers à  $p$  de  $M/C$ .

Soit alors  $\zeta$  une racine primitive  $p'$ -ième de l'unité. Soit  $\mathcal{O}_p = \mathbb{Z}_p[\zeta]$  l'anneau des entiers du corps cyclotomique  $k_p = \mathbb{Q}_p(\zeta)$ .  $\mathcal{O}_p$  est un anneau de valuation discrète complet. On choisit  $1 - \zeta$  pour uniformisante de  $\mathcal{O}_p$ . On a le théorème de bonne réduction de Langlands :

**THÉORÈME 1.3.** — (1) La variété  $A_f$  pour  $f \in \mathcal{P}_C$  (resp.  $A_t$ ) se prolonge en un schéma abélien sur  $\mathcal{O}_p$ .

(2) La variété  $A_t$  est stable sous l'action de  $h_p(\mathbb{Z})$ .

*Preuve :*

(1) On applique les théorèmes 7.1 et 7.5 de [9] comme dans [7], §9.

(2) Pour voir la stabilité de  $A_t$  sous l'action des opérateurs de Hecke, on considère son espace tangent sur  $C$  à l'origine  $T_0 A_{t/C}$  : Par définition, on trouve le sous-espace de  $S_2(\Gamma_1(M))$

$$T_0 A_{t/C} = \bigoplus_{\mathfrak{a}=1}^r S_2(\Phi_{\mathfrak{a}}, \varepsilon)$$

où  $\varepsilon$  parcourt l'ensemble des caractères de Dirichlet primitifs de conducteur  $p^{\mathfrak{a}}$ , où  $\Phi_{\mathfrak{a}} = \Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p^{\mathfrak{a}})$ , et l'espace  $S_2(\Phi_{\mathfrak{a}}, \varepsilon)$  est composé des formes  $\Gamma_1(Np^{\mathfrak{a}})$ -invariantes telles que si

$$a \in (\mathbb{Z}/Np^{\mathfrak{a}}\mathbb{Z})^\times, \quad a \equiv 1 \pmod{N},$$

et  $\gamma_a \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  vérifie  $\gamma_a \equiv \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  modulo  $Np^{\mathfrak{a}}$ , on ait  $f|_{\gamma_a} = \varepsilon(a) \cdot f$ .

Chaque espace  $S_2(\Phi_\alpha, \varepsilon)$  est stable par  $h_r(Z)$  car  $\alpha \neq 0$ , donc  $T_0 A_{r/C}$  est stable dans  $h_r(Z)$ .

Ainsi  $A_r$  est une sous-variété abélienne de  $J_r$ , définie sur  $\mathbb{Q}$ , stable par  $h_r(Z)$  et ayant bonne réduction sur  $k_r$ .

DÉFINITION 1.4. — On note  $J_{r,p}(R)/\mathcal{C}$ , l'adhérence schématique de  $J_{r,p}(R)/k_r$  dans le schéma abélien  $A_r/\mathcal{C}_r$ . C'est un schéma en groupes  $p$ -divisibles au sens de Tate [21].

On va maintenant comparer  $A_r$  et le bon quotient de Mazur-Wiles.

## 2. Le bon quotient $B_r$

Soit  $r \geq 1$  et  $i$  un entier compris entre 0 et  $r$ .

Soit  $\Phi_r^i = \Gamma_0(p^r) \cap \Gamma_1(Np^i)$ . En particulier avec les notations précédentes, on a  $\Phi_r^0 = \Phi_r$  et  $\Phi_r^r = \Gamma_1(Np^r)$ .

On note  $Z_r$  le modèle canonique sur  $\mathbb{Q}$  de la surface de Riemann  $\Phi_r^{-1} \backslash \mathbb{h}^*$  (i.e. le corps des fonctions est composé des fonctions invariantes sous  $\Phi_r^{-1}$ , de  $q$ -développement rationnel à l' $\infty$ ). Des inclusions  $\Gamma_1(Np^r) \subset \Phi_r^{-1} \subset \Gamma_1(Np^{r-1})$  on déduit les  $\mathbb{Q}$ -morphisms :

$$X_r \xrightarrow{\pi} Z_r \xrightarrow{\rho} X_{r-1}$$

d'où en passant aux jacobiniennes vues comme variétés de Picard :

$$JZ_r \xrightarrow{\pi^*} JX_r = J_r$$

et en passant aux jacobiniennes vues comme variétés d'Albanese :

$$JZ_r \xrightarrow{\rho^*} J_{r-1}.$$

On construit les « bons quotients » par récurrence comme suit :

(i)  $B_1 = J_1/\pi^* JZ_1$ .

(ii) Si on s'est donné  $J_{r-1} \xrightarrow{\alpha_{r-1}} B_{r-1}$  avec  $B_{r-1}$  et  $\alpha_{r-1}$  définis sur  $\mathbb{Q}$ , on définit

$$K_r = \text{Ker}(JZ_r \xrightarrow{\alpha_{r-1} \circ \rho^*} B_{r-1}) \quad \text{et} \quad J_r \xrightarrow{\pi^*} B_r = J_r/\pi^* K_r.$$



Il est clair que  $\alpha_r$  et  $B_r$  sont définis sur  $\mathbf{Q}$ . Soit  $w_M$  l'involution de Weil, c'est un automorphisme de  $X_r$  défini sur  $\mathbf{Q}(\zeta_M)$  déduit de l'action de  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ M & 0 \end{pmatrix}$  (cf. [2]). Notons  $h_r(\mathbf{Z})^*$  l'image de l'algèbre  $h_r(\mathbf{Z})$  par l'automorphisme de  $\text{End}(J_r)$  de conjugaison par  $w_M$ . C'est aussi l'image de  $h_r(\mathbf{Z})$  par l'involution de Rosati de  $J_r$  associé à l'autodualité canonique de la jacobienne. Donc tous les éléments de  $h_r(\mathbf{Z})^*$  sont définis sur  $\mathbf{Q}$ .

Notons encore, pour chaque  $r \geq 1$ ,  $\beta_r$  le morphisme  $\alpha_r \circ w_M$ . On note encore  $\alpha_r$  (resp.  $\beta_r$ ) les restrictions de  $\alpha_r$  (resp.  $\beta_r$ ) à  $A_r$ . Remarquons que  $\beta_r$  est définie sur  $\mathbf{Q}(\zeta_M)$ .

PROPOSITION 2.1 :

- (1)  $\alpha_r$  et  $\beta_r : A_r \rightarrow B_r$  sont des isogénies (définies resp. sur  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{Q}(\zeta_M)$ ).
- (2) L'algèbre  $h_r(\mathbf{Z})^*$  laisse stable  $K_r$  pour chaque  $r \geq 1$  d'où une représentation  $h_r(\mathbf{Z})^* \rightarrow \text{End}(B_r)$  et on a :

$$\forall T \in h_r(\mathbf{Z}); \quad \beta_r \circ T = T^* \circ \beta_r$$

où

$$T^* = w_M \circ T \circ w_M.$$

*Remarque.* — Pour  $r=1$ ,  $K_1$  est stable par  $w_{N_p}$  donc par  $h_1(\mathbf{Z})$  et  $h_1(\mathbf{Z})^*$ , on a donc deux représentations

$$\begin{cases} h_1(\mathbf{Z}) \rightarrow \text{End}(B_1) \\ h_1(\mathbf{Z})^* \rightarrow \text{End}(B_1) \end{cases}$$

et pour tout  $T$  de  $h_1(\mathbf{Z})$ , on a :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \circ T &= T \circ \alpha_1 \\ \alpha_1 \circ T^* &= T^* \circ \alpha_1. \end{aligned}$$

Cependant, pour  $r > 1$ , l'algèbre  $h_r(\mathbf{Z})$  ne laisse pas stable  $K_r$  (en fait,  $T(p) K_r \neq K_r$ ).

*Preuve.* — Pour montrer que  $\alpha_r$  est une isogénie, on va montrer par récurrence sur  $r$  que les espaces tangents à l'origine de  $A_{r,C}$  et  $K_{r,C}$  sont en somme directe orthogonale.

On note  $M_i = N p^i$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

D'abord, on sait que pour chaque  $r \geq 1$  l'application tangente de l'inclusion

$$A_r \rightarrow J_r$$

n'est autre que l'inclusion

$$\bigoplus_{\alpha=1}^r \bigoplus_{\varepsilon \text{ prim., mod. } p^r} S_2(\Phi_\alpha, \varepsilon) \subset S_2(\Gamma_1(M_r)).$$

(i)  $r=1$  : On sait que l'application tangente du morphisme à noyau fini  $K_1 \xrightarrow{\pi^*} J_1$  est l'inclusion  $S_2(\Phi_1) \subset S_2(\Gamma_1(M_r))$  donc on a bien la décomposition orthogonale pour le produit scalaire de Petersson :

$$\begin{array}{ccccc} T_0 J_{1/\mathbb{C}} & = & T_0 K_{1/\mathbb{C}} \oplus & T_0 A_{1/\mathbb{C}} \\ \parallel & & \parallel & \parallel \\ S_2(\Gamma_1(M_1)) & = & S_2(\Phi_1) \oplus \bigoplus_{j \neq 0} S_2(\Phi_1 \cdot \omega^j). \end{array}$$

On voit de plus que  $\Phi_1$  est normalisé par  $w_{M_1}$  et est de niveau  $M_1$  donc  $K_1$  est stable par l'algèbre  $h_1(\mathbb{Z})$  et aussi sous  $w_{M_1}$  et  $h_1(\mathbb{Z})^*$ .

D'où les formules de commutation de la remarque.

(ii) Supposons qu'on ait montré pour  $r-1$  la décomposition orthogonale :

$$T_0 J_{r-1/\mathbb{C}} = TK_{r-1/\mathbb{C}} \oplus TA_{r-1/\mathbb{C}},$$

on a

$$(2.1.1) \quad S_2(\Gamma_1(M_r)) = \bigoplus_{\varepsilon \text{ prim., mod. } p^r} S_2(\Phi_r, \varepsilon) \oplus S_2(\Phi_r^{-1}),$$

or par définition de  $T_0 A_{r/\mathbb{C}}$ , on a la décomposition orthogonale :

$$(2.1.2) \quad T_0 A_{r/\mathbb{C}} = \bigoplus_{\varepsilon \text{ prim., mod. } p^r} S_2(\Phi_r, \varepsilon) \oplus T_0 A_{r-1/\mathbb{C}}$$

il s'agit donc de montrer :

$$(2.1.3) \quad S_2(\Phi_r^{-1}) = T_0 K_{r/\mathbb{C}} \oplus T_0 A_{r-1/\mathbb{C}}.$$

Mais par construction, l'application tangente de  $\rho_* : JZ_r \rightarrow J_{r-1}$  n'est autre que la trace  $\text{Tr}$  de  $S_2(\Phi_r^{-1})$  à  $S_2(\Gamma_1(M_{r-1}))$ , et cette trace coïncide avec la multiplication par  $p$  sur le sous-espace  $T_0 A_{r-1/\mathbb{C}}$  de  $S_2(\Phi_r^{-1})$ . En outre, par définition,  $T_0 K_{r/\mathbb{C}}$  est l'ensemble des formes de  $S_2(\Phi_r^{-1})$  dont la trace est dans  $T_0 K_{r-1/\mathbb{C}}$ .

Soit donc  $f \in S_2(\Phi_r^{-1})$ , par hypothèse de récurrence  $\text{Tr}(f) = g + h$  où

$$g \in T_0 K_{r-1/\mathbb{C}} \quad \text{et} \quad h \in T_0 A_{r-1/\mathbb{C}}$$

donc

$$\text{Tr}(f) = g + \frac{1}{p} \text{Tr}(h) \quad \text{et} \quad f - \frac{1}{p} h \in T_0 K_{r/\mathbb{C}}$$

ceci montre l'existence de la décomposition (2.1.3).

Notons alors  $\langle p, p \rangle_r$  le produit de Petersson sur  $S_2(\Gamma_1(M_r))$ ; pour

$$f \in T_0 K_{r/\mathbb{C}} \quad \text{et} \quad g \in T_0 A_{r-1/\mathbb{C}}$$

on a :

$$\langle f, g \rangle_r = \langle \text{Tr}(f), g \rangle_{r-1} = 0$$

par hypothèse de récurrence. Ce qui achève la démonstration. De ce qui précède, il découle que  $K_r$  est stable par  $h_r(\mathbb{Z})^*$  car son espace tangent est orthogonal à  $T_0 A_{r/\mathbb{C}}$  qui est stable par  $h_r(\mathbb{Z})$ , donc est stable par les adjoints pour le produit de Petersson des éléments de  $h_r(\mathbb{Z})$  (cf. [Sh 1], chapitre 3, formule 3.4.5 et proposition 3.5.4).

Pour montrer que  $\beta_r$  est une isogénie on montre par récurrence que

$$(T_0 K_{r/\mathbb{C}}) | w_{M_r} \cap T_0 A_{r/\mathbb{C}} = \{0\}.$$

Pour  $r=1$ , c'est évident car  $T_0 K_{1/\mathbb{C}}$  est stable par  $w_{M_1}$ .

Supposons le résultat acquis pour  $r-1$ .

D'après (2.1.1) et la stabilité évidente des deux facteurs du membre de droite de cette formule, il suffit de montrer que dans  $S_2(\Phi_r^{-1})$ , on a :

$$T_0 A_{r-1} | w_{M_r} \cap T_0 K_r = \{0\}.$$

Soit donc  $f \in T_0 A_{r-1}$  telle que  $f | w_{M_r} \in T_0 K_r$  comme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ M_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ M_{r-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a :

$$f | w_{M_r} = f | w_{M_{r-1}} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que l'on peut prendre pour représentants de  $\Gamma_1(M_{r-1}) \setminus \Phi_r^{-1}$  les éléments  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x M_{r-1} & 1 \end{pmatrix} x=0, \dots, p-1$ . Ainsi pour tout  $g \in S_2(\Phi_r^{-1})$  on a

$$\text{Tr}(g) = \sum_{x=0}^{p-1} g \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x M_{r-1} & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

En outre l'opérateur  $T(p)^* \in h_{r-1}(\mathbb{Z})^*$  agit par

$$T(p)^* = \sum_{x=0}^{p-1} h \left| \begin{pmatrix} p & 0 \\ x M_{r-1} & 1 \end{pmatrix} \right|$$

pour tout  $h \in S_2(\Gamma_1(M_{r-1}))$ .

On voit alors la formule :

$$\text{Tr}(f|w_{M_r}) = f|w_{M_{r-1}} T(p)^* = f|T(p)w_{M_{r-1}}$$

et comme  $T_0 A_{r-1}$  est stable par  $T(p)$  et que par hypothèse de récurrence  $T_0 A_{r-1}|w_{M_{r-1}} \cap T_0 K_{r-1}$  est nul, on conclut  $f|T(p)=0$ , ce qui d'après la proposition (1.1) et la définition de  $T_0 A_{r-1}$  est impossible car on voit que  $f \neq 0 \Rightarrow f|T(p) \neq 0$ .

[En effet, il y a une base de  $T_0 A_{r-1}$  constituée de  $g|[t]$  où  $g$  est p. n. p. de niveau  $Cp^a$ ,  $C|N$ ,  $t|N/C$  le Nebentypus de  $g$  ayant sa  $p$ -partie primitive modulo  $p^a$ , donc par la proposition (1.1) on voit que  $a(p, g) \neq 0$ . Comme  $T(p)$  commute aux opérateurs  $[t]$ , si on prend  $f$  quelconque non nulle dans  $T_0 A_{r-1}$ , on a :

$$f = \sum_{g, t} \lambda_{g, t} g|[t],$$

$\lambda_{g, t}$  non tous nuls et

$$f|T(p) = \sum_{g, t} a(g, p) g|[t] \neq 0.]$$

Ce qui achève la démonstration du fait que  $\beta_r$  est une isogénie.

Enfin, si  $T \in h_r(\mathbf{Z})$ , et  $f \in T_0 A_{r/\mathbf{C}}$  on a

$$f|T|w_{M_r} = f|w_{M_r}|T^* \quad \text{donc} \quad \beta_r \circ T = T^* \circ \beta_r.$$

### 3. Rappels sur la réduction mod. $p$ de $X_r$ et du morphisme $J_r \rightarrow B_r$

Soit  $M \geq 1$ . Pour  $(a, b) \in (1/M \mathbf{Z}/\mathbf{Z})^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , on note  $f_{(a, b)}$  la fonction de Fricke :

si  $z \in \mathfrak{h}$ ,

$$f_{(a, b)}(z) = \frac{g_2(z)g_3(z)}{\Delta(z)} p(az + b; z) \quad (\text{cf. [19], chapitre 6}).$$

C'est une fonction  $\Gamma(M)$ -modulaire. On fixe désormais un plongement de  $\overline{\mathbf{Q}}$  dans  $\mathbf{C}$ .

On sait que le corps des fonctions  $\Gamma_1(M)$ -modulaires est engendré sur  $\mathbf{C}$  par l'invariant modulaire  $j$  et par  $f_{(0, 1/M)}$ . Ce corps est défini sur  $\mathbf{Q}(\zeta_M)$  où  $\zeta_M = e^{2\pi i/M}$ . C'est-à-dire qu'en posant

$$K_M = \mathbf{Q}\left(\zeta_M, j, f_{(0, 1/M)}\right),$$

on a :

$$\mathbf{C}\left(j, f_{(0, 1/M)}\right) = K_M \otimes_{\mathbf{Q}(\zeta_M)} \mathbf{C}.$$

Soit  $M \geq 4$ ; soit

$$A_M = \mathbf{Q}\left[\zeta_M, j, f_{(0, 1/M)}\right].$$

C'est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre intégralement close dans  $K_M$  et on voit aisément qu'elle est solution du problème de modules grossiers au sens de [16], chapitre 5, § 2 et [13], chapitre 4, n° 2 :

$$[\Gamma_1(M)] : \mathbf{Q}(\zeta_M) - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens}$$

$$R \mapsto \left( \begin{array}{l} \text{ensemble des classes d'isomorphismes sur } R \text{ de } (E, P_M) \\ E : \text{courbe elliptique sur } R, \\ P_M : \text{point d'ordre exactement } M, \text{ rationnel sur } R. \end{array} \right)$$

Soit  $G_M = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_M)/\mathbb{Q})$ . Ce groupe opère sur le corps  $K_M$  par action sur les coefficients du  $q$ -développement en la pointe  $\infty$ .

L'algèbre  $A_M^G$  est solution du problème

$$\mathbb{Q} - \text{Alg} \rightarrow \text{Ens}$$

$$R \mapsto \left( \begin{array}{l} \text{classes d'isomorphisme sur } R \text{ de } (E, \mu_M \xrightarrow{i} E)/R, \\ E : \text{courbe elliptique définie sur } R, \\ i : \text{immersion fermée définie sur } R \text{ du schéma en groupes } \mu_{M \cdot R} \\ \text{dans } E/R. \end{array} \right)$$

En effet, si  $a \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times$ , et  $\sigma_a \in G_M$  est l'automorphisme tel que  $\zeta_M^{\sigma_a} = \zeta_M^a$ , on a :

$$f_{(0, 1/M)}^{\sigma_a} = f_{(0, a/M)} = \text{fonction de Weber de } a \cdot P,$$

si

$$f_{(0, 1/M)} = \text{fonction de Weber de } P.$$

Alors qu'une immersion  $i : \mu_M \hookrightarrow E$  est donnée par  $P \in E[M](R \otimes \mathbb{Q}(\zeta_M))$  tel que  $P^{\sigma_a} = a \cdot P$  pour tout  $a \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times$ .

En outre, IGUSA [8] a démontré que le problème sur  $\mathbb{Z}$  :

$$R \mapsto \left( \begin{array}{c} \mathbb{Z}\text{-Alg} \rightarrow \text{Ens} \\ \text{classes d'isomorphisme sur } R \text{ de } (E, \mu_M \xrightarrow{i} E)/R \end{array} \right)$$

admet un schéma de modules grossiers,  $\mathcal{X}/\mathbb{Z}$  lisse sur  $\mathbb{Z}$ , quasi-fini sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$  la droite des  $j$ . On note  $X_1(M)_{\mathbb{Z}}$  la normalisation de  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$  dans  $K_M^G$ .

Pour tout schéma  $T/\mathbb{Z}$  et tout anneau  $A$ , on note  $T/A$  ou  $T \otimes A$  le changement de base de  $T$  de  $\mathbb{Z}$  à  $A$ .

On voit facilement que sur les fibres génériques on a  $\mathcal{X}/\mathbb{Q} \hookrightarrow X_1(M)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$  car cette dernière courbe n'est autre que le modèle noté  $X_1(M)$  dans l'introduction du corps  $K_M^G$ . Il en résulte une immersion ouverte  $\mathcal{X}/\mathbb{Z} \hookrightarrow X_1(M)_{\mathbb{Z}}$ .

On pose désormais  $M = Np^r$ ,  $r \geq 1$ ,  $p \nmid N$ , et on rappelle que  $\zeta$  désigne une racine  $p^r$ -ième de l'unité fixée disons  $\zeta = e^{2\pi i/p^r}$ . Soit  $I \subset G_M$  le sous-groupe d'inertie en  $p$ . On a canoniquement  $G_M = G_N \times I$ . On introduit  $X_1(M)_{\mathbb{Z}[\zeta]}$  la normalisation dans  $K_M^{G_N}$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ . On voit aisément que  $\mathcal{Y}/\mathbb{Z}[\zeta]$  est solution du problème d'Igusa sur  $\mathbb{Z}[\zeta]$  et comme précédemment on obtient une immersion ouverte  $\mathcal{Y}/\mathbb{Z}[\zeta] \hookrightarrow X_1(M)_{\mathbb{Z}[\zeta]}$ . Le groupe  $I$  opère par automorphismes sur  $X_1(M)_{\mathbb{Z}[\zeta]}$  et le morphisme naturel déduit de l'identi-

fication  $K_M^{G_N} \simeq K_M^{G_M} \otimes \mathbb{Q}(\zeta)$  :

$$X_1(M)_{\mathbb{Z}[\zeta]} \rightarrow X_1(M)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}[\zeta]$$

est  $I$ -équivariant. On récupère donc encore un morphisme  $I$ -équivariant sur les fibres spéciales. Soit alors  $\text{Ig}(M)$  le modèle projectif lisse de la courbe (affine) lisse  $\mathcal{Y}/\mathbb{F}_p$ . Comme  $\mathbb{F}_p$  est aussi bien le corps résiduel en  $p$  de  $\mathbb{Z}$  qu'en  $(1-\zeta)$  de  $\mathbb{Z}[\zeta]$ , on obtient, en utilisant les immersions fermées de la fibre spéciale de  $\mathcal{Y}/\mathbb{Z}$  (resp.  $\mathcal{Y}/\mathbb{Z}[\zeta]$  c'est la même!) prolongées à la courbe lisse  $\text{Ig}(M)$  par propriété des images, un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & X_1(M)_{\mathbb{Z}[\zeta]} \otimes \mathbb{F}_p \\ & \nearrow & \downarrow \\ \text{Ig}(M) & \hookrightarrow & X_1(M)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{F}_p \end{array}$$

Soit  $X_1(M)_{\mathbb{Z}[\zeta]}$  le modèle régulier minimal de  $X_1(M)_{\mathbb{Z}[\zeta]}$ . Le groupe  $I$  opère dessus, par la propriété de minimalité, de façon compatible avec la projection  $X_1(M)_{\mathbb{Z}[\zeta]} \rightarrow X_1(M)_{\mathbb{Z}[\zeta]}$ .

Soit  $\mathcal{A}$  la courbe somme disjointe des normalisées des composantes irréductibles réduites de  $X_1(M)_{\mathbb{Z}[\zeta]} \otimes \mathbb{F}_p$ , on obtient encore une immersion fermée naturelle  $i$ , faisant commuter le triangle :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{A} \\ & \nearrow i & \downarrow \\ \text{Ig}(M) & \hookrightarrow & X_1(M)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{F}_p \end{array}$$

et par normalisation,  $I$  opère encore sur  $\mathcal{A}$  par des  $\mathbb{F}_p$ -automorphismes. Chaque flèche du triangle étant bien sûr  $I$ -linéaire.

Soit  $C_\alpha = i_\alpha(\text{Ig}(M))$  la composante connexe de  $\mathcal{A}$  définie par  $i_\alpha$ .

On voit alors, et c'était le but de ces rappels, que l'action de  $I$  sur  $\mathcal{A}$  est triviale sur  $C_\alpha$ .

Soit finalement  $x, y$  deux entiers tels que  $p'x + Ny = 1$ . On sait que la matrice  $\begin{pmatrix} p' & -1 \\ My & p'x \end{pmatrix}$  fournit un automorphisme  $w_{p'}$  de  $X_1(M)_{\mathbb{Z}[K]}$  indépendante en fait de  $x$  et  $y$  ([20], page 156). On a pour  $\sigma \in I$  et  $a \equiv 1 \pmod{p'}$ , tel que  $\zeta^\sigma = \zeta^a$ ,

$$w_{p'}^\sigma = \langle a^{-1} \rangle \circ w_{p'}$$

Ainsi, en posant  $i_0 = w_{p'} \circ i_\alpha$ , on récupère une autre composante privilégiée de  $\mathcal{A}$  :

$$C_0 = i_0(\text{Ig}(M)) = w_{p'}(C_\alpha),$$

sur laquelle  $I \simeq (\mathbb{Z}/p'\mathbb{Z})^\times$  opère par  $\langle \cdot \rangle^{-1}$ .

Remarquons que les composantes de  $\mathcal{A}$  autres que  $C_0$  et  $C_\alpha$  sont permutées sous l'action de  $I$ .

On peut maintenant étudier la réduction mod.  $1 - \zeta$  du morphisme  $\alpha_r: J_r \rightarrow B_r$  vu sur  $k_r$ .

A partir de  $\alpha_r$  vu sur  $k_r$ , on obtient par passage aux modèles de Néron un morphisme de  $\mathcal{C}_r$ -schémas  $J_{r/\mathcal{C}_r} \xrightarrow{\alpha_r} B_{r/\mathcal{C}_r}$ , et en le restreignant à la « composante neutre »  $J_{r/\mathcal{C}_r}^0$ , on trouve un morphisme, encore surjectif. En passant alors aux fibres spéciales, et en notant  $\text{Ab}(J_r^0 \otimes \mathbb{F}_p)$  la plus grande variété abélienne quotient de  $J_r^0 \otimes \mathbb{F}_p$ , on trouve un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} J_r^0 \otimes \mathbb{F}_p & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_r} & B_r \otimes \mathbb{F}_p \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\alpha}_r^{\text{Ab}} & \\ \text{Ab}(J_r^0 \otimes \mathbb{F}_p) & & \\ \downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

où  $\tilde{\alpha}_r^{\text{Ab}}$  est l'unique morphisme de variétés abéliennes au travers duquel  $\tilde{\alpha}_r$  se factorise par la propriété universelle de  $\text{Ab}(J_r^0 \otimes \mathbb{F}_p)$ . Ce morphisme est encore surjectif, défini sur  $\mathbb{F}_p$ .



Comme le schéma  $X_1(M)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}$  est régulier, d'après un théorème de RAYNAUD [18], on a un isomorphisme canonique

$$J_{r/\mathbb{C}_r}^0 \rightarrow \text{Pic}^0(X_1(M)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \otimes \mathbb{C}_r)$$

qui permet de décrire  $\text{Ab}(J_r^0 \otimes \mathbb{F}_p)$  par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} J_r^0 \otimes \mathbb{F}_p & \xrightarrow{\sim} & \text{Pic}^0(X_1(M)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \otimes \mathbb{F}_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Ab}(J_r^0 \otimes \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\sim} & \text{Pic}^0(\mathcal{N}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

La flèche verticale à droite étant l'image de la flèche de normalisation par le foncteur  $\text{Pic}^0$ .

Or on peut décomposer  $\text{Pic}^0(\mathcal{N})$  comme suit :

soient

$$j_r^\infty = \text{Pic}^0(C_\infty); \quad j_r^0 = \text{Pic}^0(C_0)$$

et  $\mathcal{B}$  la variété abélienne produit cartésien des jacobiniennes des composantes de  $\mathcal{N}$  autres que  $C_\infty$  et  $C_0$ . On a alors

$$\text{Pic}^0(\mathcal{N}) = j_r^\infty \times \mathcal{B} \times j_r^0.$$

Ceci permet de définir un morphisme  $\sigma_r: j_r^\infty \times j_r^0 \rightarrow B_r \otimes \mathbb{F}_p$ , obtenu en composant l'inclusion naturelle dans  $\text{Ab}(J_r^0 \otimes \mathbb{F}_p)$  avec  $\tilde{\alpha}_r^{\text{Ab}}$ .

Soit d'autre par  $\mathcal{A} = B_r$  ou  $J_r$ . On rappelle que pour une variété abélienne  $\mathcal{A}$  définie sur  $\mathbb{Q}$  (donc sur  $\mathbb{Q}_p$ ), il y a une action naturelle du groupe  $I$  sur la fibre spéciale du modèle de Néron de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathbb{C}_r$  (action géométrique de l'inertie). Soit en effet  $\sigma \in I$  et  $u_\sigma$  l'automorphisme de  $\mathcal{A}/k_r$ , au-dessus de l'automorphisme de  $\text{Spec } k_r$ , déduit de  $\sigma$  (on utilise ici que  $\mathcal{A}$  est en fait définie sur  $\mathbb{Q}_p$ ). En passant aux modèles de Néron, on prolonge  $u_\sigma$  à  $\mathcal{A}/\mathbb{C}_r$ . Comme le corps résiduel de  $\mathbb{C}_r$  n'est autre que  $\mathbb{F}_p$ , on obtient un  $\mathbb{F}_p$ -automorphisme  $\tilde{u}_\sigma$  de  $\mathcal{A} \otimes \mathbb{F}_p$ . On applique cela à  $\mathcal{A} = J_r$ , puis  $\mathcal{A} = B_r$ . En outre l'action de  $I$  sur  $J_r \otimes \mathbb{F}_p$  définie ci-dessus coïncide avec l'action déduite de celle de  $I$  sur  $X_1(M)/k_r$ . Ce qui entraîne que  $\tilde{\alpha}_r$

donc  $\sigma_r$  est  $I$ -équivariante lorsque l'on munit  $j_r^\infty \times j_r^0$  de l'action de  $I$  déduite de celle sur  $\text{Ig}(M)$ .

Pour  $\sigma \in I$ , on note à l'unique élément de  $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times$  tel que  $a \equiv 1 \pmod{N}$  et  $\zeta^\sigma = \zeta^a$ , et on écrit  $u = u_a$ .

Pour ne pas risquer de confusion, nous noterons, pour chaque correspondance  $T$  sur  $X_r$ ,  $T = T_{\text{Pic}}$  l'endomorphisme de  $J_r = \text{Pic}^0(X_r)$  qui s'en déduit, et  $T_{\text{Alb}}$  l'endomorphisme de  $J_r$  vue comme variété d'Albanase (cf. [14], chapitre 2, § 5).

On rappelle le théorème dont nous aurons à faire usage :

THÉORÈME (Mazur-Wiles) 3.1. — (1)  $\sigma_r$  est une isogénie,

(2)  $\sigma_r \circ (\text{Id} \times \langle a \rangle_{\text{Alb}}) = u_a \circ \sigma_r$ , pour tout  $a \in G_r$ ,  $a \equiv 1 \pmod{N}$ ,

(3)  $T(p)_{\text{Alb}} \circ \sigma_r = \sigma_r \circ U$ ,  $T(p)_{\text{Pic}} \circ \sigma_r = \sigma_r \circ U'$ ,

où  $U$  et  $U'$  sont les endomorphismes de  $j_r^\infty \times j_r^0$  définis, en notation matricielle par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in j_r^\infty \times j_r^0; \quad U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{V} & c_1 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

si

$$U' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \langle n_p \rangle_{\text{Pic}} \circ \begin{pmatrix} F & 0 \\ c_2 & \tilde{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où

$E$ , désigne le Frobenius absolu;

$V$ , le Verschiebung;

$n_p \in G_r$  avec  $n_p \equiv 1 \pmod{p'}$  et  $n_p \equiv p \pmod{N}$ .

et  $\tilde{V} = \langle n_p \rangle_{\text{Alb}} \circ V$ .

De plus si

$$\pi_\infty: C_\infty \rightarrow X_1(N)/\mathbb{F}_p \quad \text{et} \quad \pi_0: C_0 \rightarrow X_1(N)/\mathbb{F}_p$$

désignent les projections naturelles déduites de  $X_1(M)/\mathbb{Z}[\zeta] \rightarrow X_1(N)/\mathbb{Z}[\zeta]$ , on définit  $c_1$  et  $c_2$  par :

$$c_1 = \pi_\infty^* \pi_0, \quad \text{et} \quad c_2 = \pi_0^* \pi_\infty.$$

*Preuve.* — Les assertions (1) et (3) sont prouvées dans [14], chapitre 3, proposition 2 et 3.

L'assertion (2) a été démontrée dans la discussion précédant l'énoncé du théorème.

Rappelons alors qu'à l'élément  $T(p) = T(p)_{\text{Pic}}$  de  $h_r = h_r(Z_p)$  est attaché un idempotent  $e_r$  de  $h_r$  de sorte que si  $h_r^0 = e_r h_r$  et  $h_r^{s.s.} = (1 - e_r) h_r$  dans la décomposition :  $h_r = h_r^0 \times h_r^{s.s.}$  on ait  $T(p) = (T(p)^0, T(p)^{ss})$  où  $(T(p)^0)$  est inversible et  $T(p)^{s.s.}$  est topologiquement nilpotent.

De même, pour  $T(p)_{\text{Alb}} \in h_r^*$ , on définit un idempotent  $e_{r, \text{Alb}}$ .

Soit  $\tilde{B}_r$  la fibre spéciale de  $B_r$  sur  $\mathbb{F}_p$ , et  $\tilde{B}_{r, p}$  son groupe  $p$ -divisible. On va étudier à l'aide de la proposition précédente le groupe  $p$ -divisible  $e_{r, \text{Alb}} \cdot \tilde{B}_{r, p}$ .

Notons  $\Gamma^\infty$  (resp.  $\Gamma^0$  (resp.  $\Gamma$ ) le groupe  $p$ -divisible de  $j_r^\infty$  (resp.  $j_r^0$ , resp.  $j_r^\infty \times j_r^0$ ).

Soit  $U$  l'endomorphisme de  $\Gamma$  défini dans la proposition. Il s'insère à l'évidence dans le diagramme commutatif de schémas en groupes  $p$ -divisibles sur  $\mathbb{F}_p$  et de  $h_r(Z_p)_{\text{Alb}}$ -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma^\infty & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \Gamma^0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow F & & \downarrow U & & \downarrow \tilde{V} \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma^\infty & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \Gamma^0 \longrightarrow 0. \end{array}$$

On va définir des idempotents  $e_F, e_U, e_{\tilde{V}}$  attachés à  $F, U, \tilde{V}$  et montrer la :

**PROPOSITION 3.2.** — *Le schéma en groupes  $p$ -divisibles  $e_U \Gamma$  se dévisse canoniquement en :*

$$0 \rightarrow e_F \Gamma^\infty \rightarrow e_U \Gamma \rightarrow e_{\tilde{V}} \Gamma^0 \rightarrow 0$$

où  $e_F \Gamma^\infty$  est étale et  $e_{\tilde{V}} \Gamma^0$  est de type multiplicatif. En particulier,  $e_U \Gamma$  est un schéma ordinaire.

*Preuve.* — Soit  $\Delta$  un groupe  $p$ -divisible sur un corps parfait  $k$  de caractéristique  $p$ . Soit  $u \in \text{End}(\Delta/k)$ . Dans cette  $\mathbb{Z}_p$ -algèbre libre de type fini,  $u$  engendre sur  $\mathbb{Z}_p$  une sous-algèbre commutative qui se décompose en produit d'algèbres locales. On note  $e_u$  la somme des idempotents orthogonaux associés à des composantes où  $u$  est inversible.

On applique cela à  $u = F, U, \tilde{V}$  et  $\Delta = \Gamma^\infty, \Gamma, \Gamma^0$  ( $k = \mathbb{F}_p$ ).

Une autre construction plus explicite de  $e_u$  utilise la notion de polynôme caractéristique :

Soit  $n$  le rang du schéma en groupes  $p$ -divisible  $\Delta$ .

Soit  $Z_p[X]/k$  le  $k$ -schéma constant donné par le groupe  $Z_p[X]$  et soit  $\Delta \otimes_{Z_p} Z_p[X]/k$  le  $k$ -schéma représentant le foncteur  $R_{(R:k-\text{alg})} \rightarrow \Delta(R) \otimes_{Z_p} Z_p[X]$ , puis le  $k$ -schéma en  $Z_p[X]$ -modules  $\Lambda_{Z_p[X]}^n(\Delta \otimes_{Z_p} Z_p[X])$ .

L'endomorphisme  $\Lambda^n(u - \text{Id} \otimes X)$  s'identifie à un élément de  $Z_p[X]$  baptisé polynôme caractéristique de  $u$ , et on vérifie facilement sur les points de  $\Delta$  le théorème d'Hamilton-Cayley :  $P_u(u) = 0 \in \text{End}(\Delta/k)$ .

Soit alors  $\bar{P}_u(X) \in \mathbb{F}_p[X]$  la réduction de  $P_u$  modulo  $p$ . Supposons  $\bar{P}_u(X) = X^r \bar{S}(X)$  où  $d^0 \bar{S} = s$ ,  $r+s=n$ ;  $X \nmid \bar{S}$ . D'après le lemme de Hensel, il existe  $R(X)$ ,  $S(X)$  dans  $Z_p[X]$  tels que  $P_u(X) = R(X)S(X)$  avec  $R$  distingué unitaire de degré  $r$  ( $R(X) \equiv X^r \pmod{p}$ ) et  $S(0) \not\equiv 0 \pmod{p}$ . De plus, il existe  $A, B$  dans  $Z_p[X]$  tels que

$$A(X)R(X) + B(X)S(X) = 1$$

et en posant

$$e_u = A(u)R(u) \in Z_p[u] \subset \text{End}(\Delta/k),$$

on retrouve explicitement l'idempotent  $e_u$  précédent. Cette construction à l'avantage de rendre évidentes les égalités :

$e_u \Delta$  = sous-schéma en groupes  $p$ -divisible maximal sur lequel  $u$  est un automorphisme;

$(1 - e_u) \Delta$  = sous-schéma en groupes  $p$ -divisible maximal sur lequel  $u$  est localement nilpotent (i.e. pour tout  $m \geq 1$   $u$  est nilpotent sur  $(1 - e_u) \cdot \Delta[p^m]/k$ ), et  $\Delta \simeq e_u \Delta \times (1 - e_u) \Delta$ .

Une fois ces définitions clarifiées, la suite exacte courte résulte des comparaisons des polynômes caractéristiques :

$$P_U(X) = P_F(X) P_{\tilde{V}}(X)$$

$$P_F(X) = X^{r_F} \cdot S_F(X)$$

et

$$P_{\tilde{V}}(X) = X^{r_{\tilde{V}}} S_{\tilde{V}}(X)$$

donc

$$P_U(X) = X^{r_F + r_{\tilde{V}}} \cdot S_F(X) S_{\tilde{V}}(X),$$

ce qui donne  $S_U = S_F \cdot S_{\tilde{V}}$ , d'où résulte l'additivité des rangs :

$$\text{rang}(e_U \Gamma) = \text{rang}(e_F \Gamma^\infty) + \text{rang}(e_{\tilde{V}} \Gamma^0).$$

On voit alors que  $e_F \Gamma^\infty$  coïncide avec la partie étale de  $\Gamma^\infty$  (car le noyau de  $F$  est contenu dans la  $p$ -torsion de la partie connexe de  $\Gamma^\infty$ ). Puis on va voir par la dualité de Cartier que  $e_{\tilde{V}} \Gamma^0 = e_V \Gamma^0$  est de type multiplicatif. Soit  $is: \Gamma^0 \rightarrow (\Gamma^0)'$  l'isomorphisme du groupe  $p$ -divisible  $\Gamma^0$  à son dual de Cartier résultant de l'autodualité des jacobiniennes. On a la formule pour le Verschiebung :  $is \circ V = F' \circ is$  où  $F'$  est le dual de Cartier de  $F$ . D'où un accouplement parfait de  $k$ -schémas :

$$(\ , \ ) : \Gamma^0 \times \Gamma^0 \rightarrow \mathbf{G}_m$$

défini par :  $(x, y) = \langle x, is(y) \rangle$ , l'accouplement  $\langle \ , \ \rangle$  étant donné par la dualité de Cartier.

On voit que  $(Fx, y) = (x, Vy)$  donc grâce aux décompositions :

$$\begin{cases} \Gamma^0 = e_F \Gamma^0 \times (1 - e_F) \Gamma^0 \\ \Gamma^0 = e_V \Gamma^0 \times (1 - e_V) \Gamma^0 \end{cases}$$

on voit que  $(\ , \ )$  induit la dualité

$$e_F \Gamma^0 \times e_V \Gamma^0 \rightarrow \mathbf{G}_m.$$

Or  $e_F \Gamma^0$  est étale donc  $e_V \Gamma^0$  est de type multiplicatif comme  $F_p$ -schéma :

$$e_V \Gamma^0 \cong (e_F \Gamma^0)'.$$

De tout ceci, il résulte que  $e_U \Gamma$  est ordinaire car sa composante connexe est isomorphe à  $e_V \Gamma^0$  qui est de type multiplicatif. Et on obtient le corollaire que l'on visait :

**COROLLAIRE 3.3.** — *Le schéma en groupes  $p$ -divisible  $e_{r, \text{Alb}} \cdot B_{r/\ell}$ , est ordinaire et  $\sigma_r$  induit une isogénie de  $(j_{r, p}^\times)^{\text{ét}}$  à  $(e_{r, \text{Alb}} \cdot \tilde{B}_{r, p})^{\text{ét}}$ ; l'action géométrique de l'inertie sur ce dernier groupe est donc triviale.*

*Preuve.* — C'est clair par ce qui précède. C'est le contenu de la proposition 2, paragraphe 4 de [15].

## 4. Preuve du théorème

Soit  $R \subset h^0(a)$  la composante locale que l'on s'est donné,  $a$  satisfaisant l'hypothèse (★). Comme  $A_r \subset J_r$  est  $h_r(\mathbf{Z})$ -stable, on définit  $R(A_r)$  comme la projection de  $R_r$  dans les endomorphismes de  $A_r$ . Il lui correspond un idempotent  $1_{R(A_r)}$  dans  $\mathbf{Z}_p \otimes \text{End } A_r$ , et on vérifie tout de suite que

$$J_{r,p}(R) = 1_{R(A_r)} \cdot e_r A_r [p^\infty](\bar{\mathbf{Q}}).$$

Considérons alors l'isogénie  $\beta_r: A_r \rightarrow B_r$  définie au paragraphe 2, rationnelle sur  $\mathbf{Q}(\zeta_{M_r})$ . Soit  $\mathcal{O}_{M_r} = \mathcal{O}_r[\zeta_N]$ . C'est un anneau de valuation discrète complet, non ramifié sur  $\mathcal{O}_r$ . En passant aux modèles de Néron sur  $\mathcal{O}_{M_r}$ , on obtient un morphisme

$$\beta_r: A_{r/\mathcal{O}_{M_r}} \rightarrow B_{r/\mathcal{O}_{M_r}}$$

qui induit une isogénie sur les fibres génériques et spéciales (en fait, son noyau est fini et plat). Grâce à la proposition 2.1, on obtient une isogénie de groupes  $p$ -divisibles, définie sur le corps résiduel  $\mathbf{F}$  de  $\mathcal{O}_{M_r}$ :

$$\tilde{\beta}_r: e_r \tilde{A}_{r,p} \rightarrow e_{r,\text{Alb}} \tilde{B}_{r,p}.$$

En particulier, le schéma en groupes  $p$ -divisible  $e_r A_{r,p}/\mathcal{O}_r$  est ordinaire. Grâce à la formule de commutation:  $w_{M_r} \circ u_a = \langle a \rangle_{\text{Pic}} \circ u_a \circ w_{M_r}$  (cf. [14], chapitre 2, § 5) on voit que:

*I agit sur la partie étale de  $e_r \tilde{A}_{r,p}$  par  $\langle \rangle_{\text{Alb}}$ : si  $x \in e_r \tilde{A}_r(\mathbf{F}_p)$ :  $u_a(x) = \langle a \rangle_{\text{Alb}} x$ .*

Considérons maintenant les groupes  $p$ -divisibles, définis sur  $\mathcal{O}_r$ :

$C_r/\mathcal{O}_r$  = partie connexe de  $e_r A_{r,p}/\mathcal{O}_r$  et

$E_r/\mathcal{O}_r$  = partie étale de  $e_r A_{r,p}/\mathcal{O}_r$ .

On renvoie à [24] pour leur définition et l'existence de la suite exacte courte de  $\mathcal{O}_r$ -schémas en groupes  $p$ -divisibles:

$$0 \rightarrow C_r/\mathcal{O}_r \rightarrow e_r A_{r,p}/\mathcal{O}_r \rightarrow E_r/\mathcal{O}_r \rightarrow 0.$$

On peut appliquer l'idempotent  $1_{R(A_r)}$  à cette suite, grâce à la functorialité du dévissage connexe-étale, et on obtient la suite exacte de schémas en groupes  $p$ -divisibles:

$$(4.1) \quad 0 \rightarrow C_r(R)/\mathcal{O}_r \rightarrow J_{r,p}(R)/\mathcal{O}_r \rightarrow E_r(R)/\mathcal{O}_r \rightarrow 0.$$

avec les notations évidentes.

PROPOSITION 4.1. — La suite exacte de  $R_r$ -modules obtenue en prenant les points sur  $\bar{\mathbb{Q}}_p$  dans (4.1) est scindée, pour chaque  $r \geq 1$ . Les scindages sont compatibles aux revêtements  $X_r \rightarrow X$ , d'où un scindage de  $R$ -modules :

$$J_{\infty, p}(R) = C_{\infty}(R) \oplus E_{\infty}(R)$$

où

$$C_{\infty}(R) = \varinjlim_r C_r(R)$$

$$E_{\infty}(R) = \varinjlim_r E_r(R)$$

où l'on note

$$C_r(R) = C_r(R)/\mathcal{C}_r(\bar{\mathbb{Q}}_p) \quad \text{et} \quad E_r(R) = E_r(R)/\mathcal{O}_r(\bar{\mathbb{Q}}_p).$$

Preuve. — Soit  $r \geq 1$  fixé. Le groupe  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  opère sur  $J_{r, p}(R)$ . Pour  $k_r = \mathbb{Q}(\zeta_{p^r})$ , le groupe de décomposition en  $p$  associé au plongement fixé de  $\bar{\mathbb{Q}}$  dans  $\mathbb{C}_p$  noté  $D_p(\bar{\mathbb{Q}}/k_r)$  opère sur  $E_r(R)$ ,  $J_{r, p}(R)$  et  $C_r(R)$ . Mais en fait, comme  $J_r$  est défini sur  $\mathbb{Q}$  (donc sur  $\mathbb{Q}_p$ ), le groupe  $D_p(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  opère sur  $C_r(R)$ ,  $J_r(R)$ ,  $E_r(R)$ .

Soit  $I_p(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  le sous-groupe d'inertie de  $D_p(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . Introduisons alors le caractère cyclotomique :  $\kappa : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$  donnant l'action de Galois sur les racines  $p$ -primaires de l'unité.

LEMME 4.1. — Soient  $r$  et  $m$  deux entiers  $\geq 1$ . L'accouplement

$$(\ , \ )_{r, m} : J_r(R)[p^m] \times J_r(R)[p^m] \rightarrow \mu_{p^m}$$

donné par

$$(x, y)_{r, m} = \langle x, y | w_{M_r} \rangle_r$$

(où  $\langle \ , \ \rangle_r$  désigne l'accouplement de Weil de  $J_{r, \mathbb{Q}}$ ) est parfait et satisfait les formules :

(i) Si  $T \in R$ , et  $x, y \in J_r(R)[p^m]$  :

$$(Tx, y)_{r, m} = (x, Ty)_{r, m}$$

(ii) Si  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ,  $x, y \in J_r(R)[p^m]$

$$(x^\sigma, y^\sigma) = \langle \kappa(\sigma) \rangle_{r, \text{Alb}} \cdot (x, y)_{r, m}^\sigma.$$

En outre, il fournit un isomorphisme de  $R_r$ -modules

$$\Phi_{r,m}: C_r(R)[p^m] \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(E_r(R)[p^m], \mu_{p^m}) \\ x \mapsto (-, x)_{r,m}.$$

COROLLAIRE 4.2. — Les actions de  $I_p(\tilde{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  sur  $E_r(R)$  et  $C_r(R)$  sont données respectivement par les caractères

$$\langle \kappa \rangle_{r, \text{Alb}} = \omega^{-a} \times \ll \gg_{r, \text{Alb}} \quad \text{où} \quad x = \omega(x) \times \langle x \rangle$$

dans  $Z_p^\times = \mu^{p-1} \times (1 + pZ_p)$  et  $\kappa$ .

Preuve du lemme 4.1. :

(i) se démontre comme dans 2.1 grâce à  $T_{\text{Alb}} = w_{M_r} \circ T_{\text{Pic}} \circ w_{M_r}$ .

(ii) provient de l'équivariance sous Galois de l'accouplement de Weil non tordu :

$$\langle x, y \rangle_r^\sigma = \langle x^\sigma, y^\sigma \rangle_r$$

et de la formule  $w_{M_r}^\sigma = \langle \kappa(\sigma) \rangle_{r, \text{Alb}} \circ w_{M_r}$  déjà notée.

On observe alors que si l'on passe aux duals de Cartier dans le dévissage connexe-étale :

$$0 \rightarrow C_r(R)/\mathcal{C}_r \rightarrow J_r(R)/\mathcal{C}_r \rightarrow E_r(R)/\mathcal{C}_r \rightarrow 0$$

i.e.

$$0 \rightarrow E_r(R)'/\mathcal{C}_r \rightarrow J_r(R)'/\mathcal{C}_r \rightarrow C_r(R)'/\mathcal{C}_r \rightarrow 0$$

on obtient le dévissage connexe-étale de  $J_r(R)'/\mathcal{C}_r$  parce qu'on a vu que  $J_r(R)/\mathcal{C}_r$  est ordinaire. En outre, l'autodualité naturelle

$$J_{r,\mathbf{Q}} \xrightarrow{\sim} \text{Pic}^0(J_r)/\mathbf{Q}$$

induit une isogénie sur  $\mathbf{Q}(\zeta_{M_r})$ , composée des flèches :

$$A_r \xrightarrow{w_{M_r}} w_{M_r}(A_r) \rightarrow J_r \xrightarrow{\sim} \text{Pic}^0(J_r) \rightarrow \text{Pic}^0 A_r$$

où la dernière flèche est l'image par  $\text{Pic}^0$  de l'inclusion  $A_r \rightarrow J_r$ . Ceci résulte de la proposition 2.1 car  $\text{Pic}^0(A_r)$  est isogène à  $B_r$  (égalité des espaces tangents). Or si on prend les groupes  $p$ -divisibles sur  $\mathcal{C}_{M_r}$  correspondant,



on obtient un morphisme surjectif, plat et fini :

$$A_r[p^\infty]/\mathcal{C}_{M_r} \xrightarrow{i_r} \text{Pic}^0(A_r)[p^\infty]/\mathcal{C}_{M_r}$$

tel que si  $T \in h_r$ ,

$$i_r \circ T = T^* \circ i_r$$

et on peut identifier le dual de Cartier  $A_r[p^\infty]/\mathcal{C}_{M_r}$  avec  $\text{Pic}^0(A_r)[p^\infty]/\mathcal{C}_{M_r}$  de sorte que si  $T \in h_r$ ,  $T$  devienne  $T^*$  on applique alors l'idempotent  $1_{R(A_r)}$  pour obtenir

$$i_r: J_{r,p}(R)/\mathcal{C}_{M_r} \rightarrow J_{r,p}(R)'/\mathcal{C}_{M_r} = 1_R.$$

et  $i_r: T = T' \circ i_r$ .

Ce morphisme de groupes  $p$ -divisibles a son noyau fini et plat qui est nul sur la fibre générique par autodualité de  $J_r$ . On conclut donc que  $i_r$  est un isomorphisme de schémas en groupes  $p$ -divisibles et il induit l'isomorphisme annoncé

$$C_r(R)/\mathcal{C}_r \xrightarrow{i_r} E_r(R)'/\mathcal{C}_r.$$

Sur les  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -points c'est le contenu de l'énoncé.

*Preuve du corollaire 4.2.* — L'action du groupe d'inertie  $I_p = I_p(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  a déjà été calculée sur  $E_r(R)$  car  $E_r(R)/\mathcal{C}_r$  étant étale, l'action de  $I_p$  se factorise à travers  $I$  qui agit par  $\langle \kappa \rangle_{r, \text{Alb}}$  d'après (4.1). Pour  $x$  dans  $C_r(R)[p^m]$ , on calcule  $\Phi_{r,m}(x^\sigma)$  :

Pour tout  $y$  de  $E_r(R)[p^m]$ , on a :

$$\begin{aligned} (y, x^\sigma)_{r,m} &= ((y^{\sigma^{-1}})^\sigma, x^\sigma)_{r,m} \\ &= (\langle \kappa(\sigma) \rangle_{r, \text{Alb}}, y^{\sigma^{-1}}, x)_{r,m}^\sigma \\ &= (\kappa(\sigma) \times \langle \kappa(\sigma) \rangle_{r, \text{Alb}}, y^{\sigma^{-1}}, x)_{r,m} \end{aligned}$$

or  $y^{\sigma^{-1}} = \langle \kappa(\sigma^{-1}) \rangle_{r, \text{Alb}} \cdot y$  puisque  $y \in E_r(R)[p^m]$ .

On conclut donc :

$$\begin{aligned} (y, x^\sigma)_{r,m} &= (y, \kappa(\sigma) x)_{r,m} \\ \text{i. e. } \Phi_{r,m}(x^\sigma) &= \Phi_{r,m}(\kappa(\sigma) x). \end{aligned}$$

Ainsi  $x^\sigma = \kappa(\sigma)x$ .

Soit alors  $\sigma$  un générateur de  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^r N})/\mathbb{Q}_\infty(\zeta_N))$  où  $\mathbb{Q}_\infty$  est la  $\mathbb{Z}_p$ -extension de  $\mathbb{Q}$ . Dans l'isomorphisme naturel :

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^r N})/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} G_\infty = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \times \Gamma$$

on demande donc que l'image de  $\sigma$  soit  $(u, 1, 1)$  où  $u$  engendre  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ . On note encore  $\sigma$  un relèvement de  $\sigma$  à  $I_p$ . L'action de  $\sigma$  sur  $E_r(R)$  est via  $\omega^{-a}(u)$  et sur  $C_r(R)$ , via  $\omega(u)$ . Soit  $\zeta = \omega(u) \in \mu_{p-1}^{\text{prim}}$ . C'est alors que l'hypothèse  $a \neq -1$  est utilisée :

LEMME 4.3. — (i) On a le scindage de  $R_r$ -modules :

$$J_{r,p}(R) = \text{Ker}(\sigma - \zeta)^{p^r} \oplus \text{Ker}(\sigma - \zeta^{-a})^{p^r}$$

où  $\text{Ker}(\sigma - \zeta)^{p^r} = C_r(R)$

et  $\text{Ker}(\sigma - \zeta^{-a})^{p^r}$  est isomorphe à  $E_r(R)$  par la projection naturelle

$$J_r(R) \xrightarrow{j} E_r(R).$$

(ii) Ceci reste valide pour  $J_\infty(R)$  :

$$J_\infty(R) \simeq C_\infty(R) \oplus E_\infty(R)$$

comme  $R$ -modules.

Preuve. — Pour  $r, m$  fixés  $\geq 1$ , il existe  $t_{r,m} \geq 1$  tel que si  $t \geq t_{r,m}$  on ait

$$(\sigma - \zeta)^{p^t} (\sigma - \zeta^{-a})^{p^t} J_r(R)[p^m] = 0.$$

En effet, par le théorème de Hamilton Cayley, et parce que  $\zeta \neq \zeta^{-a}$ , on a :  $(\sigma - \zeta)(\sigma - \zeta^{-a}) = 0$  comme endomorphisme de  $J_r(R)[p^m] \otimes_{R_r} (R_{r/\text{rad}(R_r)})$  et le module  $J_r(R)[p^m]$  est artinien sur  $R_r$ .

Mais, d'autre part, il existe évidemment des polynômes  $u_i(X)$  et  $v_i(X)$  dans  $\mathbb{Z}_p[X]$  tels que

$$u_i(\sigma)(\sigma - \zeta)^{p^i} + v_i(\sigma)(\sigma - \zeta^{-a})^{p^i} = 1$$

donc

$$J_r(R)[p^m] = \text{Ker}(\sigma - \zeta)^{p^m} \oplus \text{Ker}(\sigma - \zeta^{-a})^{p^m}$$

donc

$$C_r(R)[p^m] = \text{Ker}(\sigma - \zeta)^{p^m}$$

et

$$E_r(R)[p^m] \xrightarrow{j} \text{Ker}(\sigma - \zeta^{-a})^{p^m}.$$

(ii) Comme  $\sigma$  ne dépend ni de  $m$ , ni de  $r$ , on peut passer à la limite en  $r$  et  $m$  pour obtenir l'énoncé.

**THÉORÈME 4.4.** — *Pour chaque  $r \geq 1$ , on a des isomorphismes de  $R_r$ -modules :*

$$C_r(R) \xrightarrow{\sim} R_r \otimes \Pi_p \quad (\Pi_p = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

$$E_r(R) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(R_r, \Pi_p)$$

$$J_{r,p}(R) \xrightarrow{\sim} (R_r \otimes \Pi_p) \oplus \text{Hom}(R_r, \Pi_p).$$

*Ces isomorphismes sont compatibles avec les revêtements  $X_r \rightarrow X_s$  et on a à la limite*

$$J_{\infty,p}(R) \xrightarrow{\sim} R \otimes_{\Lambda} \text{Hom}(\Lambda, \Pi_p) \oplus \text{Hom}(R, \Pi_p)$$

*Preuve.* — Soit  $\Gamma_r = 1 + Np^r \mathbb{Z}_p \subset G_{\infty} \subset h^0$ . On utilise le théorème 3.1 de [7] qui affirme que  $J_{\infty}(R)^{\Gamma_r} = J_r(R)$  (les applications de transition  $J_s(R) \rightarrow J_r(R)$  si  $r > s$ , étant toutes injectives). Comme on a démontré au lemme 4.2 que l'on a les scindages compatibles de  $R$ -modules :

$$J_r(R) = C_r(R) \oplus E_r(R)$$

$$J_{\infty}(R) = C_{\infty}(R) \oplus E_{\infty}(R)$$

on voit que

$$\begin{cases} C_r(R) = C_{\infty}(R)^{\Gamma_r} \\ E_r(R) = E_{\infty}(R)^{\Gamma_r} \end{cases}$$

On passe alors aux duals de Pontryagin (où  $M^*$  est le dual de Pontryagin du groupe  $p$ -profini ou  $p$ -divisible  $M$ ) comme dans la preuve du théorème 9.3 de [7] :

Si

$$\omega_r = \gamma^{p^r} - 1, \quad \gamma = \langle 1 + Np \rangle,$$

on a

$$\begin{aligned} C_\infty(R)^*/\omega_r C_\infty(R)^* &\simeq C_r(R)^* \\ E_\infty(R)^*/\omega_r E_\infty(R)^* &\simeq E_r(R)^*. \end{aligned}$$

On applique alors la proposition 3.1 de [5] qui donne la structure de  $C_1(R)$  et  $E_1(R)$  sur  $R_1$ :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} C_1(R) \simeq R_1 \otimes \Pi_p \\ E_1(R) \simeq \text{Hom}(R_1, \Pi_p). \end{cases} \\ \text{i. e. } &\begin{cases} C_1(R)^* \simeq \text{Hom}(R_1, \mathbb{Z}_p) \\ E_1(R)^* \simeq R_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Par le lemme de Nakayama, on tire de cela des morphismes surjectifs de  $R$ -modules:

$$(4.4.1) \quad \begin{cases} R \rightarrow E_\infty(R)^* \\ R \rightarrow \text{Hom}(C_\infty(R)^*, \Lambda) \end{cases}$$

mais on connaît le rang des  $\Lambda$ -modules qui interviennent ici: D'abord, d'après le théorème 3.1 de [7], on sait que  $R$  et  $J_\infty(R)^*$  sont libres du type fini sur  $\Lambda$  et que

$$\text{rang}_\Lambda J_\infty(R)^* = 2 \cdot \text{rang}_\Lambda R.$$

D'autre part, un corollaire évident de la dernière assertion du lemme 4.1 est que

$$\text{rang}_\Lambda E_\infty(R)^* = \text{rang}_\Lambda C_\infty(R)^*.$$

$$\text{Donc } \text{rang}_\Lambda R = \text{rang}_\Lambda E_\infty(R)^* = \text{rang}_\Lambda C_\infty(R)^*.$$

Les morphismes de 4.4.1 sont donc des isomorphismes. En reprenant les duals de Pontryagin, on obtient la structure de  $J_\infty(R)$  et  $E_\infty(R)$ . D'où clairement:

$$E_r(R) \simeq \text{Hom}(R_r, \Pi_p).$$

Pour  $C_r(R)$  on utilise la remarque.

*Remarque.* — Soit  $\Lambda_r = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \cdot (\omega_r) \simeq \mathbb{Z}_p[T]/(T^{p^r} - 1)$ .

L'application de trace  $\text{Tr}: \Lambda_r \rightarrow \mathbb{Z}_p$  permet de définir un isomorphisme de  $R_r$ -modules :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{R_r}(R_r, \Lambda_r) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(R_r, \mathbb{Z}_p) \\ f &\mapsto \frac{1}{p^r} \times \text{Tr} \circ f. \end{aligned}$$

De ceci, il résulte bien que

$$C_r(R)^* \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(R_r, \mathbb{Z}_p).$$

*Remarque.* — La détermination de la structure de  $C_1(R)$  et  $E_1(R)$  utilise l'application de Cartier  $\text{Pic}^0(C_1^\infty) \xrightarrow{\delta} \mathbb{F}_p[[q]]$  (où  $C_1^\infty$  est la composante privilégiée de  $\text{Pic}^0(N)$  comme au paragraphe 3) mais cet ingrédient est beaucoup plus difficile à utiliser pour  $r > 1$ , car l'isogénie  $A_r \rightarrow B_r$  n'est plus un isomorphisme sur la fibre spéciale. Il y a donc un noyau inconnu pour la flèche  $\tilde{A}_r[p](\bar{\mathbb{F}}_p) \rightarrow \mathbb{F}_p[[q]]$ .

## 5. Un critère pour que $R$ soit de Gorenstein

Rappelons d'abord la :

**DÉFINITION 5.1.** — Soit  $R$  un anneau local nœtherien de dimension de Krull  $n$ .

Soit  $\mathfrak{m}$  (resp.  $k$ ) son idéal maximal (resp. son corps résiduel). On dit que  $R$  est de Gorenstein si

(i)  $R$  est de Cohen-Macaulay i.e.  $\text{Ext}_R^i(k, R) = 0$  pour  $i = 0, \dots, n-1$  et  $\text{Ext}_R^n(k, R) \neq 0$ .

(ii)  $\dim_k \text{Ext}_R^n(k, R) = 1$ .

On a les propriétés :

**PROPOSITION 5.2.** — (i) Soit  $R$  local nœtherien et  $p \in R$  ne divisant pas 0, alors  $R$  est de Gorenstein de dimension  $n$  si et seulement si  $R/pR$  est de Gorenstein de dimension  $n-1$ .

(ii) Si  $R$  est artinien à corps résiduel fini,  $R$  est de Gorenstein de dimension 0 si et seulement si son dual de Pontryagin est un  $R$ -module libre (de rang 1).

(iii) Si  $R$  est une  $\mathbb{Z}_p$ -algèbre finie et plate  $R$  est de Gorenstein (de dimension 1) si et seulement si  $\text{Hom}(R, \mathbb{Z}_p)$  est un  $R$ -module libre.

*Preuve.* — Pour (i), voir [11], page 104.

Pour (ii), voir [14], proposition 4, page 328.

(iii) résulte facilement de (ii) : si  $R$  est  $\mathbb{Z}_p$ -finie et plate, alors  $p$  ne divise pas 0 et  $R/pR$  est de dimension 0. De plus, son dual de Pontryagin coïncide avec son dual  $\mathbb{F}_p$ -linéaire, c'est-à-dire la réduction modulo  $p$  de  $\text{Hom}(R, \mathbb{Z}_p)$ .

Considérons maintenant une composante locale  $R$  de  $h^0(a)$ ,  $a \neq 0, -1$ . C'est un anneau local noëtherien de dimension 2. Soient  $\omega_r = (1+X)^{p^r-1} - 1$ , pour chaque  $r \geq 1$ , les polynômes d'Iwasawa. Comme  $R$  est finie et plate sur  $\Lambda$ , chacune des suites  $(\omega_r, p)$  est  $m$ -régulière dans  $R$ . Soit  $R_r = R/\omega_r R$  d'idéal maximal  $\mathfrak{m}_r$ , et  $\bar{R}_r = R_r/pR_r$  d'idéal maximal  $\bar{\mathfrak{m}}_r$ . Grâce aux propriétés énoncées dans 5.2, on obtient aisément le :

LEMME 5.3. — Il y a équivalence entre les assertions :

- (i)  $R$  est de Gorenstein de dimension 2.
- (ii)  $R_r$  est de Gorenstein de dimension 1 pour chaque  $r \geq 1$ .
- (iii)  $R_1$  est de Gorenstein (de dimension 1).

On rappelle alors un critère dû à MAZUR [12] (lemme 15.1).

PROPOSITION 5.4. — Si  $J_1(R)[\mathfrak{m}_1]$  est de dimension 2 sur le corps résiduel de  $R_1$ , alors  $R_1$  est de Gorenstein.

Ainsi à l'aide de ce critère, pour savoir si une composante  $R$  est de Gorenstein, il faut étudier l'espace vectoriel sur  $k = R/\mathfrak{m}$

$$W = J_1(R)[\mathfrak{m}_1].$$

L'outil pour cela est la notion de représentation résiduelle de [15], § 10, particularisée ici en la :

DÉFINITION 5.5. — Une représentation

$$\bar{\rho}: \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}(V)$$

est dite  $m$ -résiduelle si elle est de degré 2 sur  $k$ , est non ramifiée hors de  $Np$ , et si le polynôme caractéristique d'un Frobenius en  $l \nmid Np$  est  $X^2 - T(l)X + l \langle l \rangle$  modulo  $m$ .

Le critère s'énonce alors :

PROPOSITION 5.6. — *Pour que  $R$  soit de Gorenstein, il suffit qu'il existe une représentation  $m$ -résiduelle irréductible.*

*Preuve.* — On utilise l'hypothèse qu'il existe une représentation  $m$ -résiduelle irréductible :

Sous-LEMME 5.7 ([22], proposition 4.1). — *Soit  $G$  un groupe. Soient  $V$  un  $kG$ -module irréductible et  $W$  un  $kG$ -module tel que pour tout  $\sigma$  de  $G$ , on ait  $P_{\sigma_V}(\sigma_W) = 0$  (où  $P_{\sigma_V}(X)$  est le polynôme caractéristique de l'élément  $\sigma_V \in GL(V)$  déduit de  $\sigma$ , et  $\sigma_W \in GL(W)$  est déduit de même de  $\sigma$ ) alors tous les quotients d'une suite de Jordan-Hölder de  $W$  sont isomorphes à  $V$ .*

*Preuve :* Soit  $\hat{W}$  la représentation contragrédiente de  $W$  et  $\hat{W}(\det \rho_V)$  sa tordue par le caractère de degré 1 déterminant de  $\rho_V : G \rightarrow GL(V)$ . Soit  $M = W \oplus \hat{W}(\det \rho_V)$  on voit facilement que le polynôme caractéristique de  $\sigma_M$  vaut  $P_{\sigma_V}^{\dim W}$ . Par conséquent, d'après le théorème de Brauer-Nesbitt, la semi-simplifiée  $M^{s.s.}$  de  $M$  est isomorphe à  $V^{\dim W}$  d'où l'on conclut que  $W^{s.s.}$  est isomorphe à une puissance de  $V$ .

Revenons alors à la démonstration de la proposition (5.6) on a :

$$J_1(R) = R_1 \otimes \Pi_p \oplus \text{Hom}(R_1, \Pi_p) \quad (\text{cf. théorème (4.4)}),$$

donc

$$J_1(R)[p] = \bar{R}_1 \oplus \text{Hom}(\bar{R}_1, F_p)$$

où  $\bar{R}_1$  et  $\text{Hom}(\bar{R}_1, F_p)$  sont des modules indécomposables au sens de [3], paragraphe 14, sur l'anneau artinien  $\bar{R}_1$ .

D'autre part, l'action de la conjugaison complexe se diagonalise en :

$$J_1(R)[p] = J_1(R)[p]^+ \oplus J_1(R)[p]^-$$

où

$$J_1(R)[p]^{\pm} = \{x \in J_1(R)[p]; c(x) = \pm x\}.$$

D'après le théorème de Krull-Schmidt (cf. [3], § 14) on voit que

$$J_1(R)[p]^{\pm} \simeq \bar{R}_1 \quad \text{et} \quad J_1(R)^{\mp} \simeq \text{Hom}(\bar{R}_1, F_p)$$

comme  $R_1$ -modules. On prend alors les parties de  $m_1$ -torsion :

$$J_1(R)[m_1]^{\pm} \simeq \bar{R}_1[\bar{m}_1]$$

$$J_1(R)[m_1]^{\mp} \simeq \text{Hom}(k, F_p) \simeq k.$$

Notons que la propriété de Gorenstein équivaut à ce que  $\bar{R}_1[\bar{m}_1] \simeq k$  mais que sans hypothèses, on a :

$$\text{Hom}(\bar{R}_1, F_p)[m_1] \simeq k.$$

Or, en approximant la conjugaison complexe  $c$  par un Frobenius  $F_l$  où  $l \equiv -1 \pmod{Np}$ , on voit que son polynôme caractéristique sur  $V$  est du type  $X^2 - aX - 1$  (i.e.  $l \langle l \rangle \equiv -1 \pmod{m}$ ) et  $-1 \not\equiv 1 \pmod{p}$ , donc la conjugaison complexe n'agit pas par homothétie sur  $V$  :

$$V = V^+ \oplus V^- \quad \text{avec} \quad \dim V^\pm = 1.$$

On voit donc grâce au sous-lemme précédent que

$$\dim_k J^+(R)[m] = \dim J(\bar{R})[m]$$

et donc, que  $\bar{R}_1[\bar{m}_1]$  est de dimension 1 sur  $k$ , donc que  $W$  est de dimension 2 sur  $k$ .

On peut par exemple appliquer ce critère à une composante locale  $R$  « de type C.M. » au sens de [7], proposition 2.3. On obtient une représentation  $m$ -résiduelle irréductible en considérant un Grössencharakter de type (1.0) au corps quadratique imaginaire  $K$  associé, de conducteur  $c_p$  (où  $N = |\text{disc}(K)| \cdot Nc$ ) et en induisant de  $K$  à  $\mathbb{Q}$ . Ce qui redémontre le fait (cf. HIDA, Séminaire de Théorie des Nombres de Paris, Exposé, 1985) qu'une composante locale « de type C.M. » est de Gorenstein.

Nous reviendrons dans un prochain article sur ces composantes et leur lien avec l'arithmétique de la  $\mathbb{Z}_p$ -extension anticyclotomique de  $K$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ASAI (T.). — On the Fourier coefficients of automorphic forms at various cusps and some applications to Rankin's convolution. *J. Math. Soc. Japan*, t. 28, 1976, p. 48-61.
- [2] ATKIN (A. O. L.) and LEHNER (J.). — Hecke operators on  $\Gamma_0(m)$ . *Math. Ann.*, t. 185, 1970, p. 134-160.
- [3] CURTIS (C.) and REINER (I.). — *Representation Theory of finite groups and associative algebras*, Interscience Publishers John Wiley & Sons, 1966.
- [4] HIDA (H.). — On congruence divisors of cusp forms as factors of the special values of their zeta functions. *Invent. Math.*, t. 64, 1981, p. 221-262.
- [5] HIDA (H.). — Kummer's criterion for the special values of Hecke L-functions of imaginary quadratic fields and congruences among cusp forms. *Inv. Math.*, t. 66, 1982, p. 415-459.



- [6] HIDA (H.). — Iwasawa modules attached to congruences among cusp forms, *Ann. Scient. de l'E.N.S.* (à paraître).
- [7] HIDA (H.). — Galois Representations into  $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$  attached to ordinary cusp forms, *Inv. Math.* (à paraître).
- [8] IGUSA (J.). — Kroneckerian model of fields of elliptic modular functions, *Amer. J. Math.*, t. 81, 1968, p. 561-577.
- [9] LANGLANDS (R.-P.). — Modular forms and  $l$ -adic representations (International Summer School on Modular Functions, Antwerp, 1972). Modular Functions in one variable II, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 349, p. 361-500, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1973.
- [10] LI (W.). — Newforms and functional equations, *Math. Ann.*, t. 212, 1975, p. 285-315.
- [11] MATSUMURA (H.). — *Commutative Algebra*, W. A. Benjamin, Inc. 1970.
- [12] MAZUR (B.). — Modular Curves and the Eisenstein Ideal. *Publ. Math. I.H.E.S.* 47, 1978.
- [13] MAZUR (B.) and KATZ (N.). — Arithmetic moduli of elliptic curves, *Annals of Math. Studies*, Number 108. Princeton University Press., 1985.
- [14] MAZUR (B.) and WILES (A.). — Class fields of abelian extensions of  $\mathbb{Q}$ , *Inv. Math.*, t. 76, 1984, p. 179-330.
- [15] MAZUR (B.) and WILES (A.). — On  $p$ -adic analytic families of Galois Representations (To appear).
- [16] MUMFORD (D.). — Geometric invariant theory, *Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete*, 36, Springer-Verlag, 1965.
- [17] OGG (A.). — On the eigenvalues of Hecke operators, *Math. Ann.*, t. 79, 1969, p. 101-108.
- [18] RAYNAUD (M.). — Spécialisation du Foncteur de Picard, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 38, 1970, p. 27-76.
- [19] SHIMURA (G.). — *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Iwanami Shoten Publishers and Princeton University Press., 1971.
- [20] SHIMURA (G.). — Class fields over real quadratic fields and Hecke operators. *Ann. of Math.*, t. 295, 1970, p. 130-190.
- [21] TATE (J.). —  $p$ -divisible Groups, *Proceedings of a Conference on Local Fields*, Driebergen, 1966, Springer-Verlag, 1967.
- [22] WILES (A.). — Modular Curves and the Class Group of  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ , *Inv. Math.*, 58, 1980, p. 1-35.