

BULLETIN DE LA S. M. F.

SERGE OCHANINE

Modules de SU-bordisme. Applications

Bulletin de la S. M. F., tome 115 (1987), p. 257-289

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115_257_0

© Bulletin de la S. M. F., 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODULES DE SU-BORDISME. APPLICATIONS

PAR

SERGE OCHANINE (*)

RÉSUMÉ. — Les techniques développées dans les deux articles précédents ([7], [8]), sont appliquées d'une part à l'étude de la transformation naturelle

$$\Omega_*^{\text{SU}}(X) \otimes_{\Omega_*^{\text{SU}}} K_*^{\mathbb{R}} \rightarrow K_*^{\mathbb{R}}(X)$$

et d'autre part, à l'étude des suites régulières dans les modules de SU-bordisme de complexes finis.

ABSTRACT. — The Conner-Floyd style transformation

$$\Omega_*^{\text{SU}}(X) \otimes_{\Omega_*^{\text{SU}}} K_*^{\mathbb{R}} \rightarrow K_*^{\mathbb{R}}(X)$$

and the regular sequences in SU-bordism modules of finite complexes are studied by means of the techniques introduced in the previous articles ([7], [8]).

Cet article est consacré à quelques applications des résultats obtenus dans [7] et [8].

Dans le paragraphe 1, on construit un couple exact $\mathcal{X}(X)$ dans la K -théorie, analogue au couple $\mathcal{S}(X)$ de I.1.1 ⁽¹⁾, et un morphisme surjectif

$$\zeta: \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{X}(X),$$

puis on applique les constructions de [7] et [8] à la solution du problème suivant: dans quelle mesure le SU-bordisme $\Omega_*^{\text{SU}}(X)$ d'un complexe cellulaire fini X détermine la K -théorie réelle $K_*^{\mathbb{R}}(X)$ de X ? On démontre que contrairement à ce qui se passe pour le Sp-bordisme (cf. [3]), la transformation naturelle $\Omega_*^{\text{SU}}(X) \rightarrow K_*^{\mathbb{R}}(X)$ construite par Conner et Floyd, n'induit

(*) Texte reçu le 26 novembre 1984, révisé le 9 janvier 1987.

Serge OCHANINE, L.P. n° 13 du C.N.R.S., « Topologie différentielle, Université Paris-Sud, Mathématiques, Bât. n° 425, 91405 Orsay Cedex.

⁽¹⁾ « I. m. n » et « II. m. n » renvoient au numéro m. n de [7] et [8] respectivement.

pas, en général, un isomorphisme

$$\Omega_*^{SU}(X) \otimes_{\Omega^{SU}} K_*^{\mathbb{R}}(\text{pt}) \cong K_*^{\mathbb{R}}(X).$$

Cependant, elle induit toujours un isomorphisme

$$\iota \Omega_*^{SU}(X) \otimes_{\Omega^{SU}} K_*^{\mathbb{R}}(\text{pt}) \cong \iota K_*^{\mathbb{R}}(X),$$

où ι désigne le générateur de Ω_1^{SU} (théorème 1.8).

Dans le paragraphe 2, on étudie les suites régulières dans le Ω^{SU} -module D extrait d'un couple exact cohérent $\mathcal{D} = (D, E, j, \partial)$. On démontre en particulier que, si $\mathcal{D} \neq 0$, le Ω^{SU} -module D est de profondeur infinie. Ces résultats sont ensuite appliqués à la construction de couples exacts cohérents de dimension homologique donnée.

Je remercie chaleureusement Lionel Schwartz dont les remarques pertinentes m'ont permis d'améliorer plusieurs démonstrations.

1. Relations avec la K -théorie

1.1. Les K -théories réelle, complexe et quaternionnienne seront désignées respectivement par $K_{\mathbb{R}}^*(\quad)$, $K_{\mathbb{C}}^*(\quad)$ et $K_{\mathbb{H}}^*(\quad)$. Comme nous aurons à les utiliser simultanément, les trois théories seront considérées comme $\mathbb{Z}/8$ -graduées. A cette fin, on pose :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mathbb{R}}^{8*-i}(X) &= \tilde{R}_{\mathbb{R}}(S^i X) \quad (n \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq 7) \\ \tilde{R}_{\mathbb{C}}^{8*-i}(X) &= \tilde{R}_{\mathbb{C}}(S^i X) \\ \tilde{R}_{\mathbb{H}}^{8*-i}(X) &= \tilde{R}_{\mathbb{H}}(S^i X), \end{aligned}$$

et il suffira, pour obtenir des théories $\mathbb{Z}/8$ -graduées, de choisir des générateurs pour la périodicité de Bott. Plusieurs approches sont possibles. On suivra celle de CONNER et FLOYD [3], chap. I.

Soit k l'un des corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. On désignera par $\gamma_n(k)$ le fibré en droites universel sur $P_n(k)$, i.e. le fibré en droites associé au k^* -fibré principal $k^{n+1} \setminus 0 \rightarrow P_n(k)$. C'est le fibré conjugué du fibré normal de $P_n(k)$ dans $P_{n+1}(k)$. Pour $k = \mathbb{C}, \mathbb{H}$, le nombre d'Euler de $\gamma_1(k)$ est -1 .

Soit ξ un $U(n)$ -fibré vectoriel complexe et soit $M(\xi)$ son espace de Thom. Conner et Floyd ont construit une classe de Thom multiplicative $T_{\mathbb{C}}(\xi) \in \tilde{R}_{\mathbb{C}}(M(\xi))$ telle que si ξ est le $U(1)$ -fibré $\gamma_n(\mathbb{C})$, on ait dans

$$M(\xi) = P_{n+1}(\mathbb{C}):$$

$$T_{\mathbb{C}}(\gamma_n(\mathbb{C})) = 1 - \gamma_{n+1}(\mathbb{C}).$$

En particulier,

$$T_{\mathbb{C}}(\gamma_0(\mathbb{C})) = 1 - \gamma_1(\mathbb{C}) \in \tilde{K}_{\mathbb{C}}(P_1(\mathbb{C})) = \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^2) = K_{\mathbb{C}}^{-2}(\text{pt})$$

est un générateur qu'on notera λ . On prendra pour générateur de périodicité de Bott modulo 8 l'élément $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda \otimes \lambda \in \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^8)$.

Soit maintenant ξ un $SU(4n+2)$ -fibré vectoriel complexe. Dans ce cas, on a une classe de Thom $T_{\mathbb{H}}(\xi) \in \tilde{K}_{\mathbb{H}}(M(\xi))$ telle que si ξ est le $SU(2)$ -fibré vectoriel $\gamma_n(\mathbb{H})$, on ait dans $M(\xi) = P_{n+1}(\mathbb{H})$:

$$T_{\mathbb{H}}(\gamma_n(\mathbb{H})) = 1 - \gamma_{n+1}(\mathbb{H}).$$

En particulier,

$$T_{\mathbb{H}}(\gamma_0(\mathbb{H})) = 1 - \gamma_1(\mathbb{H}) \in \tilde{K}_{\mathbb{H}}(P_1(\mathbb{H})) = \tilde{K}_{\mathbb{H}}(S^4) = K_{\mathbb{H}}^{-4}(\text{pt})$$

est un générateur qu'on notera ε et qu'on choisira pour générateur des périodicités:

$$\varepsilon \otimes_{\mathbb{H}}: \tilde{K}_{\mathbb{H}}^i(X) \rightarrow \tilde{K}_{\mathbb{H}}^{i-4}(X)$$

$$\varepsilon \otimes_{\mathbb{R}}: \tilde{K}_{\mathbb{R}}^i(X) \rightarrow \tilde{K}_{\mathbb{H}}^{i-4}(X).$$

Enfin, si ξ est un $SU(4n)$ -fibré vectoriel complexe, on a une classe de Thom $T_{\mathbb{R}}(\xi) \in \tilde{K}_{\mathbb{R}}(M(\xi))$.

Les classes $T_{\mathbb{H}}$ et $T_{\mathbb{R}}$ ont les propriétés de multiplicativité suivantes:

$$T_{\mathbb{R}}(\xi \times \eta) = T_{\mathbb{H}}(\xi) \otimes_{\mathbb{H}} T_{\mathbb{H}}(\eta),$$

si ξ est un $SU(4n+2)$ -fibré et η un $SU(4m+2)$ -fibré;

$$T_{\mathbb{H}}(\xi \times \eta) = T_{\mathbb{H}}(\xi) \otimes_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R}}(\eta),$$

si ξ est un $SU(4n+2)$ -fibré et η un $SU(4m)$ -fibré;

$$T_{\mathbb{R}}(\xi \times \eta) = T_{\mathbb{R}}(\xi) \otimes_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R}}(\eta)$$

si ξ est un $SU(4n)$ -fibré et η un $SU(4m)$ -fibré.

De plus, si $c: \mathcal{K}_{\mathbf{H}}(\) \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbf{C}}(\)$ et $j: K_{\mathbf{R}}(\) \rightarrow K_{\mathbf{C}}(\)$ désignent respectivement les morphismes d'oubli et de complexification, on a :

$$c T_{\mathbf{H}}(\xi) = T_{\mathbf{C}}(\xi) \text{ pour un } SU(4n+2)\text{-fibré } \xi,$$

et

$$j T_{\mathbf{R}}(\xi) = T_{\mathbf{C}}(\xi) \text{ pour un } SU(4n)\text{-fibré } \xi.$$

Pour décrire les anneaux $K_{\mathbf{R}}^* = K_{\mathbf{R}}^*(\text{pt})$ et $K_{\mathbf{C}}^* = K_{\mathbf{C}}^*(\text{pt})$, considérons les éléments :

$$t = 1 - \gamma_1(\mathbb{R}) \in K_{\mathbf{R}}(P_1(\mathbb{R})) = \tilde{K}_{\mathbf{R}}(S^1) = K_{\mathbf{R}}^{-1}$$

et

$$\omega = rc(\varepsilon) \in K_{\mathbf{R}}^{-4},$$

où $r: K_{\mathbf{C}}(\) \rightarrow K_{\mathbf{R}}(\)$ est le morphisme d'oubli.

PROPOSITION (cf., par exemple, [4], III.5.19). — (1) L'anneau $K_{\mathbf{C}}^*$ est engendré par λ soumis à l'unique relation $\lambda^4 = 1$.

(2) L'anneau $K_{\mathbf{R}}^*$ est engendré par t et ω soumis aux seules relations $2t = t^3 = t\omega = 0$, $\omega^2 = 4$.

(3) Le morphisme multiplicatif $j: K_{\mathbf{R}}^* \rightarrow K_{\mathbf{C}}^*$ est déterminé par $j(t) = 0$, $j(\omega) = -2\lambda^2$.

(4) Le morphisme $r: K_{\mathbf{C}}^* \rightarrow K_{\mathbf{R}}^*$ est donné par $r(1) = 2$, $r(\lambda) = t^2$, $r(\lambda^2) = -\omega$, $r(\lambda^3) = 0$.

(5) On a $c(\varepsilon) = -\lambda^2$. $\square$

1.2. Considérons le diagramme $\mathcal{K}^*(X)$:

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbf{R}}^*(X) & \xrightarrow{i} & K_{\mathbf{C}}^*(X) \\ & \searrow c & \swarrow j \\ & K_{\mathbf{C}}^*(X) & \end{array}$$

où i est la multiplication par $t \in K_{\mathbf{R}}^{-1}$, j est le morphisme de complexification et c est le morphisme de degré $+2$ défini par :

$$c(e) = -r(\lambda^{-1}(e)) = -r(\lambda^3 e).$$

La suite

$$\dots \rightarrow K_{\mathbb{C}}^{i-1}(X) \xrightarrow{\partial} K_{\mathbb{R}}^{i+1}(X) \xrightarrow{i} K_{\mathbb{R}}^i(X) \xrightarrow{j} K_{\mathbb{C}}^i(X) \rightarrow \dots$$

coïncide, au signe de ∂ près, avec la suite exacte de BOTZ ([1], cf. [4], III.5.18). Donc $\mathcal{K}^*(X)$ est un couple exact. Ce couple possède des propriétés formelles analogues à celles de $\mathcal{S}(X)$ (cf. I.1.1, I.1.10). On a, par exemple,

$$\partial(j(s) \cdot e) = s \cdot \partial e \quad (s \in K_{\mathbb{R}}^*(X), e \in K_{\mathbb{C}}^*(X)),$$

conséquence de l'associativité des produits tensoriels.

Soit $e \mapsto \bar{e}$ le morphisme de conjugaison dans $K_{\mathbb{C}}(X)$.

LEMME. — On a dans $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^2)$: $\bar{\lambda} = -\lambda$.

Démonstration. — On a $\lambda = 1 - \gamma_1(\mathbb{C})$ et $\lambda^2 = 0$ dans l'anneau $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^2)$ (à ne pas confondre avec le carré de $\lambda \in \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^2) = K_{\mathbb{C}}^{-2}(\text{pt})$ dans l'anneau $K_{\mathbb{C}}^*$). Donc $\gamma_1(\mathbb{C}) = 1 - \lambda$, et comme $\gamma_1(\mathbb{C}) \otimes \overline{\gamma_1(\mathbb{C})} = 1$, on a :

$$\overline{\gamma_1(\mathbb{C})} = 1/(1 - \lambda) = 1 + \lambda,$$

donc $\bar{\lambda} = 1 - \overline{\gamma_1(\mathbb{C})} = -\lambda$. $\square$

PROPOSITION. — Si $d = j \hat{c}$ est la différentielle du couple $\mathcal{K}^*(X)$, on a :

- (1) $de = \lambda^{-1}(\bar{e} - e)$ ($e \in K_{\mathbb{C}}^*(X)$)
- (2) $d(e_1 \cdot e_2) = de_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot de_2$ ($e_1, e_2 \in K_{\mathbb{C}}^*(X)$).

Démonstration :

$$(1) \quad de = -jr(\lambda^3 e) = -(\lambda^3 e + \overline{\lambda^3 e}) = -(\lambda^3 e - \lambda^3 \bar{e}) = \lambda^{-1}(\bar{e} - e).$$

$$(2) \quad \lambda d(e_1 \cdot e_2) = \overline{e_1 e_2} - e_1 e_2$$

$$= (\bar{e}_1 - e_1)e_2 + \bar{e}_1(\bar{e}_2 - e_2) = \lambda(de_1 \cdot e_2 + \bar{e}_1 \cdot de_2). \quad \square$$

Remarquons que (1) entraîne $\bar{e} = e + \lambda de$, formule analogue à la formule de conjugaison dans $W_*(X)$ (cf. I.1.2).

1.3. Considérons le couple $\mathcal{S}^*(X)$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\text{SU}}^*(X) & \xrightarrow{i} & \Omega_{\text{SU}}^*(X) \\ & \searrow \delta \quad \swarrow j & \\ & W^*(X) & \end{array}$$

dual du couple exact de I. 1. 1. Nous allons définir, à l'aide des résultats de CONNER et FLOYD [3], un morphisme surjectif:

$$\zeta: \mathcal{S}^*(X) \rightarrow \mathcal{K}^*(X) \quad (2)$$

La classe de Thom $T_{\mathbf{R}}$ définit un morphisme multiplicatif

$$\zeta_{\mathbf{R}}: \Omega_{\text{SU}}^*(X) \rightarrow K_{\mathbf{R}}^*(X)$$

de la manière suivante: si $f: S^{8n-i} X_+ \rightarrow MSU_{4n}$ représente un élément $m \in \Omega_{\text{SU}}^i(X)$, $\zeta_{\mathbf{R}}(m)$ est l'image de $T_{\mathbf{R}}(\tilde{\gamma}_{4n})$ par:

$$f^*: \tilde{K}_{\mathbf{R}}(MSU_{4n}) \rightarrow \tilde{K}_{\mathbf{R}}(S^{8n-i} X_+) = K_{\mathbf{R}}^i(X),$$

où $\tilde{\gamma}_{4n}$ est le fibré classifiant au-dessus de BSU_{4n} . Le même morphisme $\zeta_{\mathbf{R}}$ peut être défini à l'aide de $T_{\mathbf{H}}$: si $m \in \Omega_{\text{SU}}^i(X)$ est représentée par une application

$$f: S^{8n+4-i} X_+ \rightarrow MSU_{4n+2},$$

$\zeta_{\mathbf{R}}(m)$ est l'image de $T_{\mathbf{H}}(\tilde{\gamma}_{4n+2})$ par

$$f^*: \tilde{K}_{\mathbf{H}}(MSU_{4n+2}) \rightarrow \tilde{K}_{\mathbf{H}}(S^{8n+4-i} X_+) \cong K_{\mathbf{R}}^i(X).$$

De même, rappelons que la théorie $W^*(\quad)$ est donnée par un spectre MW tel que

$$MW_n = P_2(\mathbb{C}) \wedge MSU_{n-1} \quad (\text{cf. II. 2. 7}).$$

(2) Le couple $\mathcal{K}^*(X)$ n'est pas un objet de la catégorie ∇ (I. 2. 1). Nous laisserons au lecteur le soin d'adapter à cette nouvelle situation les notions de morphisme, morphisme surjectif, etc., la proposition I. 2. 1 et le lemme II. 1. 4.

Donc MW_n est l'espace de Thom du fibré

$$\gamma_1(\mathbb{C}) \times \tilde{\gamma}_{n-1} \quad \text{sur } P_1(\mathbb{C}) \times BSU_{n-1}.$$

Si $g: S^{2n-i} X_+ \rightarrow MW_n$ représente une classe $e \in W^i(X)$, on définit $\zeta_{\mathbb{C}}(e)$ comme étant l'image de $T_{\mathbb{C}}(\gamma_1(\mathbb{C}) \times \tilde{\gamma}_{n-1})$ par

$$g^*: \tilde{K}_{\mathbb{C}}(MW_n) \rightarrow \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{2n-i} X_+) \cong K_{\mathbb{C}}^i(X),$$

le dernier isomorphisme étant la multiplication par une puissance appropriée de λ .

PROPOSITION. — $\zeta_{\mathbb{R}}$ et $\zeta_{\mathbb{C}}$ sont des morphismes d'anneaux.

Démonstration. — L'affirmation concernant $\zeta_{\mathbb{R}}$ découle de la multiplicativité de $T_{\mathbb{R}}$, puisque la multiplication $p: MSU_{4n} \wedge MSU_{4m} \rightarrow MSU_{4n+4m}$ correspond à l'application $BSU_{4n} \times BSU_{4m} \rightarrow BSU_{4n+4m}$ classifiant $\tilde{\gamma}_{4n} \times \tilde{\gamma}_{4m}$.

Le cas de $\zeta_{\mathbb{C}}$ est moins évident, car la structure multiplicative du spectre MW n'est pas associée au produit direct de fibrés. Cependant, il est clair que la définition de $\zeta_{\mathbb{C}}$ s'étend à la théorie du cobordisme complexe $\Omega_U^*(\quad)$, i. e. que $\zeta_{\mathbb{C}}$ est le morphisme composé :

$$W^*(X) \xrightarrow{i} \Omega_U^*(X) \xrightarrow{\zeta_{\mathbb{C}}} K_{\mathbb{C}}^*(X),$$

où le morphisme i est induit par le morphisme classifiant le $U(n)$ -fibré $\gamma_1(\mathbb{C}) \times \tilde{\gamma}_{n-1}$, et correspond à l'oubli de la « $P_1(\mathbb{C})$ -structure » (cf. [9], chap. VIII), et où $\zeta_{\mathbb{C}}$ est le morphisme multiplicatif construit dans [3]. Pour $e_1, e_2 \in W^*(X)$, on a alors

$$i(e_1 \cdot e_2) = i(e_1) \cdot i(e_2) + 2v \cdot ide_1 \cdot ide_2.$$

où v est la classe $[P_1(\mathbb{C})]^2 - [P_2(\mathbb{C})]$ de Ω_U^{-4} (cf. [9], chap. X). La proposition découle de ce que, d'une part, le morphisme $\zeta'_{\mathbb{C}}: \Omega_U^{-4} \rightarrow K_{\mathbb{C}}^{-4}$ est donné par $\zeta'_{\mathbb{C}}(a) = Td(a)\lambda^2$, où Td désigne le genre de Todd, et que d'autre part, $Td(v) = 0$. $\square$

1.4. Considérons maintenant la paire $\zeta = (\zeta_{\mathbb{R}}, \zeta_{\mathbb{C}})$.

PROPOSITION. — ζ est un morphisme de couples exacts, i. e.

$$i\zeta_{\mathbb{R}} = \zeta_{\mathbb{R}}i, \quad j\zeta_{\mathbb{R}} = \zeta_{\mathbb{C}}j, \quad \partial\zeta_{\mathbb{C}} = \zeta_{\mathbb{R}}\partial.$$

Démonstration. — La première affirmation découle de ce que $\zeta_{\mathbf{R}}(t) = t$ et de la multiplicativité de $\zeta_{\mathbf{R}}$. La seconde n'est qu'une autre manière de dire que $T_{\mathbf{C}}(\tilde{\gamma}_{4,n})$ est la complexification de $T_{\mathbf{R}}(\tilde{\gamma}_{4,n})$ (cf. 1. 1).

Pour démontrer la troisième affirmation, on utilisera la description suivante de ∂ , conséquence facile de la définition (cf. [9], chap. VII) : ∂ est induit par le morphisme de spectres :

$$\varphi = \{ \varphi_n \} : MW \rightarrow MSU,$$

où $\varphi_n : MW_n \rightarrow MSU_{n+1}$ est définie comme suit : soit $\theta : P_2(\mathbf{C}) \rightarrow MSU_2$ l'application composée de l'inclusion

$$P_2(\mathbf{C}) = M(\gamma_1(\mathbf{C})) \hookrightarrow M(\gamma_1(\mathbf{C}) \oplus \overline{\gamma_1(\mathbf{C})})$$

et de l'application classifiante

$$M(\gamma_1(\mathbf{C}) \oplus \overline{\gamma_1(\mathbf{C})}) \rightarrow MSU_2,$$

où $\gamma_1(\mathbf{C}) \oplus \overline{\gamma_1(\mathbf{C})}$ est muni de sa SU-structure canonique. Alors, φ_n est l'application composée

$$MW_n = P_2(\mathbf{C}) \wedge MSU_{n-1} \xrightarrow{\theta \wedge 1} MSU_2 \wedge MSU_{n-1} \xrightarrow{p} MSU_{n+1}.$$

Soit $n+1 \equiv 2 \pmod{4}$ et soit $T_{\mathbf{H}}(\tilde{\gamma}_{n+1}) \in \tilde{K}_{\mathbf{H}}(MSU_{n+1})$ la classe de Thom définie dans 1. 1. Alors, on a :

$$p^* T_{\mathbf{H}}(\tilde{\gamma}_{n+1}) = T_{\mathbf{H}}(\tilde{\gamma}_2) \otimes_{\mathbf{R}} T_{\mathbf{R}}(\tilde{\gamma}_{n-1}) \quad (\text{cf. 1. 1})$$

et

$$\varphi_n^* T_{\mathbf{H}}(\tilde{\gamma}_{n+1}) = \theta^* T_{\mathbf{H}}(\tilde{\gamma}_2) \otimes_{\mathbf{R}} T_{\mathbf{R}}(\tilde{\gamma}_{n-1}).$$

D'autre part, on a dans $\tilde{K}_{\mathbf{C}}(MW_n)$:

$$T_{\mathbf{C}}(\gamma_1(\mathbf{C}) \times \tilde{\gamma}_{n-1}) = T_{\mathbf{C}}(\gamma_1(\mathbf{C})) \otimes_{\mathbf{C}} T_{\mathbf{C}}(\tilde{\gamma}_{n-1}) = T_{\mathbf{C}}(\gamma_1(\mathbf{C})) \otimes_{\mathbf{R}} T_{\mathbf{R}}(\tilde{\gamma}_{n-1})$$

car $T_{\mathbf{C}}(\tilde{\gamma}_{n-1}) = j T_{\mathbf{R}}(\tilde{\gamma}_{n-1})$ (cf. 1. 1). En vertu de la formule $\partial(j(s).e) = s.\partial e$ de 1. 2, il suffit donc d'examiner le cas où $n=1$, i. e. de prouver que l'on a dans $\tilde{K}_{\mathbf{R}}^*(MW_1) = \tilde{K}_{\mathbf{R}}(S^4 \wedge P_2(\mathbf{C}))$:

$$\varepsilon \otimes_{\mathbf{H}} \theta^* T_{\mathbf{H}}(\tilde{\gamma}_2) = \partial(\lambda^{-1} \otimes_{\mathbf{C}} T_{\mathbf{C}}(\gamma_1(\mathbf{C}))) = -r(\lambda^2 \otimes_{\mathbf{C}} T_{\mathbf{C}}(\gamma_1(\mathbf{C}))).$$

Pour mieux comprendre θ , remarquons qu'il existe une application canonique

$$h_n: P_n(\mathbb{C}) \rightarrow P_n(\mathbb{H})$$

correspondant à l'inclusion $\mathbb{C}^{n+1} \subset \mathbb{H}^{n+1}$. On a :

$$ch_n^*(\gamma_n(\mathbb{H})) = \gamma_n(\mathbb{C}) \oplus \overline{\gamma_n(\mathbb{C})}.$$

Par ailleurs, $M(\gamma_n(\mathbb{C})) = P_{n+1}(\mathbb{C})$ et $M(\gamma_n(\mathbb{H})) = P_{n+1}(\mathbb{H})$. Ces identifications sont liées de la manière suivante: $h_{n+1}: P_{n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow P_{n+1}(\mathbb{H})$ est l'application composée

$$M(\gamma_n(\mathbb{C})) \subset M(\gamma_n(\mathbb{C}) \oplus \overline{\gamma_n(\mathbb{C})}) \rightarrow M(\gamma_n(\mathbb{H})),$$

la dernière flèche étant induite par h_n . Il est maintenant clair que

$$\theta: P_2(\mathbb{C}) \rightarrow MSU_2$$

est l'application composée

$$P_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{h_2} P_2(\mathbb{H}) \subset P_\infty(\mathbb{H}) = MSU_2.$$

Notons que pour des raisons de dimension, h_2 se factorise par une application

$$P_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{h} S^4 = P_1(\mathbb{H}) \subset P_2(\mathbb{H}).$$

Donc,

$$\theta^* T_{\mathbb{H}}(\tilde{\gamma}_2) = h^*(1 - \gamma_1(\mathbb{H})) = h^*(\varepsilon).$$

Alors,

$$\varepsilon \otimes_{\mathbb{H}} \theta^* T_{\mathbb{H}}(\tilde{\gamma}_2) = (1 \wedge h)^*(\varepsilon \otimes_{\mathbb{H}} \varepsilon)$$

et

$$j(\varepsilon \otimes_{\mathbb{H}} \theta^* T_{\mathbb{H}}(\tilde{\gamma}_2)) = (1 \wedge h)^*(\lambda^4),$$

où

$$1 \wedge h: S^4 \wedge P_2(\mathbb{C}) \rightarrow S^4 \wedge S^4 = S^8 \text{ est la suspension de } h.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 -jr(\lambda^2 \otimes_c T_c(\gamma_1(C))) &= -\lambda^2 \otimes_c T_c(\gamma_1(C)) - \overline{\lambda^2} \otimes_c \overline{T_c(\gamma_1(C))} \\
 &= -\lambda^2 \otimes_c ((1 - \gamma_2(C)) + (1 - \overline{\gamma_2(C)})) \\
 &= -\lambda^2 \otimes_c h^* c(1 - \gamma_1(H)) \\
 &= (1 \wedge h)^* (-\lambda^2 \otimes_c (-\lambda^2)) = (1 \wedge h)^* (\lambda^4),
 \end{aligned}$$

car $c(\varepsilon) = -\lambda^2$ (cf. 1.1). Il reste à remarquer que

$$j: \tilde{K}_R(S^4 \wedge P_2(C)) \rightarrow \tilde{K}_C(S^4 \wedge P_2(C)) \text{ est injectif.}$$

En effet, la cofibration $S^5 \rightarrow S^3 \wedge P_2(C) \rightarrow S^7$ implique

$$\tilde{K}_R(S^3 \wedge P_2(C)) = 0.$$

L'injectivité de j est alors la conséquence de la suite exacte

$$\tilde{K}_R(S^3 \wedge P_2(C)) \xrightarrow{i} \tilde{K}_R(S^4 \wedge P_2(C)) \xrightarrow{j} \tilde{K}_C(S^4 \wedge P_2(C))$$

extraite du couple exact $\mathcal{K}^*(P_2(C))$. $\square$

Remarque. — C'est la nécessité d'avoir $\zeta_R \partial = \partial \zeta_C$ qui explique le choix du signe dans la définition de ∂ en K -théorie.

1.5. Conner et Floyd [3] ont prouvé que pour tout complexe cellulaire fini X , le morphisme

$$\zeta_C: \Omega_U^*(X) \rightarrow K_C^*(X)$$

induit un isomorphisme

$$F_C: \Omega_U^*(X) \otimes_{\Omega_U} K_C^* \xrightarrow{\cong} K_C^*(X),$$

où l'on considère $K_C^*(\quad)$ comme théorie $\mathbb{Z}/2$ -graduée. Il est facile d'adapter cette preuve pour démontrer que ζ_C définit un isomorphisme

$$F_C: W^*(X) \otimes_{W^*} K_C^* \xrightarrow{\cong} K_C^*(X).$$

En particulier, le morphisme $\zeta_C: W^*(X) \rightarrow K_C^*(X)$ est surjectif. Il est encore surjectif, si l'on utilise la théorie $\mathbb{Z}/8$ -graduée $K_C^*(X)$.

PROPOSITION. — *Le morphisme $\zeta: \mathcal{S}^*(X) \rightarrow \mathcal{K}^*(X)$ est surjectif.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que $\zeta_R: \Omega_{SU}^*(X) \rightarrow K_R^*(X)$ est surjectif. Or, dans [3], on démontre que le morphisme composé :

$$\Omega_{Sp}^*(X) \rightarrow \Omega_{SU}^*(X) \xrightarrow{\zeta_R} K_R^*(X)$$

est surjectif, ce qui entraîne la surjectivité de ζ_R . $\square$

1.6. Soit $\mathcal{X}(X)$:

$$\begin{array}{ccc} K_*^R(X) & \xrightarrow{i} & K_*^R(X) \\ \swarrow \partial & & \searrow j \\ & K_*^C(X) & \end{array}$$

le couple exact dual du couple de 1.2, et soit

$$\zeta = (\zeta^R, \zeta^C): \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{X}(X)$$

le morphisme dual de

$$\zeta = (\zeta_R, \zeta_C): \mathcal{S}^*(X) \rightarrow \mathcal{X}^*(X).$$

Il est facile de voir, à l'aide de 1.5, que le morphisme

$$\zeta^C: W_*(X) \rightarrow K_*^C(X)$$

induit un isomorphisme

$$F^C: W_*(X) \otimes_W K^C \xrightarrow{\sim} K_*^C(X).$$

De même, le morphisme

$$\zeta^R: \Omega_*^{SU}(X) \rightarrow K_*^R(X)$$

induit un morphisme

$$F^R: \Omega_*^{SU}(X) \otimes_{\Omega^{SU}} K^R \rightarrow K_*^R(X).$$

Nous allons voir qu'en général, F^R n'est pas injectif.

PROPOSITION. — Le morphisme $F : W \otimes_{\Omega^{\text{su}}} K^{\mathbb{R}} \rightarrow K^{\mathbb{C}}$, induit par $\zeta^{\mathbb{C}} : W \rightarrow K^{\mathbb{C}}$, n'est pas injectif.

Démonstration. — Rappelons (I.1.3) que $W = \mathbb{Z}[x_1, x_3, x_4, \dots]$, $x_i \in W_{2i}$ ($i \neq 2$), $dx_{2i} = x_{2i-1}$ ($i \geq 2$). Comme $\zeta^{\mathbb{C}}(x_1) = -\lambda$ et $d(x_1^{2^n}) = 0$, on peut, en modifiant s'il le faut x_{2^n} , supposer que $\zeta^{\mathbb{C}}(x_{2^n}) = \zeta^{\mathbb{C}}(x_{2^n-1}) = 0$ pour $n \geq 2$. Remarquons ensuite que $tW = 0$. Donc:

$$W \otimes_{\Omega^{\text{su}}} K^{\mathbb{R}} \cong W \otimes_{\Omega^{\text{su}}/t\Omega^{\text{su}}} (K^{\mathbb{R}}/tK^{\mathbb{R}}) \cong W/J. W,$$

où J est le noyau de

$$\zeta^{\mathbb{R}} : \Omega^{\text{su}}/t\Omega^{\text{su}} \rightarrow K^{\mathbb{R}}/tK^{\mathbb{R}}.$$

Si l'on identifie $\Omega^{\text{su}}/t\Omega^{\text{su}}$ et $K^{\mathbb{R}}/tK^{\mathbb{R}}$ avec leurs images par j dans W et $K^{\mathbb{C}}$ respectivement, $\zeta^{\mathbb{R}}$ peut être décrit de la manière suivante :

Si $x \in (\Omega^{\text{su}}/t\Omega^{\text{su}})_n$, on a :

$$\zeta^{\mathbb{R}}(x) = \begin{cases} 0, & n \not\equiv 0 \pmod{4} \\ Td(x), & n \equiv 0 \pmod{8} \\ Td(x)\lambda^2, & n \equiv 4 \pmod{8}, \end{cases}$$

où $\lambda \in K_{\Sigma}^{\mathbb{C}} = K_{\Sigma}^{-2}$ est le générateur décrit dans 1.1 et où Td désigne le genre de Todd (cf. [3], 6.5).

Considérons l'élément $x_4 \otimes 1 \in W \otimes_{\Omega^{\text{su}}} K^{\mathbb{R}}$. On a $F(x_4 \otimes 1) = \zeta^{\mathbb{C}}(x_4) = 0$. Il suffira donc de prouver que $x_4 \otimes 1 \neq 0$. Pour cela, soit $\varphi : W \rightarrow \mathbb{Z}$ le morphisme d'anneaux défini par :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &= 1, & \varphi(x_4) &= 2; \\ \varphi(x_{2i-1}) &= 0 & (i \geq 2), \\ \varphi(x_{2i}) &= 0 & (i \geq 3). \end{aligned}$$

Nous allons voir que $\varphi(J. W) \subset 4\mathbb{Z}$, d'où $x_4 \notin J. W$.

L'idéal J de $\Omega^{\text{su}}/t\Omega^{\text{su}}$ n'est pas homogène. Il n'est que $\mathbb{Z}/8$ -gradué. Soit $a \in J_i$ ($i \in \mathbb{Z}/8$). Alors

$$a = \sum_n a_n$$

($a_n \in (\Omega^{\text{su}}/t\Omega^{\text{su}})_{i_0 + 8n}$, où $i_0 \in \mathbb{Z}$ est tel que $i = i_0 \pmod{8}$). Posons

$$\xi = 2x_1^2 = d(x_1^3) \in (\Omega^{\text{su}}/t\Omega^{\text{su}})_4.$$

On a $\zeta^R(\xi) = 2\zeta^C(x_1^2) = 2\lambda^2$. Alors,

— si $i \neq 0 \bmod 4$, on a :

$$\zeta^R(a_n) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z});$$

— si $i = 0 \bmod 8$, on a :

$$a = \Sigma a_n = \Sigma (a_n - Td(a_n))$$

et

$$a_n - Td(a_n) \in J_0;$$

— si $i = 4 \bmod 8$, on a :

$$a = \Sigma a_n = \Sigma \left(a_n - \frac{1}{2} Td(a_n) \cdot \xi \right)$$

et

$$a_n - \frac{1}{2} Td(a_n) \cdot \xi \in J_4.$$

(Notons que $Td(a_n) \equiv 0 \pmod{2}$ dans ce cas, car $K_{8m+4}^R/t K_{8m+3}^R$ est engendré par $j(\omega) = -2\lambda^2$ dans $K_{8m+4}^C = K_C^{-8m-4}$.) Donc J est additivement engendré par des éléments homogènes de degré $\not\equiv 0 \pmod{4}$, des éléments de la forme

$$a - Td(a), \quad a \in (\Omega^{SU}/t\Omega^{SU})_{8m}.$$

et des éléments de la forme

$$a - \frac{1}{2} Td(a) \cdot \xi, \quad a \in (\Omega^{SU}/t\Omega^{SU})_{8n+4}.$$

Selon Stong ([9], chap. X), tout élément de $\Omega^{SU}/t\Omega^{SU} \subset W \subset W[1/2]$ s'écrit comme polynôme sur $\mathbb{Z}[1/2]$ en $x_1^2, x_{2i-1}, x_{2i} - (1/2)x_1 x_{2i-1}$ ($i \geq 2$).

Si $a \in (\Omega^{SU}/t\Omega^{SU})_{4k}$, posons donc

$$a = \alpha \cdot x_1^{2k} + P\left(x_1^2, x_{2i-1}, x_{2i} - \frac{1}{2}x_1 x_{2i-1}\right) \quad \left(\alpha \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right).$$

où P est un polynôme homogène de degré $4k$ qui ne contient pas de monôme x_1^{2k} .

Alors :

$$\alpha = Td(a) \in \begin{cases} \mathbb{Z}, & k \equiv 0 \pmod{2} \\ 2\mathbb{Z}, & k \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Donc, pour $k \equiv 0 \pmod{2}$, on peut écrire :

$$a - Td(a) = \alpha (x_1^{2k} - 1) + P,$$

et pour $k \equiv 1 \pmod{2}$,

$$a - \frac{1}{2} Td(a) \xi = \frac{\alpha}{2} \xi (x_1^{2k-2} - 1) + P.$$

Revenons maintenant au morphisme $\varphi : W \rightarrow \mathbb{Z}$. Pour démontrer que $\varphi(J.W) \subset 4\mathbb{Z}$, il nous suffit de démontrer que :

(i) $\varphi(x_1^{2m} - 1) = 0 \ (m \geq 0)$;

(ii) $\varphi(P) \equiv 0 \pmod{4}$, où P est un élément de W qui s'écrit comme polynôme homogène en $x_1^2, x_{2i-1}, x_{2i} - (1/2)x_1 x_{2i-1} \ (i \geq 2)$ sur $\mathbb{Z}[1/2]$ tel que soit (a) $\deg P \not\equiv 0 \pmod{4}$, soit (b) $\deg P = 4k$ et P ne contient pas le monôme x_1^{2k} .

L'affirmation (i) est évidente. Pour démontrer (ii), notons que si $\deg P \not\equiv 0 \pmod{4}$ chaque monôme de P est divisible par l'un des $x_{2i-1} \ (i \geq 2)$, donc $\varphi(P) = 0$.

Enfin, si $P = 4k$, écrivons :

$$P = \sum_{i \geq 1} \alpha_i x_1^{2k-4i} \left(x_4 - \frac{1}{2} x_1 x_3 \right)^i + \sum_{i \geq 0, j \geq 1} \beta_{ij} x_1^{2k-4i-6j} \left(x_4 - \frac{1}{2} x_1 x_3 \right)^i x_3^{2j} + Q$$

$\left(\alpha_i, \beta_{ij} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \right)$, où Q est un polynôme dont tous les monômes sont divisibles soit par un $x_{2i-1} \ (i \geq 3)$, soit par un $x_{2i} - (1/2)x_1 x_{2i-1} \ (i \geq 3)$. On a $\varphi(Q) = 0$.

Notons maintenant que si l'on pose dans P ,

$$x_3 = x_5 = \dots = x_6 = x_8 = \dots = 0, \quad x_4 = 1,$$

on obtient le polynôme $\sum_{i \geq 1} \alpha_i x_1^{2k-4i}$ qui doit appartenir à $\mathbb{Z}[x_1]$ puisque $P \in W$. Donc, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ ($i \geq 1$).

D'autre part,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x_3} \right|_{x_3=x_4=\dots=0} = -\frac{\alpha_1}{2} x_1^{2k-3},$$

donc $\alpha_1 \in 2\mathbb{Z}$. Alors,

$$\varphi(P) = \sum_{i \geq 1} \alpha_i 2^i \equiv 0 \pmod{4}. \quad \square$$

COROLLAIRE. — Le morphisme $F^{\mathbf{R}} : \tilde{\Omega}_*^{\text{SU}}(P_2(\mathbb{C})) \otimes_{\Omega^{\text{SU}}} K^{\mathbf{R}} \rightarrow \tilde{K}_*^{\mathbf{R}}(P_2(\mathbb{C}))$ n'est pas injectif.

Démonstration. — Il est possible d'identifier le morphisme $F^{\mathbf{R}}$ et le morphisme F de la proposition. Pour nous, il suffira de construire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\zeta^{\mathbf{C}}} & K^{\mathbf{C}} \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \tilde{\Omega}_*^{\text{SU}}(P_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\zeta^{\mathbf{R}}} & \tilde{K}_*^{\mathbf{R}}(P_2(\mathbb{C})). \end{array}$$

où f est un isomorphisme de Ω^{SL} -modules, alors que g est un morphisme de $K^{\mathbf{R}}$ -modules. En effet, on aura alors aussi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} W \otimes_{\Omega^{\text{SU}}} K^{\mathbf{R}} & \xrightarrow{F} & K^{\mathbf{C}} \\ f \otimes 1 \downarrow & & \downarrow g \\ \tilde{\Omega}_*^{\text{SL}}(P_2(\mathbb{C})) \otimes_{\Omega^{\text{SU}}} K^{\mathbf{R}} & \xrightarrow{F^{\mathbf{R}}} & \tilde{K}_*^{\mathbf{R}}(P_2(\mathbb{C})). \end{array}$$

qui montre que $F^{\mathbf{R}}$ n'est pas injectif puisque F ne l'est pas.

Nous avons construit un isomorphisme $\tilde{\mathcal{P}}(P_2(\mathbb{C})) \simeq \mathcal{J}$ (I. 2. 5). Il résulte de la définition de $\mathcal{J}$ que le morphisme composé

$$f: W \xrightarrow{i} \tilde{W}_*(P_2(\mathbb{C})) \xrightarrow{\iota} \tilde{\Omega}_*^{\text{SL}}(P_2(\mathbb{C})).$$

où $i(w) = w.p$, est un isomorphisme. Soit $u = \zeta^C(p)$, soit $\iota : K^C \rightarrow \tilde{K}_*^C(P_2(C))$ le morphisme $k \mapsto k.u$, et prenons pour g le morphisme composé

$$K^C \xrightarrow{\iota} \tilde{K}_*^C(P_2(C)) \xrightarrow{\partial} \tilde{K}_*^R(P_2(C)).$$

Alors, on a $\zeta^C i = \iota \zeta^C$ et $\zeta^R \partial = \partial \zeta^C$ (cf. 1.4), d'où $\zeta^R f = g \zeta^C$. $\square$

1.7. Considérons maintenant le morphisme

$$F^R : {}_t\Omega_*^{SU}(X) \otimes_{\Omega^{SU}} K^R \rightarrow {}_tK_*^R(X).$$

PROPOSITION. — Soit X un complexe cellulaire fini tel que le couple $\mathcal{S}(X)$ soit projectif (cf. 1.2.2). Alors, F^R est un isomorphisme.

Démonstration. — Considérons d'abord l'isomorphisme

$$F^C : W_*(X) \otimes_W K^C \rightarrow K_*^C(X) \quad (\text{cf. 1.6}).$$

Comme $\zeta^C : W \rightarrow K^C$ commute avec la différentielle d , K^C est canoniquement un W -module différentiel. Donc $W_*(X) \otimes_W K^C$ a également une différentielle canonique donnée par :

$$d(e \otimes k) = de \otimes k + \bar{e} \otimes dk \quad (e \in W_*(X), k \in K^C),$$

et comme $F^C(e \otimes k) = \zeta^C(e).k$, on a :

$$\begin{aligned} dF^C(e \otimes k) &= d\zeta^C(e).k + \overline{\zeta^C(e)} dk \\ &= \zeta^C(de).k + \zeta^C(\bar{e}) dk \\ &= F^C(de \otimes k + \bar{e} \otimes dk) = F^C d(e \otimes k). \end{aligned}$$

Donc F^C est un isomorphisme de groupes différentiels et induit un isomorphisme

$$F_*^C : H_*(W_*(X) \otimes_W K^C) \xrightarrow{\cong} H_*(K_*^C(X)).$$

Comme $\mathcal{S}(X)$ est un couple projectif, $W_*(X)$ est une somme finie de W -modules différentiels isomorphes à W ou L (cf. 1.2.3, 1.2.9). Il est facile de voir que

$$H_*(W \otimes_W K^C) = H_*(K^C)$$

et

$$H_*(L \otimes_W K^C) = 0.$$

Donc

$$H_*(W_*(X) \otimes_W K^C) \simeq H_*(W_*(X)) \otimes_{H_*(W)} H_*(K^C).$$

En particulier, $H_*(K_*^C(X))$ est un $H_*(K^C)$ -module libre de rang égal à celui de $H_*(W_*(X))$ sur $H_*(W)$. De plus, $\zeta_*^C : H_*(W_*(X)) \rightarrow H_*(K_*^C(X))$ est un morphisme surjectif, ce qui implique que la différentielle d' du couple $\mathcal{X}'(X)$ dérivé de $\mathcal{X}(X)$ est nulle. Comme dans II. 1. 7, cela implique que $H_*(t K_*^C(X), t) = 0$.

Revenons au morphisme F^R . Comme ζ^R est surjectif (1.5), F^R est surjectif. D'autre part, on a, dans $\mathcal{S}(X)$, $t\partial = 0$, donc

$$t\Omega_*^{SU}(X) \otimes_{\Omega^{SU}} K^R \cong t\Omega_*^{SU}(X) \otimes_{\Lambda} \Lambda^K,$$

où $\Lambda = \Omega^{SU}/\partial W$ (cf. I. 1. 11) et $\Lambda^K = K^R/\partial K^C$. Il est facile, grâce à 1. 1, de constater que :

$$\Lambda^K = \mathbb{F}_2[t_0]/(t_0^2),$$

où t_0 est l'image de $t \in K_1^R$ dans Λ^K .

Comme le couple $\mathcal{S}(X)$ est projectif, $t\Omega_*^{SU}(X)$ est un Λ -module libre de rang fini n (cf. I. 2. 9). Alors $t\Omega_*^{SU}(X) \otimes_{\Lambda} \Lambda^K$ est un Λ^K -module libre de rang n , donc un $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel de dimension $2n$. Pour terminer la preuve, il suffira donc de prouver que $\dim_{\mathbb{F}_2} t K_*^R(X) \geq 2n$.

Comme $H_*(t K_*^R(X), t) = 0$, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow t^2 K_*^R(X) \rightarrow t K_*^R(X) \xrightarrow{t} t^2 K_*^R(X) \rightarrow 0,$$

et notre condition est équivalente à $\dim_{\mathbb{F}_2} t^2 K_*^R(X) \geq n$. D'un autre côté, comme $t^3 = 0$ et comme $d' = 0$ dans $\mathcal{X}'(X)$, le couple $\mathcal{X}''(X)$ dérivé de $\mathcal{X}'(X)$ se réduit à la suite exacte :

$$0 \rightarrow t^2 K_*^R(X) \xrightarrow{f''} H_*(K_*^C(X)) \xrightarrow{f''} t^2 K_*^R(X) \rightarrow 0;$$

la condition ci-dessus devient $\dim_{\mathbb{F}_2} H_*(K_*^C(X)) \geq 2n$.

Il est facile de voir que $H_*(K^{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{F}_2[c]/(c^2-1)$, où c est la classe du cycle λ^2 . Donc :

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H_*(K_*^{\mathbb{C}}(X)) = 2 \operatorname{rg}_{H_*(K^{\mathbb{C}})} H_*(K_*^{\mathbb{C}}(X)) = 2 \operatorname{rg}_{H_*(W)} H_*(W_*(X)),$$

et il nous reste à voir que ce dernier nombre est $\geq 2n$. Or, si $\mathcal{D} = (D, E, j, \hat{c})$ est un couple projectif de ∇ , on a toujours :

$$\operatorname{rg}_{\Lambda} \iota D = \operatorname{rg}_{H_*(W)} H_*(E).$$

En effet, cela est vrai pour les couples $\mathcal{S}$ et $\mathcal{J}$, et le cas général découle de I. 2. 9. $\square$

1. 8. Soit X un complexe cellulaire fini arbitraire.

THÉORÈME. — Le morphisme $\zeta^{\mathbf{R}}$ induit un isomorphisme

$$F^{\mathbf{R}} : \iota \Omega_*^{\text{SU}}(X) \otimes_{\Omega^{\text{SU}}} K^{\mathbf{R}} \xrightarrow{\cong} \iota K_*^{\mathbf{R}}(X).$$

Démonstration. — Prenons une $\mathcal{S}$ -résolution partielle de longueur 0 de X (cf. II. 2. 9) :

$$\begin{array}{ccc} & X_0 & \longrightarrow S^k X_+ \\ & \nearrow & \searrow \scriptstyle f_0 \\ Y_0 & & Y_{-1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ = \end{array}$$

Par définition, le morphisme $(f_0)_* : \tilde{\mathcal{F}}(X_0) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(Y_{-1})$ est surjectif.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{F}}(X_0) & \xrightarrow{(\iota f_0)_*} & \tilde{\mathcal{F}}(Y_{-1}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \tilde{\mathcal{H}}(X_0) & \xrightarrow{(\iota f_0)_*} & \tilde{\mathcal{H}}(Y_{-1}), \end{array}$$

dont les deux morphismes $\wr$ sont surjectifs (cf. 1. 5), montre que :

$$(\iota f_0)_* : \tilde{\mathcal{H}}(X_0) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Y_{-1})$$

est également surjectif. Il en résulte un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{P}}(Y_0) & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{P}}(X_0) & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{P}}(Y_{-1}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \zeta & & \downarrow \zeta & & \downarrow \zeta \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{X}}(Y_0) & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{X}}(X_0) & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{X}}(Y_{-1}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les deux lignes horizontales sont exactes. Le lemme II. 1. 4 appliqué aux deux suites exactes (cf. note p. 262) donne alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & {}_t\tilde{\Omega}_*^{\text{SU}}(Y_0) & \longrightarrow & {}_t\tilde{\Omega}_*^{\text{SU}}(X_0) & \longrightarrow & {}_t\tilde{\Omega}_*^{\text{SU}}(Y_{-1}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \zeta^{\mathbf{R}} & & \downarrow \zeta^{\mathbf{R}} & & \downarrow \zeta^{\mathbf{R}} \\ 0 & \longrightarrow & {}_t\tilde{K}_*^{\mathbf{R}}(Y_0) & \longrightarrow & {}_t\tilde{K}_*^{\mathbf{R}}(X_0) & \longrightarrow & {}_t\tilde{K}_*^{\mathbf{R}}(Y_{-1}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

aux lignes horizontales exactes, puis un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} {}_t\tilde{\Omega}_*^{\text{SU}}(Y_0) \otimes_{\Omega^{\text{SU}}} K^{\mathbf{R}} & \longrightarrow & {}_t\tilde{\Omega}_*^{\text{SU}}(X_0) \otimes_{\Omega^{\text{SU}}} K^{\mathbf{R}} & \longrightarrow & {}_t\tilde{\Omega}_*^{\text{SU}}(Y_{-1}) \otimes_{\Omega^{\text{SU}}} K^{\mathbf{R}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow F_{Y_0}^{\mathbf{R}} & & \downarrow F_{X_0}^{\mathbf{R}} & & \downarrow F_{Y_{-1}}^{\mathbf{R}} \\ 0 & \longrightarrow & {}_t\tilde{K}_*^{\mathbf{R}}(Y_0) & \longrightarrow & {}_t\tilde{K}_*^{\mathbf{R}}(X_0) & \longrightarrow & {}_t\tilde{K}_*^{\mathbf{R}}(Y_{-1}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

aux lignes horizontales exactes. Les morphismes $F_{Y_0}^{\mathbf{R}}$ et $F_{Y_{-1}}^{\mathbf{R}}$ sont surjectifs et $F_{X_0}^{\mathbf{R}}$ est bijectif en vertu de 1. 7. Donc, grâce au lemme du serpent, $F_{Y_{-1}}^{\mathbf{R}}$ est bijectif. Comme $F_{Y_{-1}}^{\mathbf{R}}$ est une suspension de $F^{\mathbf{R}}$, cela achève la démonstration. $\square$

2. Éléments réguliers et suites régulières

2. 1. Soient R un anneau commutatif et M un R -module. On dit d'un élément $r \in R$ qu'il est *régulier dans* M , si l'application $m \mapsto rm$ de M dans lui-même est injective. Par exemple, r est régulier dans R si et seulement s'il n'est pas un diviseur de zéro dans R . Tout $r \in R$ est régulier dans le module nul 0. Un élément inversible de R est régulier dans tout R -module M .

Soit $\mathcal{S} = (D, E, j, \hat{c})$ un couple exact cohérent. Rappelons que $\mathcal{S}$ est canoniquement un couple de Ω^{su} -modules (cf. I. 1. 10) et que par suite les couples dérivés $\mathcal{S}' = (D', E', j', \hat{c}')$ et $\mathcal{S}'' = (D'', E'', j'', \hat{c}'')$ sont aussi des couples de Ω^{su} -modules. De même, le groupe $\eta_* \mathcal{S}$ (cf. II. 1. 7) est un Ω^{su} -module.

PROPOSITION. — Soit $\mathcal{S}$ un couple exact cohérent et $s \in \Omega^{\text{su}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) s est régulier dans D et $\eta_* \mathcal{S}$;
- (b) s est régulier dans E, E' et E'' .

Démonstration. — Supposons s régulier dans D et $\eta_* \mathcal{S}$.

Prenons d'abord un $e \in E$ tel que $se = 0$. On a : $s \cdot \hat{c}e = \hat{c}(s \cdot e) = 0$, d'où $\hat{c}e = 0$. Posons $e = j(m)$ ($m \in D$). Alors, $j(sm) = se = 0$, donc $sm \in tD$. Pour tout $w \in W$, on a : $\hat{c}w \cdot sm = 0$, et, comme s est régulier dans D , $\hat{c}w \cdot m = 0$. Donc, pour tout $w \in W$, $d_w \cdot e = j(\hat{c}w \cdot m) = 0$. Nous allons en déduire, grâce à la cohérence de E , que $e = 0$.

On peut trouver, comme dans I. 1. 14, un isomorphisme de W -modules différentiels $E \cong W \otimes_{W(n)} E_0$ ($2 \leq n < \infty$), où $W(n) = \mathbb{Z}[x_1, x_3, \dots, x_{2n}]$ et où E_0 est un $W(n)$ -module différentiel noëthérien. Il est facile de voir que, pour $k \geq n$, la suite exacte de $W(n)$ -modules

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{x_{2k+1}} W \rightarrow W/x_{2k+1}W \rightarrow 0$$

est scindée. On en déduit que la multiplication par $x_{2k+1} = dx_{2k+2}$ dans E est injective pour $k \geq n$, ce qui entraîne bien $e = 0$. Donc, s est régulier dans E .

Prenons ensuite un $e_1 \in E'$ tel que $se_1 = 0$. Comme ci-dessus, on a $s \hat{c}'(e_1) = \hat{c}'(se_1) = 0$, d'où $\hat{c}'(e_1) = 0$, car s est régulier dans $D' \subset D$. On pose $e_1 = j'(m_1)$ ($m_1 \in D'$) et on a : $j'(sm_1) = se_1 = 0$, donc $sm_1 \in tD' = t^2D$. En particulier, $tsm_1 = 0$, et comme s est régulier dans D' , $tm_1 = 0$. Il résulte de la définition de $\eta_* \mathcal{S}$ (cf. II. 1. 7) que m_1 représente un élément du noyau de $s : \eta_* \mathcal{S} \rightarrow \eta_* \mathcal{S}$. Comme s est régulier dans $\eta_* \mathcal{S}$, on a $m_1 \in t^2D$, et par suite, $e_1 = j'(m_1) = 0$. Donc s est régulier dans E' .

Prenons enfin un $e_2 \in E''$ tel que $se_2 = 0$. Comme ci-dessus, on trouve un $m_2 \in D'' = t^2D$ tel que $e_2 = j''(m_2)$ et $sm_2 \in t^3D = 0$. Comme s est régulier dans $D'' \subset D$, on obtient $m_2 = 0$ et $e_2 = 0$, ce qui prouve la régularité de s dans E'' .

Nous avons démontré l'implication $(a) \Rightarrow (b)$. Pour prouver $(b) \Rightarrow (a)$, supposons au contraire que s est régulier dans E , E' et E'' . Soit $m \in D$ un élément tel que $sm = 0$. Alors, on a $sj(m) = j(sm) = 0$, donc (régularité de s dans E) : $j(m) = 0$ et $m \in {}_t D = D'$. De même, $sj'(m) = j'(sm) = 0$, donc (régularité de s dans E') : $j'(m) = 0$ et $m \in {}_t D' = D''$. Enfin, $sj''(m) = j''(sm) = 0$, d'où (régularité de s dans E'') : $j''(m) = 0$ et $m \in {}_t D'' = 0$. Donc s est régulier dans D .

Soit h une classe de $\eta_* \mathcal{L}$ telle que $sh = 0$. Si h est représentée par un élément $m \in {}_t D$ tel que $tm = 0$, on a : $sm \in {}_t^2 D$. Posons $e_1 = j'(m)$ ($e_1 \in E'$). On a : $se_1 = j'(sm) = 0$. Comme s est régulier dans E' , on a $e_1 = 0$, d'où $m \in \ker j' = {}_t^2 D$, i. e. $h = 0$. Donc s est régulier dans $\eta_* \mathcal{L}$. $\square$

COROLLAIRE. — Soit $\mathcal{L}$ un couple exact cohérent de dimension finie. Pour que $s \in \Omega^{\text{st}}$ soit régulier dans D , il faut et il suffit que s soit régulier dans E et $H_*(E) = E'$.

Démonstration. — En effet, pour un couple de dimension finie, on a : $\eta_* \mathcal{L} = 0$ et $E' = E''$ (cf. II. 1. 7). $\square$

Exemple. — Prenons pour $\mathcal{L}$ le couple-base $\mathcal{S}$ (I. 1. 1). Comme les anneaux W et $H_*(W)$ sont intègres, un élément $s \in \Omega^{\text{st}}$ est régulier dans Ω^{st} si et seulement si son image dans $H_*(W)$ est non nulle. En particulier, s doit être de degré divisible par 8 (cf. proposition I. 1. 12). Ceci redonne la description par CONNER et FLOYD ([2], [3]) des non-diviseurs de zéro dans Ω^{st} .

2.2. Remarquons que si M est un R -module, il existe toujours des éléments $r \in R$ réguliers dans M , par exemple $r = 1$. Afin d'exclure les cas triviaux de ce genre, nous dirons que r est *régulier propre* dans M , s'il est régulier dans M et $rM \neq M$.

Il est facile de construire des exemples de Ω^{st} -modules non nuls pour lesquels il n'existe pas d'éléments réguliers propres. On a cependant le résultat suivant :

PROPOSITION. — Soit $\mathcal{L} \neq 0$ un couple exact cohérent de dimension finie. Alors, il existe un $s \in \Omega^{\text{st}}$ régulier propre dans D .

Démonstration. — D'après I. 1. 14, on peut trouver un isomorphisme de W -modules différentiels

$$E \cong W \oplus_{n=1}^{\infty} E_0 \quad (2 \leq n < \infty).$$

où E_0 est un $W(n)$ -module différentiel noëtherien. On a alors un isomorphisme de $H_*(W)$ -modules

$$H_*(E) \cong H_*(W) \otimes_{H_*(W(n))} H_*(E_0) \quad (\text{cf. I. 1. 7}).$$

Prenons un $k > n$ et un $s \in \Omega_{8k}^{SU}$ dont l'image dans W est $x_{2k} \bar{x}_{2k}$. L'existence d'un tel s découle de la proposition I. 1. 12 et de ce que tout élément de $d(W) = j \partial(W)$ est dans l'image de $j : \Omega^{SU} \rightarrow W$. Nous allons voir que s est régulier dans E et $H_*(E)$. Considérons la suite exacte de $W(n)$ -modules différentiels :

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{x_{2k} \bar{x}_{2k}} W \rightarrow W/x_{2k} \bar{x}_{2k} W \rightarrow 0.$$

En utilisant le fait que $x_{2k} \bar{x}_{2k} = x_{2k}^2 - x_1 x_{2k-1} x_{2k}$ et la structure de W (cf. I. 1. 3), il est facile de voir que cette suite est scindée. Il en découle immédiatement que s est régulier dans E .

La suite exacte de $H_*(W(n))$ -modules

$$0 \rightarrow H_*(W) \xrightarrow{c_{8k}} H_*(W) \rightarrow H_*(W)/c_{8k} H_*(W) \rightarrow 0,$$

où $c_{8k} \in H_{8k}(W)$ est la classe du cycle $x_{2k} \bar{x}_{2k}$ (cf. I. 1. 7), est également scindée, d'où la régularité de s dans $H_*(W)$. Le corollaire 2. 1 montre que s est régulier dans D . Il reste à voir que $sD \neq D$. Or, on a $\mathcal{D} \neq 0$, donc $E \neq 0$, et par suite, $E_0 \neq 0$. Comme $x_{2k} \bar{x}_{2k} W \neq W$, il en découle que $x_{2k} \bar{x}_{2k} E \neq E$. Considérons alors la suite exacte (dans ∇) :

$$0 \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_1 \rightarrow 0,$$

où σ est le morphisme $(s, j(s))$ et où $\mathcal{D}_1$ est le couple (exact en vertu de I. 2. 1) :

$$\begin{array}{ccc} D/sD & \xrightarrow{i} & D/sD \\ \swarrow \scriptstyle i & & \searrow \scriptstyle j \\ & E/j(s)E & \end{array}$$

Comme $E/j(s)E \neq 0$, on a $D/sD \neq 0$. $\square$

Remarque. — Un raisonnement à peine plus compliqué, basé sur la cohérence des Λ -modules E' et E'' (cf. la démonstration du théorème 1. 16) montre que la condition $dh\mathcal{Q} < \infty$ est inutile : pour tout couple exact cohérent $\mathcal{Q} \neq 0$, il existe un élément $s \in \Omega^{\text{su}}$ régulier propre dans D et régulier dans $\eta_*\mathcal{Q}$.

2. 3. La notion de suite régulière généralise celle d'élément régulier. Soit R un anneau commutatif et M un R -module. Si $r_1, \dots, r_n$ est une suite d'éléments de R , on notera I_k l'idéal de R engendré par $r_1, \dots, r_k$ ($1 \leq k \leq n$). On pose $I_0 = 0$.

On dit que la suite $r_1, \dots, r_n$ est *régulière dans* M , si pour tout k , $0 \leq k < n$, r_{k+1} est un élément régulier dans $M/I_k.M$. La suite $r_1, \dots, r_n$ est *régulière propre* dans M , si elle est régulière dans M et $I_n.M \neq M$.

Dans certains cas, la notion de suite régulière peut s'exprimer en termes homologiques (cf. [6]) : supposons que $r_1, \dots, r_n \in R$ soit une suite régulière dans R et que M soit un R -module. Alors, pour que la suite $r_1, \dots, r_n$ soit régulière dans M il faut et il suffit que l'on ait $\text{Tor}_i^R(R/I_k R, M) = 0$ pour tout $k \leq n$ et tout $i > 0$.

Soit $\mathcal{Q}$ un couple exact cohérent et $s_1, \dots, s_n \in \Omega^{\text{su}}$. Posons $D_n = D/I_n D$, $E_n = E/I_n E$ et considérons le couple $\mathcal{Q}_n = (D_n, E_n, j, \partial)$, où les morphismes j et ∂ sont induits par ceux du couple $\mathcal{Q}$. Notons qu'en général $\mathcal{Q}_n$ n'est pas un couple exact.

PROPOSITION. — 1° Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) La suite $s_1, \dots, s_n$ est régulière dans D et $\eta_*\mathcal{Q}$.

(b) La suite $s_1, \dots, s_n$ est régulière dans E , E' et E'' .

2° Lorsque les conditions (a) et (b) sont vérifiées, on a :

(c) $\mathcal{Q}_n$ est un couple exact cohérent.

(d) La projection canonique $D \rightarrow D_n$ induit un isomorphisme $\eta_*\mathcal{Q}/I_n\eta_*\mathcal{Q} \cong \eta_*(\mathcal{Q}_n)$.

(e) La projection canonique $E \rightarrow E_n$ induit des isomorphismes $E'/I_n.E' \cong E'_n$ et $E''/I_n.E'' \cong E''_n$.

Démonstration. — Récurrence sur n .

Soit $n = 1$. L'équivalence de (a) et (b) constitue la proposition 2. 1. Si les conditions (a) et (b) sont vérifiées pour l'élément $s_1 \in \Omega^{\text{su}}$, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{Q} \xrightarrow{\sigma_1} \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}_1 \rightarrow 0.$$

où σ_1 désigne le morphisme $(s_1, j(s_1))$. Alors, $\mathcal{D}_1$ est un couple exact cohérent en vertu de I. 2. 1. Ceci prouve (c). La même suite exacte entraîne l'exactitude de :

$$0 \rightarrow {}_t D \xrightarrow{s_1} {}_t D \rightarrow {}_t D_1 \rightarrow 0 \quad (\text{lemme II. 1. 4}),$$

d'où l'on tire un triangle exact :

$$\begin{array}{ccc} \eta_* \mathcal{D} & \xrightarrow{s_1} & \eta_* \mathcal{D} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \eta_* \mathcal{D}_1 & \end{array}$$

Comme s_1 est régulier dans $\eta_* \mathcal{D}$, (d) en découle. De même, la suite exacte :

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{s_1} E \rightarrow E_1 \rightarrow 0$$

conduit à un triangle exact :

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{s_1} & E' \\ & \searrow & \swarrow \\ & E'_1 & \end{array}$$

Comme s_1 est régulier dans E' , le triangle se réduit à la suite exacte :

$$0 \rightarrow E' \xrightarrow{s_1} E' \rightarrow E'_1 \rightarrow 0.$$

Le même raisonnement appliqué à la dernière suite donne la suite exacte :

$$0 \rightarrow E'' \xrightarrow{s_1} E'' \rightarrow E''_1 \rightarrow 0.$$

On a donc bien les isomorphismes $E'/s_1 \cdot E' \cong E'_1$ et $E''/s_1 \cdot E'' \cong E''_1$ qui constituent (e).

Supposons maintenant $n > 1$ et admettons la proposition au rang $n-1$. Soit $s_1, \dots, s_n \in \Omega^{\text{su}}$ une suite régulière dans D et $\eta_* \mathcal{L}$. Il est clair que la suite $s_1, \dots, s_{n-1}$ est également régulière dans D et $\eta_* \mathcal{L}$. Elle est donc régulière dans E, E' et E'' . $\mathcal{L}_{n-1}$ est un couple exact cohérent et l'on a les

isomorphismes canoniques :

$$\eta_* \mathcal{D}/I_{n-1} \cdot \eta_* \mathcal{D} \cong \eta_* \mathcal{D}_{n-1}$$

$$E'/I_{n-1} \cdot E' \cong E'_{n-1}$$

$$E''/I_{n-1} \cdot E'' \cong E''_{n-1}.$$

Comme la suite $s_1, \dots, s_n$ est régulière dans D et $\eta_* \mathcal{D}$, il en découle que s_n est régulier dans D_{n-1} et $\eta_* \mathcal{D}_{n-1}$, donc, en vertu du cas $n=1$, s_n est régulier dans E_{n-1} , E'_{n-1} et E''_{n-1} , le couple $\mathcal{D}_n$ est exact, et on a :

$$\eta_* \mathcal{D}/I_n \cdot \eta_* \mathcal{D} \cong \eta_* \mathcal{D}_{n-1}/s_n \cdot \eta_* \mathcal{D}_{n-1} \cong \eta_* \mathcal{D}_n$$

$$E'/I_n \cdot E' \cong E'_{n-1}/s_n \cdot E'_{n-1} \cong E'_n$$

$$E''/I_n \cdot E'' \cong E''_{n-1}/s_n \cdot E''_{n-1} \cong E''_n.$$

Il en découle que $s_1, \dots, s_n$ est régulière dans E , E' et E'' et que les affirmations (c), (d) et (e) sont vérifiées.

On démontre de la même manière que (b) entraîne (a), (c), (d) et (e). $\square$

COROLLAIRE. — Pour qu'une suite $s_1, \dots, s_n \in \Omega^{\text{su}}$ soit régulière propre dans D et régulière dans $\eta_* \mathcal{D}$, il faut et il suffit qu'elle soit régulière propre dans E et régulière dans E' et E'' .

Démonstration. — Il suffit de remarquer que si le couple $\mathcal{D}_n$ est exact, $D_n = 0$ si et seulement si $E_n = 0$. $\square$

Exemple. Considérons à nouveau le couple-base $\mathcal{S}$. Comme $\eta_* \mathcal{S} = 0$, on obtient : une suite $s_1, \dots, s_n \in \Omega^{\text{su}}$ est régulière dans Ω^{su} (respectivement, régulière propre) si et seulement si elle est régulière dans W et $H_*(W)$ (respectivement, régulière propre dans W et régulière dans $H_*(W)$).

Si, par exemple, $s_1, \dots, s_n$ sont des éléments de Ω^{su} dont les images dans W sont respectivement $x_1^4, x_4 \bar{x}_4, x_6 \bar{x}_6, \dots, x_{2n} \bar{x}_{2n}$ ($n \geq 2$) (cf. I.1.2), il est facile de vérifier que la suite $s_1, \dots, s_n$ est régulière propre dans W et $H_*(W)$. C'est donc une suite régulière propre dans Ω^{su} .

Notons, pour en finir avec cet exemple, que si $s_1, \dots, s_n$ est une suite régulière dans Ω^{su} , on a :

$$\text{Tor}_i^{\Omega^{\text{su}}}(\Omega^{\text{su}}/I_n, \Omega^{\text{su}}, W) = 0$$

et

$$\mathrm{Tor}_i^{\Omega^{\mathrm{su}}}(\Omega^{\mathrm{su}}/I_k, \Omega^{\mathrm{su}}, H_*(W)) = 0$$

pour tout $k \leq n$ et $i > 0$, en vertu du critère homologique cité ci-dessus. Nous utiliserons cette propriété dans l'étude des idéaux annulateurs des éléments de D .

DÉFINITION. — Nous appellerons *suite régulière dans $\mathcal{D}$* toute suite régulière dans D et $\eta_* \mathcal{D}$. De même, une suite régulière dans $\mathcal{D}$ sera dite *suite régulière propre dans $\mathcal{D}$* , si elle est régulière propre dans D .

2.4. Nous avons vu que dans Ω^{su} il existe des suites régulières propres aussi longues qu'on le veut. Cette situation est tout à fait générale :

PROPOSITION. — Soit $\mathcal{D}$ un couple exact cohérent et $k < n$ deux entiers positifs. Alors, toute suite $s_1, \dots, s_k \in \Omega^{\mathrm{su}}$ régulière (resp. régulière propre) dans $\mathcal{D}$ peut être prolongée en une suite $s_1, \dots, s_n$ régulière (resp. régulière propre) dans $\mathcal{D}$.

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas où $n = k + 1$. Soit donc $s_1, \dots, s_k$ une suite régulière dans $\mathcal{D}$. Si $D/I_k \cdot D = 0$, on pose $s_{k+1} = s_n = 0$, et il n'y a rien à démontrer. Si par contre $D/I_k \cdot D \neq 0$, i.e. $\mathcal{D}_k \neq 0$, on déduit de 2.2 l'existence d'un $s_{k+1} \in \Omega^{\mathrm{su}}$ régulier propre dans $\mathcal{D}_k$. La suite $s_1, \dots, s_{k+1}$ est alors régulière propre dans $\mathcal{D}$, $\square$

Rappelons qu'on appelle *profondeur* d'un R -module M la borne supérieure des entiers positifs n pour lesquels il existe une suite régulière propre de longueur n .

COROLLAIRE. — Si $\mathcal{D}$ est un couple exact cohérent non nul, le Ω^{su} -module D est de profondeur infinie.

C'est le cas, par exemple, pour tout Ω^{su} -module $\Omega_*^{\mathrm{su}}(X)$, où X est un complexe cellulaire fini non vide.

2.5. Soit M un R -module et $\alpha \in M$. On notera $A(\alpha) \subset R$ l'idéal annulateur de α , i.e. l'idéal des $r \in R$ tels que $r\alpha = 0$.

Pour tout R -module M , on notera $\gamma A(\alpha)$ la borne supérieure des entiers positifs n pour lesquels il existe une suite $r_1, \dots, r_n \in A(\alpha)$ régulière propre dans R . On peut démontrer (cf. la démonstration ci-dessous) que si $\alpha \neq 0$, on a toujours :

$$\gamma A(\alpha) \leq dh_R M.$$

Appliqué au $\Omega^{\text{su}}\text{-module } \Omega_*^{\text{su}}(X)$, ce résultat est sans intérêt car, en général, $dh_{\Omega^{\text{su}}} \Omega_*^{\text{su}}(X) = \infty$ (cf. II. 1. 11). La proposition suivante donne une inégalité plus forte :

PROPOSITION. — Soit $\mathcal{D}$ un couple exact cohérent. Alors, pour tout $\alpha \in D$ non nul, on a :

$$\gamma A(\alpha) \leq dh \mathcal{D}.$$

Démonstration. — Si $dh \mathcal{D} = \infty$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, il existe une résolution projective finie :

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_m \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow 0 \quad (\text{cf. II. 1. 3}).$$

Dans la suite exacte correspondante :

$$0 \rightarrow D_m \rightarrow \dots \rightarrow D_0 \rightarrow D \rightarrow 0,$$

chaque D_j est somme directe de Ω^{su} ou W (cf. I. 2. 9). Soit $s_1, \dots, s_n$ une suite régulière propre dans Ω^{su} contenue dans $A(\alpha)$. D'après 2. 3, on a alors :

$$\text{Tor}_i^{\Omega^{\text{su}}}(\Omega^{\text{su}}/I_n \Omega^{\text{su}}, D_j) = 0 \quad \text{pour tout } i > 0 \text{ et } 0 \leq j \leq m.$$

Par récurrence, on en déduit que :

$$\text{Tor}_i^{\Omega^{\text{su}}}(\Omega^{\text{su}}/I_n \Omega^{\text{su}}, D) = 0 \quad \text{pour } i \geq m + 1.$$

Par ailleurs, un théorème de dualité de Koszul (cf. [6]) montre que :

$$\text{Tor}_n^{\Omega^{\text{su}}}(\Omega^{\text{su}}/I_n \Omega^{\text{su}}, D) \cong \text{Hom}_{\Omega^{\text{su}}}(\Omega^{\text{su}}/I_n \Omega^{\text{su}}, D).$$

Ce dernier groupe est non nul puisque l'application $s \mapsto s\alpha$ de Ω^{su} dans D se factorise en une application non nulle $\Omega^{\text{su}}/I_n \Omega^{\text{su}} \rightarrow D$.

En comparant les deux affirmations, on obtient $n \leq m$. $\square$

2. 6. La fin de ce paragraphe est consacrée à la construction de quelques exemples de couples exacts cohérents ayant une dimension homologique donnée. Le problème de la réalisation de ces couples comme couples de la forme $\mathcal{S}(X)$, où X est un complexe cellulaire fini, reste intact.

Soit n un entier positif et $s_1, \dots, s_n \in \Omega^{\text{su}}$ une suite régulière propre dans Ω^{su} (il en existe en vertu de l'exemple 2. 3). En partant du couple $\mathcal{S} = \mathcal{S}$,

construisons le couple $\mathcal{L}_n = \mathcal{S}_n$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\text{SU}}/I_n \cdot \Omega^{\text{SU}} & \xrightarrow{i} & \Omega^{\text{SU}}/I_n \cdot \Omega^{\text{SU}} \\ & \swarrow \varepsilon \quad \searrow j & \\ & W/I_n \cdot W & \end{array}$$

qui est un couple exact cohérent (cf. 2.3 (c)).

PROPOSITION. — $dh \mathcal{S}_n = n$.

Démonstration. — On a $I_n \subset A(1)$. Donc $dh \mathcal{S}_n \geq \gamma A(1) \geq n$ (cf. 2.5). D'autre part,

$$\eta_* \mathcal{S}_n = \eta_* \mathcal{S}/I_n \cdot \eta_* \mathcal{S} = 0.$$

La proposition II.1.2 montre alors qu'il suffit de prouver :

$$\begin{aligned} dh_W(W/I_n \cdot W) &\leq n, \\ dh_{H_*(W)}(H_*(W)/I_n \cdot H_*(W)) &\leq n. \end{aligned}$$

Or, la construction de Koszul (cf. [5], VII.7, problème 3), appliquée à la suite $s_1, \dots, s_n$ régulière dans W et $H_*(W)$, donne des résolutions libres de longueur n de $W/I_n \cdot W$ et $H_*(W)/I_n \cdot H_*(W)$ sur W et $H_*(W)$ respectivement, d'où le résultat. $\square$

2.7. L'exemple que l'on vient de construire a la particularité que $dh_W E_n = dh_{H_*(W)} H_*(E_n)$. Nous allons construire des exemples qui montrent qu'en fait ces deux invariants sont totalement indépendants. Plus précisément, étant donnés deux entiers non négatifs m et n , nous allons construire un couple exact $\mathcal{L}(m, n)$ de dimension homologique $\sup(m, n)$ tel que :

$$\begin{aligned} dh_W E(m, n) &= m \\ dh_{H_*(W)} H_*(E(m, n)) &= n. \end{aligned}$$

Commençons par la construction de $\mathcal{L}(m, 0)$. Soit m un entier non négatif. Fixons, une fois pour toutes, un W -module différentiel cohérent E tel que $dh_W E = m$ (on peut, par exemple, prendre le module E_m du

couple $\mathcal{D}_m = \mathcal{S}_m$ construit dans 2. 6). Soit $\mathcal{J}(E)$ le couple

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{0} & E \\ \partial \swarrow & & \searrow j \\ & L_E & \end{array}$$

dans lequel $L_E = \sum^2 E \oplus E$, $\sum^2 E$ étant la deuxième suspension de E , et où j et ∂ sont définis par :

$$j(e) = (de, \bar{e}) \quad (e \in E; \bar{e} = e - x_1 de, \text{ cf. I. 1. 2})$$

$$\partial(e, f) = e + df \quad (e \in \sum^2 E, f \in E).$$

Il est clair que le couple $\mathcal{J}$ de I. 2. 3 est un cas particulier de cette construction. On montre, par un calcul direct, que $\mathcal{J}(E)$ est un couple exact cohérent.

DÉFINITION. — $\mathcal{L}(m, 0) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{J}(E)$.

PROPOSITION. — (i) Le couple $\mathcal{L}(m, 0)$ est de dimension homologique finie;

(ii) $dh_W E(m, 0) = m$;

(iii) $H_*(E(m, 0)) \cong H_*(W)$.

Démonstration. — (i) Comme $tD(m, 0) = t\Omega^{\text{su}}$, on a

$$\eta_* \mathcal{L}(m, 0) = \eta_* \mathcal{S} = 0.$$

Donc (cf. II. 1. 7), $dh \mathcal{L}(m, 0) < \infty$.

(ii) On a $E(m, 0) = W \oplus \sum^2 E \oplus E$. Il est facile d'en déduire que :

$$dh_W E(m, 0) = dh_W E = m.$$

(iii) On a $\mathcal{J}(E)' = 0$, donc $\mathcal{L}(m, 0)' = \mathcal{S}'$, d'où

$$H_*(E(m, 0)) = H_*(W). \quad \square$$

2. 8. Soit $\mathcal{L}$ un couple exact cohérent de dimension homologique finie, et $s \in \Omega_r^{\text{su}}$ un élément régulier dans $\mathcal{L}$ (i.e. régulier dans D). On définit un couple $\mathcal{L}^s = (D^s, E^s, j^s, \partial^s)$ de la manière suivante :

On pose

$$D^s = D \oplus \sum^r E / \{(sm, jm) \mid m \in D\}$$

$$E^s = E \oplus \sum^{r+2} E.$$

On définit $j^s: D^s \rightarrow E^s$ par : $j^s[m, e] = (jm - s\bar{e}, -de)$, où $m \in D$, $e \in \sum^r E$, et où $[m, e]$ désigne la classe de (m, e) dans D^s . Il est clair que j^s est bien défini car $j^s[sm, jm] = (0, 0)$.

Enfin, $\partial^s: E^s \rightarrow D^s$ est défini par : $\partial^s(e, f) = [\partial e, -f]$ ($e \in E, f \in \sum^{r+2} E$). On voit tout de suite que j^s et ∂^s sont des morphismes de Ω^{su} -modules de degrés 0 et -2 respectivement. La proposition suivante se démontre par un calcul direct, facile, mais long.

PROPOSITION. — $\mathcal{D}^s$ est un couple exact cohérent. $\square$

2.9. Le sens de la construction de $\mathcal{D}^s$ devient plus clair si l'on remarque que $\mathcal{D}^s$ entre dans un triangle exact :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{D} \\ \delta \swarrow & & \searrow J \\ & \mathcal{D}^s & \end{array}$$

dont les morphismes sont définis comme suit :

- σ est le morphisme $(\iota s, 0)$;
- $\delta = (\theta, \omega)$, où $\theta: D^s \rightarrow D$ et $\omega: E^s \rightarrow E$ sont donnés par

$$\theta[m, e] = -\partial e \quad (m \in D, e \in \sum^r E)$$

$$\omega(e, f) = f \quad (e \in E, f \in \sum^{r+2} E);$$

- $J = (\rho, \mu)$, où $\rho: D \rightarrow D^s$ et $\mu: E \rightarrow E^s$ sont donnés par

$$\rho(m) = [m, 0] \quad (m \in D)$$

$$\mu(e) = (e, 0) \quad (e \in E).$$

PROPOSITION. — *Le triangle*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{D} \\ \delta \swarrow & & \searrow J \\ & \mathcal{D}^{\sharp} & \end{array}$$

est correctement défini et est exact ⁽³⁾.

Démonstration. — Il faut montrer que σ , J , δ sont des morphismes de couples exacts (9 vérifications) et que le triangle est exact (18 inclusions à vérifier).

Toutes les vérifications sont triviales. $\square$

2. 10. Les propriétés homologiques de $\mathcal{D}^{\sharp}$ découlent de la proposition suivante :

PROPOSITION. — (i) $dh \mathcal{D}^{\sharp} < \infty$;

(ii) $dh_W E^{\sharp} = dh_W E$;

(iii) l'injection canonique $\mu: E \rightarrow E^{\sharp}$ induit un isomorphisme de $H_*(W)$ -modules

$$H_*(E) / s H_*(E) \cong H_*(E^{\sharp}).$$

Démonstration. — Considérons la suite exacte de W -modules différentiels

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\mu} E^{\sharp} \xrightarrow{\omega} E \rightarrow 0$$

extraite du triangle exact de 2. 9, et le triangle exact correspondant

$$\begin{array}{ccc} H_*(E) & \xrightarrow{\mu_*} & H_*(E^{\sharp}) \\ \beta \swarrow & & \searrow \omega_* \\ & H_*(E) & \end{array}$$

Par définition, le connectant β envoie la classe du cycle $f \in Z(E)$ dans la classe de $\mu^{-1} d^{\sharp}(0, f)$ puisque $\omega(0, f) = f$. Or

$$d^{\sharp}(0, f) = j^{\sharp}[0, -f] = (sf)^{\sharp}, \quad df = (sf, 0).$$

(3) Ainsi $\mathcal{D}^{\sharp}$ est le « cône » de σ

car $df=0$ et $\tilde{f}=f-x_1 df=f$. Donc, β est précisément la multiplication par s .

Comme s est régulier dans $\mathcal{D}$, il l'est également dans $H_*(E)$ (cf. 2.1). On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow H_*(E) \xrightarrow{s} H_*(E) \xrightarrow{\mu_*} H_*(E^s) \rightarrow 0$$

qui prouve (iii).

De plus, comme μ_* commute avec les différentielles des couples $\mathcal{D}'$ et $(\mathcal{D}^s)'$ dérivés des couples $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^s$, on voit que $(d^s)'=0$, donc $dh \mathcal{D}^s < \infty$ (cf. II.1.7).

Enfin, (ii) est évident car $E^s = E \oplus \sum^{r+2} E$. $\square$

COROLLAIRE. — Soit $\mathcal{D}$ un couple exact cohérent de dimension homologique finie, et $s_1=s, s_2, \dots, s_n \in \Omega^{\leq u}$ une suite régulière (respectivement régulière propre) dans $\mathcal{D}$. Alors, $s_2, \dots, s_n$ est une suite régulière (respectivement régulière propre) dans $\mathcal{D}^s$.

Démonstration. — Si la suite $s_1, \dots, s_n$ est régulière (resp. régulière propre) dans $\mathcal{D}$, elle est aussi régulière dans E et $H_*(E)$ (resp. régulière propre dans E et régulière dans $H_*(E)$) en vertu de 2.1. Donc, la suite $s_2, \dots, s_n$ est régulière (resp. régulière propre) dans $E^s = E \oplus \sum^{r+2} E$ et régulière dans $H_*(E^s) = H_*(E)/s H_*(E)$. Comme $dh \mathcal{D}^s < \infty$, le résultat découle du corollaire 2.1. $\square$

2.11. Revenons à la construction de $\mathcal{D}(m, n)$.

THÉOREME. — Soient m, n deux entiers non négatifs. Il existe un couple exact cohérent $\mathcal{D}(m, n)$ de dimension homologique $\sup(m, n)$ tel que :

$$dh_W E(m, n) = m$$

$$dh_{H_*(W)} H_*(E(m, n)) = n.$$

Démonstration. — Le couple $\mathcal{D}(m, 0)$ a été construit dans 2.7. Si $n > 0$, soit $s_1, \dots, s_n$ une suite régulière propre dans $\mathcal{D}(m, 0)$. L'existence d'une telle suite découle de 2.4. Il est facile de constater, en analysant la preuve de 2.4, que l'on peut prendre $s_1, \dots, s_n$ de degrés positifs. Alors, on a :

$$I_n H_*(E(m, 0)) = I_n H_*(W) \neq H_*(W),$$

donc $s_1, \dots, s_n$ est également régulière propre dans $H_*(E(m, 0))$.

Construisons alors $\mathcal{D}(m, 1) = \mathcal{D}(m, 0)^{\sharp}$ à l'aide de $s = s_1$, puis $\mathcal{D}(m, 2) = \mathcal{D}(m, 1)^{\sharp}$ à l'aide de $s = s_2$, etc. Alors, en vertu de 2.9 et 2.10, $\mathcal{D}(m, n)$ est un couple exact cohérent de dimension homologique finie, tel que $dh_W E(m, n) = dh_W(E) = m$. De plus, on a :

$$H_*(E(m, n)) \cong H_*(W)/I_n \cdot H_*(W),$$

et le raisonnement utilisé dans 2.6 montre que

$$dh_{H_*(W)} H_*(E(m, n)) = n.$$

Enfin,

$$dh \mathcal{D}(m, n) = \sup(m, n) \quad (\text{proposition II.1.8}). \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOTT (R.), *Lectures on K(X)*, Harvard Univ., Cambridge, 1962.
- [2] CONNER (P. E.) and FLOYD (E. E.), *Torsion in SU-bordism*, Mem. AMS, n° 60, 1966.
- [3] CONNER (P. E.) and FLOYD (E. E.), The relation of cobordism to K-theories, *Lecture Notes in Math.*, t. 28, 1966.
- [4] KAROUBI (M.), *K-theory. An introduction*, Springer-Verlag, 1978.
- [5] MACLANE (S.), *Homology*, Springer-Verlag, 1963.
- [6] MATLIS (Eb.), The Koszul complex and duality, *Comm. Alg.* t. 1, 1974, p. 87-144.
- [7] OCHANINE (S.), Modules de SU-bordisme. Couples exacts cohérents, *Bull. S.M.F.*, t. 113, 1985, p. 79-98.
- [8] OCHANINE (S.), Modules de SU-bordisme. $\mathcal{S}$ -résolutions de complexes finis, *Bull. S.M.F.*, t. 113, 1985, p. 99-121.
- [9] STONG (R. E.), *Notes on cobordism theory*, Princeton Univ. Press, 1968.