

# BULLETIN DE LA S. M. F.

A. GUICHARDET

## **Méthode des orbites pour les représentations de longueur finie. II**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 115 (1987), p. 197-210

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1987\\_\\_115\\_\\_197\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__197_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## MÉTHODE DES ORBITES POUR LES REPRÉSENTATIONS DE LONGUEUR FINIE. II

PAR

A. GUICHARDET (\*)

**RÉSUMÉ.** — Nous démontrons ici, pour les groupes semi-simples, des résultats analogues à ceux d'un article antérieur portant le même titre et consacré aux groupes de déplacements généralisés; plus précisément nous étudions les extensions de représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie semi-simples construites par la méthode des orbites de Duflo. Nous étudions aussi les extensions des  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules irréductibles « génériques »; nos démonstrations utilisent un outil d'Algèbre Homologique qui apparaissait déjà dans des travaux antérieurs, et des résultats profonds sur les groupes  $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^0$  et  $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^1$  dus à Hecht et Schmid, Vogan, Zuckerman.

**ABSTRACT.** — In this paper we prove for semi-simple groups several results very similar to those of a previous paper with the same title concerning generalized motion groups; more precisely we study here the extensions of irreducible unitary representations of semi-simple Lie groups constructed by Duflo's orbit method. We also study the extensions of "generic" irreducible  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules; our proofs use a homological algebra tool which already appeared in our previous papers, and deep results on the  $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^0$ - and  $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^1$ -groups due to Hecht and Schmid, Vogan, Zuckerman.

### 0. Introduction

Comme son nom l'indique, ce travail fait suite à celui [9] intitulé de la même façon; ce dernier se situait dans le cadre de la méthode des orbites de Duflo appliquée au cas d'un groupe de déplacements généralisé  $G$ ;

---

(\*) Texte reçu le 10 mars 1986

A. GUICHARDET, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, 91128 Palaiseau Cedex (France)

partant d'un élément suffisamment régulier  $f$  de  $\mathfrak{g}^*$ , on montrait que le foncteur  $T_{f, \cdot}^G$  de Duflo se prolonge en une équivalence entre une catégorie de  $\widetilde{G}(f)$ -modules de longueur finie et une catégorie de  $G$ -modules  $C^\infty$  de longueur finie; la démonstration reposait sur des isomorphismes entre groupes de cohomologie  $\text{Ext}_{G(f)}^n$  et  $\text{Ext}_G^n$ .

Le présent travail est consacré à des résultats analogues dans le cas des groupes semi-simples; indiquons deux différences importantes entre ce cas et le précédent : d'une part on remplace ici les  $G$ -modules  $C^\infty$  par des  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules, et les groupes  $\text{Ext}_G^n$  par les groupes  $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^n$ ; d'autre part on n'utilise ici que des orbites coadjointes qui sont, en un certain sens, très régulières, ce qui fait que les extensions entre  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules distincts sont toujours triviales et que les algèbres de cohomologie  $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}(\pi, \pi)$  sont toujours des algèbres extérieures — en d'autres termes on est toujours dans la situation du théorème 3 de [9].

En fait les résultats qu'on vient de mentionner sont des conséquences faciles de certains autres, qui se situent dans le cadre de l'« induction parabolique cuspidale » : étant donné un sous-groupe parabolique cuspidal  $P = MAN$  et une « série discrète »  $\delta$  de  $M$ , on montre que l'application qui, à un élément suffisamment régulier  $v$  de  $\mathfrak{a}_c^*$ , fait correspondre la « série principale généralisée »  $I_{P, \delta, v}$ , se prolonge en une équivalence entre une catégorie de  $\mathfrak{a}$ -modules de longueur finie et une catégorie de  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules de longueur finie; on retrouve ainsi un théorème de DELORME [3]; la démonstration, ici encore à bases d'isomorphismes entre groupes  $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^n$  et  $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^n$ , repose sur des résultats récents de Vogan et Zuckerman sur les groupes  $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^n$ , et de Hecht et Schmid sur les groupes d'holonomie  $H_q(n, I_{P, \delta, v})$ ; en ce qui concerne ces derniers, nous utilisons à plusieurs reprises des formulations dues à Delorme. Je profite de l'occasion pour le remercier pour de nombreuses et utiles conversations, qui m'ont grandement aidé dans la préparation de ce travail.

*N.B.* (ajouté à la demande du referee). DELORME démontre dans [3] un résultat plus général que le nôtre, par une méthode naturellement plus compliquée; il construit d'abord un foncteur inverse qui, dans le cas qui nous intéresse ici, consiste simplement à associer à tout objet  $V$  de  $\text{Ext}(\mathfrak{g}, K; \{I_{P, \delta, v}\})$  le  $A$ -module  $\text{Hom}_{(M, K_M)}(E_\delta, H_0(n, V)_{v+\rho}) \otimes C_{-\rho}$ . Notre méthode a (peut-être) l'avantage de souligner l'intérêt du lemme catégoriel qu'elle utilise (proposition 2.1 de [7]).

## 1. Énoncé des résultats dans le cadre de l'induction parabolique cuspidale

On note

- $G$  un groupe de Lie réel semi-simple connexe de centre fini;
- $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie;
- $\theta$  une involution de Cartan de  $G$ ;
- $K$  l'ensemble des points fixes de  $\theta$ , sous-groupe compact maximal de  $G$ ;
- $H = TA$  un sous-groupe de Cartan  $\theta$ -invariant;
- $MA = Z_G(A)$ ;
- $K_M = K \cap M$ , sous-groupe compact maximal de  $M$ ;
- $W = N_G(A)/Z_G(A)$  (groupe de Weyl de  $A$ );
- $P = MAN$  un sous-groupe parabolique cuspidal admettant  $MA$  comme facteur de Lévi;
- $\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$  les algèbres de Lie de  $P, M, A, N$ ;
- $\rho$  la demi-somme des racines de  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{n}$ ;
- $\delta$  un élément de  $\hat{M}_A$  (série discrète de  $M$ );
- $\nu$  un élément de  $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$  (dual complexe de  $\mathfrak{a}$ );
- $I_{P, \delta, \nu}$  le  $(\mathfrak{g}, K)$ -module correspondant (série principale généralisée).

On fait les hypothèses suivantes :

- (H<sub>1</sub>) le stabilisateur de  $(\delta, \nu)$  dans  $W$ , noté  $W_{\delta, \nu}$ , est réduit à  $\{1\}$ ;
- (H<sub>2</sub>)  $I_{P, \delta, \nu}$  est simple.

Grâce à (H<sub>2</sub>), on peut, sans changer  $I_{P, \delta, \nu}$ , choisir  $P$  de façon que l'on ait

- (H<sub>3</sub>)  $\text{Re } \nu \in -\bar{C}_P$  où  $C_P$  est la chambre de Weyl ouverte définie par  $\mathfrak{n}$ .

On note

- $\mathcal{C}_A$  la catégorie des représentations différentiables de  $A$  dans des espaces de Fréchet; idem pour  $\mathcal{C}_P, \mathcal{C}_G$ , etc.;
- $E_\pi$  l'espace d'une représentation  $\pi$ ;
- $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}, K}$  la catégorie des  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules; idem pour  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}, K_M}$ , etc.;
- $\text{Ext}(A, \{\nu\})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}_A$  formée des représentations de longueur finie à sous-quotients simples isomorphes à  $\nu$  (on dit aussi « représentations primaires de type  $\nu$  »);
- $\text{Ext}(\mathfrak{g}, K, \{I_{P, \delta, \nu}\})$  l'analogue dans  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}, K}$ .

On définit un foncteur  $T: \mathcal{C}_A \rightarrow \mathcal{C}_{\mathfrak{g}, K}$  de la façon suivante : notons  $E_\delta$  l'ensemble des vecteurs différentiables de la représentation unitaire  $\delta$ ; soit  $\pi$  un objet de  $\mathcal{C}_A$ ; notons

- $E_\delta \hat{\otimes} E_\pi$  le produit tensoriel projectif des espaces considérés;
- $\text{Ind}_P^G(\delta \times e^p \pi \times 1)$  l'ensemble des  $f \in C^\infty(G, E_\delta \hat{\otimes} E_\pi)$  vérifiant

$$f(gman) = (\delta(m))^{-1} \otimes a^{-p} \cdot \pi(a)^{-1} \cdot f(g)$$

avec action de  $G$  par translations à gauche. Alors  $T(\pi)$  est par définition le  $(\mathfrak{g}, K)$ -module formé des vecteurs  $K$ -finis de cette représentation; l'action de  $T$  sur les morphismes est la suivante : si  $u \in \text{Hom}_A(\pi_1, \pi_2)$ , alors

$$T(u)(f)(g) = (\text{id}_\delta \otimes u) \cdot f(g).$$

On remarquera que  $T(v)$  n'est autre que  $I_{P, \delta, v}$ .

Il est immédiat que  $T$  est *fortement exact*, i.e. transforme toute suite exacte forte dans  $\mathcal{C}_A$  en une suite exacte dans  $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}, K}$ . On peut alors, comme il a été expliqué dans [7], n° 2.3, construire des applications

$$T_{v, v}^n: \text{Ext}_A^n(v, v) \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^n(I_{P, \delta, v}, I_{P, \delta, v}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**THÉOREME 1.** – (i) *Le foncteur  $T$  induit une équivalence de catégories de  $\text{Ext}(A, \{v\})$  sur  $\text{Ext}(\mathfrak{g}, K; \{I_{P, \delta, v}\})$ .*

(ii) *Les applications  $T_{v, v}^n$  sont des isomorphismes.*

**Remarque 1.** – La première assertion a été démontrée par une autre méthode dans [3], théorème 2 (ii).

**Remarque 2.** – Tous les groupes  $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^n$  sont nuls entre deux modules  $I_{P, \delta, v}$  non isomorphes, vérifiant les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  et, en outre, admettant des caractères infinitésimaux réguliers (cf. [11], lemme 9.2.18).

## 2. Énoncé des résultats dans le cadre de la méthode des orbites de Duflo

La méthode en question a été rappelée dans [9]; ajoutons seulement ici que lorsque  $G$  est semi-simple, une forme  $f$  est bien polarisable si et seulement si elle est régulière et semi-simple, ou encore si et seulement si  $G(f)$  est un sous-groupe de Cartan ([5], chapitre 2, lemme 1).

**NOTATION.** – Si  $(E, \pi)$  est une représentation de  $G$ , on note  $(E_{(K)}, \pi_{(K)})$  le  $(\mathfrak{g}, K)$ -module associé, ensemble des vecteurs  $K$ -finis de  $E$ .

On a alors les résultats suivants, analogues à ceux de [9].

**THÉOREME 2.** — Soit  $f$  un élément admissible et bien polarisable de  $\mathfrak{g}^*$ ; posons  $\mathcal{E} = X^{\text{irr}}(G, f)$  (rappelons que ses éléments sont de dimension finie) et  $\mathcal{F} = \{(T_{f,\tau}^G)_{(\mathbf{K})} \mid \tau \in \mathcal{E}\}$ .

(i) Il existe une sous-catégorie  $\mathcal{E}'_{G(U)}$  de  $\mathcal{E}_{G(U)}$  ayant les propriétés suivantes :

- $\text{Ext}(\widetilde{G(f)}, \mathcal{E}) \subset \mathcal{E}'_{G(U)}$ ;
- pour tout objet  $E$  de la sous-catégorie, il existe une résolution forte relativement injective de  $E$  dans la grande catégorie, formée d'objets de la sous-catégorie.

(ii) Il existe un foncteur  ${}^\circ T : \mathcal{E}'_{G(U)} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathfrak{g}, \mathbf{K}}$  ayant les propriétés suivantes :

- ${}^\circ T$  prolonge l'application  $\tau \rightarrow (T_{f,\tau}^G)_{(\mathbf{K})}$ ;
- ${}^\circ T$  induit une équivalence de catégories de  $\text{Ext}(G(f), \mathcal{E})$  sur  $\text{Ext}(\mathfrak{g}, \mathbf{K}; \mathcal{F})$ ;
- les applications

$${}^\circ T_{\tau_1, \tau_2} : \text{Ext}_{G(U)}^n(\tau_1, \tau_2) \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbf{K}}^n({}^\circ T(\tau_1), {}^\circ T(\tau_2))$$

définies par  ${}^\circ T$  sont bijectives pour tous  $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{E}$ .

**THÉOREME 3.** — (i) L'ensemble  $\mathcal{E}$  est fini; notons  $\tau^1, \dots, \tau^r$  ses éléments,  $\pi^1, \dots, \pi^r$  leurs images par  ${}^\circ T$ .

(ii) Si  $i \neq j$  on a

$$\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbf{K}}^n(\pi^i, \pi^j) = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

(iii) La catégorie  $\text{Ext}(\mathfrak{g}, \mathbf{K}; \mathcal{F})$  est somme directe des catégories

$$\text{Ext}(\mathfrak{g}, \mathbf{K}; \{\pi^i\}), \quad i = 1, \dots, r.$$

(iv) Pour tout  $i$ , l'algèbre de cohomologie  $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, \mathbf{K}}^*(\pi^i, \pi^i)$  est isomorphe à l'algèbre extérieure  $\Lambda^* \mathbf{R}^d$  où  $d$  est la dimension d'un voisinage de  $T_{f, \tau^i}^G$  dans  $\hat{G}_f$  (dual réduit de  $G$ ).

(v) Pour tout  $i$ , la catégorie  $\text{Ext}(\mathfrak{g}, \mathbf{K}; \{\pi^i\})$  est équivalente à celle des représentations de dimension finie de  $\mathbf{R}^d$  dont tous les sous-quotients irréductibles sont triviaux.

THÉOREME 4. — Prenons  $f_1$  et  $f_2$  comme au théorème 2 et non conjuguées par  $G$ , et  $\tau_i \in X^{\text{irr}}(G, f_i)$ : posons  $\pi_i = (T_{f_i, \tau_i}^G)_{(K)}$ . Alors

$$\text{Ext}_{g, K}^n(\pi_1, \pi_2) = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

### 3. Démonstration du théorème 1

D'après [7], proposition 2.1, la première assertion est une conséquence de la seconde; pour démontrer celle-ci, on va construire un isomorphisme

$$\tilde{T}: \text{Ext}_{g, K}^n(I_{P, \delta, v}, I_{P, \delta, v}) \rightarrow \text{Ext}_A^n(v, v)$$

et montrer que  $\tilde{T} \circ T_{v, v}^n$  est l'identité. Remarquons d'abord que  $T$  est composé de deux foncteurs  $T: \mathcal{C}_A \rightarrow \mathcal{C}_P$  et  $T': \mathcal{C}_P \rightarrow \mathcal{C}_{g, K}$  où

$$T(\pi) = \delta \times e^p \pi \times 1 \quad \text{pour tout } \pi \in \mathcal{C}_A$$

$$T'(\sigma) = (\text{Ind}_P^G \sigma)_{(K)} \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{C}_P;$$

donc ([7], n° 2.3, propriété (vi))

$$T_{v, v}^n = T_{T'(v), T'(v)}'^n \circ T_{v, v}^n$$

relation que nous écrirons plus brièvement

$$T^n = T'^n \circ T^n.$$

Ensuite  $T$  sera défini comme composé de trois isomorphismes

$$T'': \text{Ext}_{g, K}^n(I_{P, \delta, v}, I_{P, \delta, v}) \rightarrow \text{Ext}_{p, K_M}^n(I_{P, \delta, v}, \delta \times (v + \rho) \times 1)$$

$$\begin{aligned} T''': \text{Ext}_{p, K_M}^n(I_{P, \delta, v}, \delta \times (v + \rho) \times 1) \\ \rightarrow \text{Ext}_{m+a, K_M}^n(H_0(n, I_{P, \delta, v}), \delta \times (v + \rho)) \end{aligned}$$

$$T^*: \text{Ext}_{m+a, K_M}^n(H_0(n, I_{P, \delta, v}), \delta \times (v + \rho)) \rightarrow \text{Ext}_g^n(v, v).$$

On va maintenant construire ces trois isomorphismes, après quoi on montrera que

$$T^v \circ T^{iv} \circ T'' \circ T'^n \circ T^n = \text{id}.$$

#### NOTATIONS

Nous identifierons  $\text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^n(\dots)$  à  $H^n(\mathfrak{g}, K; \text{Hom}(\dots))$ , et de même pour les autres groupes. Pour tout  $\mathfrak{a}$ -module  $E$  et toute forme linéaire complexe  $\mu$  sur  $\mathfrak{a}$ , nous noterons  $E_\mu$  le plus grand sous-espace de  $E$  sur lequel  $X - \mu(X)$  opère de façon nilpotente pour tout  $X \in \mathfrak{a}$  (sous-espace propre généralisé de poids  $\mu$ ).

#### CONSTRUCTION DE $T''$

On définit  $T''$  comme étant l'isomorphisme de Shapiro, qu'on peut expliciter comme suit (cf. [1], III.2.5) : notons  $\Lambda$  le  $(\mathfrak{p}, K_M)$ -morphisme canonique de  $I_{\mathfrak{p}, \delta, v}$  vers  $\delta \times (v + \rho) \times 1$ , qui associe à tout  $f \in I_{\mathfrak{p}, \delta, v}$  l'élément  $f(1)$ ; alors, pour tout cocycle  $\varphi \in Z^n(\mathfrak{g}, K; \text{Hom}(I_{\mathfrak{p}, \delta, v}, I_{\mathfrak{p}, \delta, v}))$ ,  $T''(\varphi)$  est défini par

$$T''(\varphi)(X_1, \dots, X_n) = \Lambda \circ \varphi(X_1, \dots, X_n), \quad \forall X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{p}.$$

#### CONSTRUCTION DE $T^{iv}$

Il existe une suite spectrale (de Hochschild-Serre, cf. [1], I.6.5) vérifiant

$$(1) \quad E_2^{p, q} = H^p(\mathfrak{m} + \mathfrak{a}, K_M; H^q(\mathfrak{n}, \text{Hom}(I_{\mathfrak{p}, \delta, v}, \delta \times (v + \rho) \times 1)))$$

et convergeant vers  $H^*(\mathfrak{p}, K_M; \text{Hom}(I_{\mathfrak{p}, \delta, v}, \delta \times (v + \rho) \times 1))$ ; comme  $\mathfrak{n}$  opère trivialement sur  $\delta \times (v + \rho) \times 1$ , l'examen des complexes standard calculant l'homologie et la cohomologie de  $\mathfrak{n}$  montre immédiatement que l'on a des égalités de  $(\mathfrak{m} + \mathfrak{a}, K_M)$ -modules :

$$(2) \quad H^q(\mathfrak{n}, \text{Hom}(I_{\mathfrak{p}, \delta, v}, \delta \times (v + \rho) \times 1)) = \text{Hom}(H_q(\mathfrak{n}, I_{\mathfrak{p}, \delta, v}), \delta \times (v + \rho)).$$

LEMME 1. — (i) Pour tout  $q \geq 0$  le  $\mathfrak{a}$ -module  $H_q(\mathfrak{n}, I_{\mathfrak{p}, \delta, v})$  est somme directe finie de sous-espaces propres généralisés  $H_q(\mathfrak{n}, I_{\mathfrak{p}, \delta, v})_{\mu + \rho}$  où  $\mu$  parcourt  $\mathfrak{a}_c^*$ ; ces sous-espaces sont évidemment des  $(\mathfrak{m}, K_M)$ -modules.

(ii) On a  $H_q(\mathfrak{n}, I_{\mathfrak{p}, \delta, v})_{v + \rho} = 0$  pour tout  $q > 0$ .



(iii) Le  $(m, K_M)$ -module  $H_0(n, I_{P, \delta, v})_{v+p}$  est la somme directe des  $w \cdot \delta$  où  $w$  parcourt  $W_v$ , stabilisateur de  $v$  dans  $W$ ; en outre  $\delta$  y intervient une seule fois, dans un sous-module que nous noterons  $H_0(n, I_{P, \delta, v})_{\delta, v+p}$ .

(iv) Le  $(m+a, K_M)$ -module  $H_0(n, I_{P, \delta, v})_{\delta, v+p}$  est isomorphe à  $\delta \times (v+p)$ .

*Démonstration.* — (i) Résulte de [10], formule (2.29).

(ii) Résulte de [2], p. 139, lignes 12 et 13, avec  $V_i = I_{P, \delta, v}$  puisque ce dernier a été supposé simple.

(iii) Résulte de [2], proposition 6 (i), et du fait que  $W_{\delta, v}$  a été supposé trivial.

(iv) L'action de  $a$  dans le module considéré commute à la représentation irréductible  $\delta$ , donc est un caractère, nécessairement égal à  $v+p$ .

LEMME 2. — On a

$$E_2^{p, q} = \begin{cases} H^p(m+a, K_M; \text{Hom}(H_0(n, I_{P, \delta, v})_{v+p}, \delta \times (v+p))) & \text{si } q=0 \\ 0 & \text{si } q>0. \end{cases}$$

*Démonstration.* — D'après (1), (2) et le lemme 1 (i), on a

$$(3) \quad E_2^{p, q} = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{a}} H^p(m+a, K_M; \text{Hom}(H_q(n, I_{P, \delta, v})_{\mu+p}, \delta \times (v+p)))$$

(somme directe finie); pour tout  $\mu \neq v$ , la cohomologie de  $a$  dans le module  $\text{Hom}(H_q(n, I_{P, \delta, v})_{\mu+p}, \delta \times (v+p))$  est nulle, donc aussi le terme correspondant dans (3). Si  $\mu = v$ , il l'est encore, pour  $q > 0$ , d'après le lemme 1 (ii).

FIN DE LA CONSTRUCTION DE  $T^v$

Comme  $E_2^{p, q}$  est nul pour tout  $q > 0$ , l'application « inflation »

$$E_2^{n, 0} \rightarrow H^n(p, K_M; \text{Hom}(I_{P, \delta, v}, \delta \times (v+p) \times 1))$$

est un isomorphisme; on définit  $T^v$  comme inverse de cet isomorphisme, en utilisant (2) avec  $q=0$ . Notons en particulier que si un cocycle

$$\varphi \in Z^n(p, K_M; \text{Hom}(\text{Ext}_{\mathfrak{a}, K}^n, \delta \times (v+p) \times 1))$$

est nul dès que l'une des variables appartient à  $n$ , alors

$$(4) \quad T^v(\varphi) = \varphi|_{\Lambda^n(m+a)}.$$

CONSTRUCTION DE  $T^v$

D'après le lemme 1 et la démonstration du lemme 2, on a

$$(5) \quad H^n(m+a, K_M; \text{Hom}(H_0(n, I_{P, \delta, v}), \delta \times (v+p)))$$

$$\begin{aligned}
&= H^n(m+a, K_M; \text{Hom}(H_0(n, I_{P, \delta, v})_{v+p}, \delta \times (v+p))) \\
&= \bigoplus_{w \in W_v} H^n(m+a, K_M; \text{Hom}(H_0(n, I_{P, \delta, v})_{w \cdot \delta, v+p}, \delta \times (v+p)));
\end{aligned}$$

un résultat non publié de Zuckerman affirme que tous les  $\text{Ext}^n$ ,  $n > 0$ , entre séries discrètes sont nuls; donc (5) est encore égal à

$$H^n(a, \text{Hom}_{(m, K_M)}(H_0(n, I_{P, \delta, v})_{\delta \cdot v+p}, \delta \times (v+p))),$$

c'est-à-dire encore, en vertu du lemme 1, à

$$H^n(a, \text{id}_\delta \times \text{Hom}(v+p, v+p)) \sim H^n(a, \text{Hom}(v, v)).$$

En conclusion, on peut définir  $T^v$  en restreignant les cocycles, d'une part de  $\Lambda^n(m+a)$  à  $\Lambda^n a$ , d'autre part de  $H_0(n, I_{P, \delta, v})$  à son sous-espace

$$H_0(n, I_{P, \delta, v})_{\delta \cdot v+p} \sim \delta \times (v+p).$$

#### FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Partons d'un élément  $\varphi$  de  $\text{Ext}_a^n(v, v)$ , identifié à  $\Lambda^n a^*$ ; l'élément

$$\varphi' = T'^n(\varphi) \in Z^n(p, K_M; \text{Hom}(\delta \times (v+p) \times 1, \delta \times (v+p) \times 1))$$

est donné par

$$(6) \quad \varphi'(X_1 + Y_1 + Z_1, \dots, X_n + Y_n + Z_n) = \varphi(Y_1, \dots, Y_n) \cdot \text{id}_\delta$$

pour tous  $X_i \in m$ ,  $Y_i \in a$ ,  $Z_i \in n$ .

On va maintenant déterminer l'élément

$$\varphi''' = T'''(T''^n(\varphi')) \in Z^n(p, K_M; \text{Hom}(I_{P, \delta, v}, \delta \times (v+p) \times 1));$$

pour cela on utilisera le

LEMME 3. — Pour tout  $\psi \in Z^n(p, K_M; \text{Hom}(\delta \times (v+p) \times 1, \delta \times (v+p) \times 1))$ , l'image  $\omega$  de  $\psi$  par  $T''' \circ T''^n$  est donnée par

$$\omega(U_1, \dots, U_n) = \psi(U_1, \dots, U_n) \cdot \Lambda, \quad \forall U_1, \dots, U_n \in p$$

(rappelons que  $\Lambda$  a été défini en même temps que  $T''$ ).

Ce lemme résulte, via l'isomorphisme de van Est, du suivant, qui est une simple reformulation du lemme 2.3 de [7] :

LEMME 4. — Notons  $G$  un groupe de Lie;  $H$  un sous-groupe fermé;  $T$  le foncteur « induction  $C^\infty$  » :  $\mathcal{C}_H \rightarrow \mathcal{C}_G$ ;  $A$  et  $B$  deux objets de  $\mathcal{C}_H$ ;  $T_{A,B}^* : \text{Ext}_H^*(A, B) \rightarrow \text{Ext}_G^*(\text{Ind } A, \text{Ind } B)$  les applications associées canoniquement à  $T$ ;  $\Lambda$  le  $H$ -morphisme canonique de  $\text{Ind } A$  vers  $A$  :  $\Lambda(f) = f(1)$ ; enfin  $S$  l'isomorphisme de Shapiro  $\text{Ext}_G^*(\text{Ind } A, \text{Ind } B) \rightarrow \text{Ext}_H^*(\text{Ind } A, B)$ . Alors  $S : T_{A,B}^* \rightarrow \text{Ext}_H^*(\text{Ind } A, B)$  s'obtient en associant à tout cocycle  $\psi \in Z^n(H, \text{Hom}(A, B))$  le cocycle  $(h_1, \dots, h_n) \mapsto \psi(h_1, \dots, h_n) \circ \Lambda$ .

Ceci étant, (6) montre que  $\varphi'''$  est donné par

$$\varphi'''(X_1 + Y_1 + Z_1, \dots, X_n + Y_n + Z_n) = \varphi(Y_1, \dots, Y_n) \cdot \text{id}_\delta \circ \Lambda.$$

Ensuite (4) montre que  $\varphi^{iv} = T^{iv}(\varphi''')$  est donné par

$$\varphi^{iv}(X_1 + Y_1, \dots, X_n + Y_n) = \varphi(Y_1, \dots, Y_n) \cdot \text{id}_\delta \circ \tilde{\Lambda}$$

où  $\tilde{\Lambda}$  est l'application rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} I_{P, \delta, v} & \xrightarrow{\Lambda} & \delta \times (v+p) \times 1 \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\Lambda} & \\ H_0(n, I_{P, \delta, v}) & & \end{array}$$

Enfin, d'après la construction ci-dessus de  $T^v$ ,  $\varphi^v = T^v(\varphi^{iv})$  est donné par

$$\begin{aligned} \varphi^v(Y_1, \dots, Y_n) &= \varphi^{iv}(Y_1, \dots, Y_n)|_F \\ &= \varphi(Y_1, \dots, Y_n) \cdot \text{id}_\delta \circ \tilde{\Lambda}|_F \end{aligned}$$

où  $F = H_0(n, I_{P, \delta, v})_{\delta, v+p}$ ; comme  $\tilde{\Lambda}$  est un  $(m+a, K_M)$ -morphisme surjectif, il est nul en dehors de  $F$  et bijectif de  $F$  vers  $\delta \times (v+p)$ ; on peut donc écrire

$$\varphi^v(Y_1, \dots, Y_n) = \varphi(Y_1, \dots, Y_n),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

## 4. Démonstration des théorèmes 2, 3, 4

RELATIONS ENTRE LES REPRÉSENTATIONS  $T_{f,\tau}^G$  ET  $I_{P,\delta,v}$

Le sous-groupe  $G(f)$ , étant un sous-groupe de Cartan, peut s'écrire  $H=TA$  avec  $T=H\cap K$ ,  $A$  sous-groupe vectoriel; définissons  $M$  et  $W$  comme au paragraphe 1; posons

$$f=f|_m, \quad v=v|_a;$$

on a alors  $T=M(f)$ , sous-groupe de Cartan compact de  $M$ .

LEMME 5. — On a  $G(f)=\tilde{T}A$  (produit direct) où  $\tilde{T}$  désigne le revêtement métaplectique de  $M(f)$  associé à l'action de  $M(f)$  dans  $m/m(f)$ .

Démonstration analogue à celle du lemme 8(i) de [9] en y remplaçant les décompositions

$$\mathfrak{g}=B\oplus\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{g}(f)=N\oplus\mathfrak{s}(\omega)$$

par les suivantes :

$$\mathfrak{g}=(\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n})\oplus(\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}^-), \quad \mathfrak{g}(f)=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{t}.$$

Ceci étant, tout élément  $\tau$  de  $X^{\text{irr}}(G, f)$  s'écrit  $\tau=\tau'\times e^\nu$  où  $\tau'\in X^{\text{irr}}(M, f)$ ; posons  $\delta=T_{f,\tau}^M$ .

LEMME 6. — On a  $\delta\in\hat{M}_d$  et  $I_{P,\delta,v}\sim(T_{f,\tau}^G)_{(K)}$ .

Démonstration. — Cela résulte de [5], ch. 3, lemme 10 (communication orale de M. Duflo).

LEMME 7. — Le groupe  $W_{\delta,v}$  est trivial.

Démonstration. — Soit  $s$  un élément de  $N_G(A)$  stabilisant simultanément  $\delta$  et  $v$ ; montrons que  $s\in Z_G(A)$ . Il résulte de [5] que l'on a

$$s.\delta=T_{s.f,s.\tau}^M$$

d'où

$$T_{f,\tau}^M=T_{s.f,s.\tau}^M$$

toujours d'après [5] il existe  $x\in M$  tel que  $s.f=x.f$  et  $s.\tau=x.\tau$ ; alors, posant  $y=x^{-1}s$ , on a  $y\in N_G(A)$ ,  $y.f=f$ ,  $y.v=x^{-1}.v=v$  car  $x$  centralise

$\alpha$ ; on voit que  $f$  et  $y.f$  ont même restriction à  $m + \alpha$ , donc à  $\mathfrak{h}$ ; notant  $\mathfrak{h}_c$  et  $\mathfrak{g}_c$  les complexifiées de  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}_c^\alpha$  les sous-espaces radiciels, il est facile de voir que  $f$  et  $y.f$  sont nulles sur les  $\mathfrak{g}_c^\alpha$ . Finalement on obtient  $y.f = f$ , d'où  $y \in G(f) \subset Z_G(A)$ .

## NOTATIONS

La donnée de  $f$  entraîne celles de  $v$ , de  $f$  et d'un caractère  $\eta$  de  $\tilde{T}_0$ ;  $X^{\text{irr}}(M, f)$  est l'ensemble des représentations irréductibles de  $\tilde{T}$  dont les restrictions à  $\tilde{T}_0$  sont des multiples de  $\eta$ ; comme  $\tilde{T}/\tilde{T}_0$  est fini,  $X^{\text{irr}}(M, f)$  est fini; on notera  $\tau^1, \dots, \tau^r$  ses éléments; alors  $\mathcal{E} = X^{\text{irr}}(G, f)$  est l'ensemble des représentations  $\tau^i = \tau'^i \times e^v$ .

## DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

On prend pour  $\mathcal{C}_{\tilde{G}(\tilde{f})}^{\sim}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}_{\tilde{G}(\tilde{f})}$  formée des représentations dont les restrictions à  $\tilde{T}_0$  sont des multiples de  $\eta$ ; les assertions de la partie (i) du théorème 2 sont vérifiées, la première parce que  $\tilde{T}_0$  est compact, la seconde en vertu de [9], lemme 1.

Notons  $\mathcal{C}_{\tilde{G}(\tilde{f})}^{\sim i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}_{\tilde{G}(\tilde{f})}^{\sim}$  formée des représentations dont les restrictions à  $\tilde{T}$  sont des multiples de  $\tau'^i$ ; comme  $\tilde{T}$  est compact,  $\mathcal{C}_{\tilde{G}(\tilde{f})}^{\sim}$  est la somme directe des catégories  $\mathcal{C}_{\tilde{G}(\tilde{f})}^{\sim i}$ . Pour tout  $i$  on définit un foncteur  ${}^1T^i: \mathcal{C}_{\tilde{G}(\tilde{f})}^{\sim i} \rightarrow \mathcal{C}_A$  de la façon suivante: pour tout  $\tau \in \mathcal{C}_{\tilde{G}(\tilde{f})}^{\sim i}$ , on peut écrire

$$\tau|_{\tilde{T}} = \tau'^i \otimes I$$

donc

$$\tau|_A = I \otimes \pi^i$$

avec  $\pi^i \in \mathcal{C}_A$ ; on pose alors  ${}^1T^i(\tau) = \pi^i$ .

Ensuite, posant  $\delta^i = T_{f, \tau^i}^M \in \hat{M}_A$ , on définit comme au paragraphe 1 un foncteur  $\mathcal{C}_A \rightarrow \mathcal{C}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{k}}$ , que l'on notera ici  $T^i$  au lieu de  $T$ ; enfin on définit le foncteur  $T$  du théorème 2 par

$$T(\tau) = \bigoplus_{i=1}^r T^i({}^1T^i(\tau_i))$$

si  $\tau = \bigoplus \tau_i \in \mathcal{C}_{\tilde{G}(\tilde{f})}^{\sim}$ ,

## DÉMONSTRATION DE LA PARTIE (ii) DU THÉORÈME 2

*Première assertion* : si  $\tau \in \mathcal{E} = X^{\text{irr}}(G, f)$ ,  $\tau$  s'écrit  $\tau^i \times e^\nu$  pour un  $i = 1, \dots, r$ , on a alors  $\tau_i = \tau$ ,  $\tau_j = 0$  pour  $j \neq i$ ,

$${}^1T^i(\tau_i) = e^\nu$$

$${}^\circ T(\tau) = T^i(e^\nu) = I_{p, s^i, \nu} = (T_{f, \nu}^G)_{(K)}$$

(d'après le lemme 6).

*Troisième assertion* : remarquons d'abord que si  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont deux éléments distincts de  $X^{\text{irr}}(G, f)$ , on a

$$(7) \quad \text{Ext}_{\widehat{G_U}}^n(\tau_1, \tau_2) = 0 = \text{Ext}_{\mathfrak{g}, K}^n({}^\circ T(\tau_1), {}^\circ T(\tau_2)), \quad \forall n \geq 0;$$

en effet la première relation résulte du fait que  $\tilde{T}$  est compact; la seconde résulte de la remarque 2, qui s'applique ici parce que les représentations  $T_{f, \nu}^G$  construites par DUFLO ont des caractères infinitésimaux réguliers ([5], § 3.1). Supposons maintenant  $\tau_1 = \tau_2 = \tau^i$ , l'assertion est trivialement vraie pour le foncteur  ${}^1T^i$ ; elle est vraie pour  $T^i$  d'après le théorème 1, donc pour  ${}^\circ T$  par composition.

*Deuxième assertion* : résulte de la troisième et de [7], proposition 2.3.

## DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3

Les assertions (i) et (ii) ont déjà été démontrées; (iii) résulte de (ii); pour démontrer (iv) et (v), il suffit de vérifier que  $T_{f, \nu}^G$  admet un voisinage dans  $\hat{G}$ , homéomorphe à  $\mathbb{R}^{\dim \mathfrak{g}}$  — ce qui résulte de [4], théorème 2.6.

Enfin le théorème 4 résulte de la remarque 2, comme pour la seconde relation (7).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOREL (A.) and WALLACH (N.). — Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, *Ann. Math. Studies*, n° 94, 1980.
- [2] DELORME (P.). — Homomorphismes de Harish-Chandra liés aux  $K$ -types minimaux des séries principales des groupes de Lie réductifs connexes, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 17, 1984, p. 117-189.
- [3] DELORME (P.). — Self-extensions de modules de Harish-Chandra et une question de I. M. Gelfand, *Astérisque*, n° 124/125, 1985, p. 31-48.

- [4] DELORME (P.). — Formules limites et formules asymptotiques pour les multiplicités dans  $L^2(G/\Gamma)$ , à paraître au *Duke Math. J.*
- [5] DUFLO (M.). — Constructions de représentations unitaires d'un groupe de Lie, *Cours au C.I.M.E.*, 1980.
- [6] GUICHARDET (A.). — Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie, CEDIC-Nathan, 1980.
- [7] GUICHARDET (A.). — Représentations de longueur finie des groupes de Lie inhomogènes, *Astérisque*, n° 124/125, 1985, p. 213-252.
- [8] GUICHARDET (A.). — Théorie de Mackey et méthode des orbites selon M. Duflo, *Expos. Math.*, t. 3, 1985, p. 303-346.
- [9] GUICHARDET (A.). — Méthode des orbites pour les représentations de longueur finie. *Invent. Math.*, t. 85, 1986, p. 199-215.
- [10] HECHT (H.) and SCHMID (W.). — Characters, asymptotics and  $n$ -homology of Harish-Chandra modules, *Acta Math.*, t. 151, 1983, p. 49-151.
- [11] VOGAN (D.). — Representations of real reductive Lie groups, Birkhäuser, 1981.