BULLETIN DE LA S. M. F.

PATRICE PHILIPPON

Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 355-383
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__355_0>

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 355-383.

LEMMES DE ZÉROS DANS LES GROUPES ALGÉBRIQUES COMMUTATIFS

PAR

PATRICE PHILIPPON (*)

RÉSUMÉ. — Nous démontrons un nouveau Lemme de Zéros utilisant des opérateurs de translations et de dérivations pour un groupe algébrique commutatif quelconque. Ce résultat améliore les théorèmes antérieurs de D. W. Masser et G. Wüstholz essentiellement dans le décompte des opérateurs de dérivations. Il fournit également un renseignement quantitatif intéressant sur les sous-groupes obstructeurs comme suggéré par D. Bertrand.

ABSTRACT. — We prove a new Zeros Estimate using translation and derivation operators for an arbitrary commutative algebraic group. This result improves previous theorems of D. W. Masser and G. Wüstholz mainly with respect to the derivation operators. It also gives interesting quantitative information on obstruction subgroups as suggested by D. Bertrand.

1. Introduction

Y. V. Nesterenko a démontré dans [12] une version affaiblie, mais effective du lemme de Shidlovsky. La méthode développée par Nesterenko a suscité un vif intérêt et c'est ainsi que W. D. Brownawell et D. W. Masser la reprirent dans [3], puis Brownawell dans [2], et dans un contexte quelque peu différent, les équations différentielles considérées n'étant plus linéaires mais algébriques.

Ces travaux ont montré l'impact de la notion d'opérateurs algébriques représentant des dérivations dans les questions de lemmes de zéros. Un

class and their applications in the theory of transcendental numbers, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Math.*, 41, 1977; *Math USSR Izv.*, 11, 1977, p. 239-270.

[13] NORTHCOTT (D. G.). — *Lessons on rings, modules and multiplicities*, Cambridge Univ.

lemme de zéros consiste en une minoration du plus petit degré d'un polynôme non trivial s'annulant, avec un ordre minimal specifié, sur un ensemble donné. Masser [7], puis Masser et G. Wüstholz ([9], [10] et [11]), étudiant les lemmes de zéros dans le cadre des groupes algébriques commutatifs utilisèrent parallèlement aux opérateurs de dérivations des opérateurs de translations. Les résultats obtenus par Masser et Wüstholz sont très fins mais incomplets à au moins un égard, ils ne considèrent que des dérivations le long d'un sous-groupe analytique à un paramètre du groupe algébrique considéré. C'est Wüstholz, qui le premier réussit à prendre en compte des sous-groupes analytiques à plusieurs paramètres (*voir* [17], théorème 2). Le lemme de zéros démontré par Wüstholz est efficace dans le cadre de la méthode de Baker (*cf.* paragraphes 7 et 8 de [17]), mais ne répond pas dans le cadre de la méthode de Gel'fond aux conjectures souhaitées (*voir* [14] chapitre 2, par exemple).

Notre propos dans le présent texte est d'établir un lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs améliorant les précédents et validant notamment les hypothèses faites dans [14].

Au paragraphe 2 suivant, nous énonçons notre théorème principal (théorème 2.1) et en donnons deux corollaires faisant le lien avec [9], [8], [10] et [17]. Ainsi, nous tenons compte dans le théorème 2.1 d'une suggestion de D. Bertrand qui a remarqué l'importance de faire intervenir, dans l'estimation des zéros, les degrés des sous-groupes algébriques du groupe considéré [1].

Au paragraphe 3, nous rappelons quelques résultats de la théorie des fonctions de Hilbert-Samuel multihomogènes dont l'essentiel se trouve dans [6], chapitre IV et dans [16]. Le résultat central de ce paragraphe est la proposition 3.3.

Au paragraphe 4, nous mettons en place les outils nécessaires à la démonstration du théorème principal. Dans la première partie, nous définissons des opérateurs décrivant simultanément les dérivations et les translations sur un groupe algébrique commutatif et en montrons les propriétés fondamentales. Pour ce faire, nous utilisons l'astuce dite de Coates-Baker-Anderson révisitée par G. V. Chudnovsky et déjà mise en œuvre dans [14]. Dans la seconde partie, nous établissons un cas particulier du lemme clef utilisé par Wüstholz dans la démonstration de son lemme de zéros de [17].

Enfin, au paragraphe 5, nous donnons la preuve du théorème principal. Cette preuve doit beaucoup au paragraphe 5 de [10] ainsi qu'à de longues discussions avec D. Bertrand, que je suis heureux de pouvoir remercier ici. En particulier [1] et les notes de son cours de l'année 1983-1984 m'ont été de la plus grande utilité.

2. Notations et résultats

On désigne par K le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ou, pour l premier, le corps analogue $\mathbb{C}_l$ des nombres l-adiques et par p et d des entiers $\geqslant 1$. On considère des groupes algébriques commutatifs $G_1, \ldots, G_p$ définis sur K et de dimensions respectives $n_1, \ldots, n_p$. On pose $G = G_1 \times \ldots \times G_p$ le groupe produit, $n = n_1 + \ldots + n_p$ et l'on se donne un sous-groupe analytique Φ dans K^d à valeurs dans $G(K)$ (c'est-à-dire un homomorphisme $\Phi : K^d \to G(K)$ défini et analytique au voisinage de l'origine de K^d). On note $A = \mathrm{im}\Phi$ et Σ un sous-ensemble fini de $G(K)$ contenant l'origine de G. On définit $\Sigma(0) = \{0\}$ et

$$\Sigma(m) = \{x_1 + \ldots + x_m;\ x_i \in \Sigma\}.$$

On suppose que pour $i = 1, \ldots, p$ le sous-groupe G_i est plongé comme sous-variété quasi projective d'un espace projectif $\mathbb{P}_{N_i}$. Le groupe G est alors naturellement plongé dans l'espace produit $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{N_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{N_p}$. On introduit :

$$R = K[X_{1,0}, \ldots, X_{1,N_1}, \ldots, X_{p,0}, \ldots, X_{p,N_p}]$$

l'anneau des coordonnées de $\mathbb{P}$ où $K[X_{i,0}, \ldots, X_{i,N_i}]$ est l'anneau des coordonnées de $\mathbb{P}_{N_i}$ pour $i = 1, \ldots, p$. Un polynôme multihomogène, non nul P de R (i. e. homogène par rapport aux coordonnées de $\mathbb{P}_{N_i}$ pour tout i) définit une hypersurface Z de $\mathbb{P}$. On dira que P est de multidegré $(D_1, \ldots, D_p)$ s'il est de degré D_i par rapport aux coordonnées de $\mathbb{P}_{N_i}$ pour $i = 1, \ldots, p$.

Suivant [10] et [17] on définit, $\mathrm{ord}_g P$, l'ordre d'annulation le long de A de P en un point g de G en considérant la fonction $\Psi : K^d \to G(K)$, définie et analytique au voisinage de l'origine de K^d, obtenue en composant Φ avec la translation τ_g par g dans G. Il existe des fonctions analytiques

$$\psi_{1,0}(\mathbf{z}), \ldots, \psi_{1,N_1}(\mathbf{z}), \ldots, \psi_{p,0}(\mathbf{z}), \ldots, \psi_{p,N_p}(\mathbf{z})$$

représentant Ψ au voisinage de $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ dans K^d.

Si la fonction analytique $f(\mathbf{z})=P(\psi_{1,0}(\mathbf{z}), \ldots, \psi_{p, N_p}(\mathbf{z}))$ est identiquement nulle nous poserons $\operatorname{ord}_g P=\infty$, et sinon $\operatorname{ord}_g P$ sera l'ordre d'annulation de $f(\mathbf{z})$ en $\mathbf{z}=\mathbf{0}$. On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix des fonctions représentant Ψ. Si G' est un sous-groupe algébrique de G, $A \cap G'$ est image d'un sous-groupe analytique $\Phi' : K^{d'} \to G(K)$ de Φ, et on note $\operatorname{codim}_A(A \cap G')=d-d'$ la codimension analytique de $A \cap G'$ dans A.

Enfin, pour V sous-variété de $\mathbb{P}$ on note $H(V; d_1, \ldots, d_p)/(\dim V)!$ la partie homogène de plus haut degré ($=\dim V$) du polynôme de Hilbert-Samuel multihomogène de V (*voir* § 3 pour une définition). Remarquons simplement que si $p=1$ on a $H(V; d)=\deg V . d^{\dim V}$ où $\deg V$ est le nombre des points d'intersection de V et de $\dim V$ hyperplans génériques. Si I est un idéal multihomogène de R (i. e. engendré par des polynômes multihomogènes) on note $\mathscr{Z}(I)$ l'ensemble des zéros communs aux éléments de I dans $\mathbb{P}$, c'est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}$. Nous dirons qu'une sous-variété V de G est incomplètement définie dans G par des équations de multidegrés $\leqslant(D_1, \ldots, D_p)$ si V est une composante irréductible de $G \cap \mathscr{Z}(I)$ où I est un idéal de R engendré par des polynômes de multidegrés $\leqslant(D_1, \ldots, D_p)$ (i. e. de degrés $\leqslant D_i$ par rapport aux coordonnées de $\mathbb{P}_{N_i}$ pour $i=1, \ldots, p$; *voir* § 3, définition 3.5 pour plus de précisions).

Avec ces notations nous expliciterons dans les paragraphes 4 et 5 des entiers rationnels $c_1, \ldots, c_p \geqslant 1$, où c_i ne dépend que du plongement de G_i dans $\mathbb{P}_{N_i}$, tels que l'on ait le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Soit $T \in \mathbb{N}$, on suppose qu'un polynôme P de multidegré $(D_1, \ldots, D_p)$ de R s'annule à un ordre $\geqslant nT+1$ le long de A en chaque point de $\Sigma(n)$. Alors il existe un sous-groupe algébrique connexe G' de G, incomplètement défini dans G par des équations multihomogènes de multidegrés $\leqslant(c_1 D_1, \ldots, c_p D_p)$, contenu dans un translaté de $G \cap \mathscr{Z}(P)$ et tel que :*

$$\binom{T+\operatorname{codim}_A(A \cap G')}{\operatorname{codim}_A(A \cap G')} . \operatorname{card}((\Sigma+G')/G') . H(G'; D_1, \ldots, D_p) \leqslant H(G; c_1 D_1, \ldots, c_p D_p).$$

Grâce à un récent travail de H. Lange [5] on sait que l'on peut construire effectivement des plongements projectifs des G_i ($i=1, \ldots, p$) permettant de prendre $c_1, \ldots, c_p \leqslant 2$. Nous démontrons le théorème au paragraphe 5, mais nous voulons dès maintenant en déduire des corollaires particuliers.

D'abord nous voulons montrer que le théorème 2.1 généralise et améliore les lemmes de zéros antérieurs de Masser [7], de Masser et Wüstholz ([9], [10]) et de Moreau [8]. Pour ce faire, nous donnons un corollaire raffinant les deux versions du théorème principal de [10]. Les améliorations sont ici de deux ordres :

D'une part, nous ne retenons des deux types de conditions imposées dans ce théorème principal de [10] que le premier qui est le plus naturel. Ceci permet dans les applications de ne pas avoir de restrictions sur l'ordre T des dérivations (*voir* [15] pour un exemple d'application où ce point est crucial). Cette amélioration est due à la « bonne » définition des opérateurs données au paragraphe 4.1 et déjà esquissée dans [14].

D'autre part, nous adoptons une formulation, proche de celle du théorème 2 de [8], et qui englobe les deux versions (générale et disjointe) du théorème principal de [10]. De plus, dans cette formulation, nous gardons également trace, comme dans [1], proposition 1, des degrés des sous-groupes G' de G considérés, ce qui fournit une information supplémentaire utile dans les applications de [1]. On reprend les notations précédentes en supposant $\dim A=d=1$, et, à toutes sous-variétés V de $\mathbb{P}$ on associe, pour $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ tel que $0\leqslant\alpha_1\leqslant N_1, \ldots, 0\leqslant\alpha_p\leqslant N_p$ et $\alpha_1+\ldots+\alpha_p=\dim V$, des entiers $\deg_\alpha V$ définis de la façon suivante :

$$\deg_\alpha V=\max\{\operatorname{card}(V\cap L_1\times\ldots\times L_p)\}$$

où L_i parcourt l'ensemble des sous-variétés linéaires de codimension α_i dans $\mathbb{P}_{N_i}$ pour $i=1, \ldots, p$ et $\dim(V\cap L_1\times\ldots\times L_p)=0$. On pose $\deg_\alpha V=0$ s'il n'existe pas de telles sous-variétés. Avec ces notations il existe un nombre réel c ne dépendant que du plongement de G dans $\mathbb{P}$ vérifiant le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.2. — *On suppose qu'un polynôme multihomogène P de multidegré $(D_1, \ldots, D_p)$ s'annule à un ordre $\geqslant nT+1$ le long de A ($\dim A=1$) en chaque point de $\Sigma(n)$. On suppose de plus que pour tout sous-groupe connexe $G'\not\supset A$ il existe $(r_1, \ldots, r_p)$ tel que $r_1+\ldots+r_p=\operatorname{codim}_G G'$ et*

$$(T+1).\operatorname{card}((\Sigma+G')/G').\deg_\alpha G'\geqslant c.D_1^{r_1}\ldots D_p^{r_p}$$

où $\alpha=(n_1-r_1, \ldots, n_p-r_p)$. Alors le polynôme P s'annule sur tout un translaté de A.

Démonstration. — Soit $s=\operatorname{codim}_A(A\cap G')$ on remarque que $\binom{T+s}{s}=T+1$ si $A\cap G'$ est fini ou sinon $=1$. Par ailleurs, on déduit de l'interprétation des coefficients du polynôme $H(G'; D_1, \ldots, D_p)$ donnée au § 3 suivant que pour tout $(r_1, \ldots, r_p)$ tel que $r_1+\ldots+r_p=\operatorname{codim}_G G'$ on a :

$$H(G'; D_1, \ldots, D_p)\geqslant \deg_{\alpha} G'.\frac{D_1^{n_1-r_1}\ldots D_p^{n_p-r_p}}{(n_1-r_1)!\ldots(n_p-r_p)!}.$$

Comme $G=G_1\times\ldots\times G_p$ on déduit du lemme 3.4 que (*voir* § 3) :

$$H(G; c_1 D_1, \ldots, c_p D_p)<c.\frac{D_1^{n_1}\ldots D_p^{n_p}}{n_1!\ldots n_p!}$$

en prenant $c>n!\,c_1^{n_1}.\deg G_1\ldots c_p^{n_p}.\deg G_p$. Les conditions imposées dans le corollaire 2.2 montrent que le sous-groupe G' obtenu en appliquant le théorème 2.1 contient A et est contenu dans un translaté de $G\cap\mathscr{Z}(P)$ et ainsi le corollaire est déduit du théorème 2.1.

Ensuite nous voulons montrer que le théorème 2.1 généralise et améliore le lemme de zéros annoncé par Wüstholz dans [17] (théorème 2, p. 283).

L'amélioration consiste essentiellement à remplacer les coefficients τ_r par les coefficients σ_r comme exposants de l'ordre de dérivation (dans la terminologie de Wüstholz) et est fondamentale dans plusieurs applications (*voir* [4] par exemple). Elle permet en particulier de lever la conjecture de [14] (conjecture 2.12, p. 61) laissée ouverte par le travail de Wüstholz.

Pour le corollaire suivant on reprend les notations du paragraphe 5 et l'on suppose que les groupes $G_1, \ldots, G_p$ sont disjoints au sens de [10], c'est-à-dire que tous les sous-groupes algébriques G' de $G=G_1\times\ldots\times G_p$ sont de la forme $G'=G'_1\times\ldots\times G'_p$ où G'_i est un sous-groupe algébrique de G_i. Soit $\Gamma=\mathbb{Z}\gamma_1+\ldots+\mathbb{Z}\gamma_l$ un sous-groupe de type fini de G, pour $S\geqslant 0$ on pose

$$\Gamma_S=\{s_1\gamma_1+\ldots+s_l\gamma_l;\ 0\leqslant s_i\leqslant S\}.$$

On pose pour $\mathbf{r}=(r_1, \ldots, r_p)$ tel que $0\leqslant r_1\leqslant n_1, \ldots, 0\leqslant r_p\leqslant n_p$

$$\rho_{\mathbf{r}}=\min\{\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}}(\Gamma/\Gamma\cap G')\}$$
$$\sigma_{\mathbf{r}}=\min\{\dim(A/A\cap G')\}$$

où les minimas sont pris sur l'ensemble des sous-groupes algébriques $G' = G'_1 \times \ldots \times G'_p$ de G tels que $\operatorname{codim}_{G_i} G'_i \geqslant r_i$ et $G' \not\supseteq A$.

COROLLAIRE 2.3. — *On suppose qu'un polynôme multihomogène P de R de multidegré $(D_1, \ldots, D_p)$ s'annule à un ordre $\geqslant nT+1$ le long de A en chaque point de Γ_{nS}. On suppose de plus que pour tout $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_p)$ tel que $0 \leqslant r_1 \leqslant n_1, \ldots, 0 \leqslant r_p \leqslant n_p$ on ait*

$$(T+1)^{\sigma_{\mathbf{r}}} . S^{\rho_{\mathbf{r}}} \geqslant c . D_1^{r_1} \ldots D_p^{r_p}.$$

Alors le polynôme P s'annule sur tout un translaté de A.

Démonstration. — On pose $\Sigma = \Gamma_S$ et l'on vérifie aisément que pour tout G' sous-groupe algébrique de G ne contenant pas A on a $\operatorname{card}((\Gamma_S + G')/G') \geqslant S^{\rho_{\mathbf{r}}}$ et de même si on note $s = \operatorname{codim}_A (A \cap G')$ on a $s! \binom{T+s}{s} \geqslant (T+1)^{\sigma_{\mathbf{r}}}$ où $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_p)$ avec $r_i = \operatorname{codim}_{G_i} G'_i$ si $G' = G'_1 \times \ldots \times G'_p$. Enfin on vérifie grâce au lemme 3.4 que (*voir* § 3) :

$$s! \frac{H(G; c_1 D_1, \ldots, c_p D_p)}{H(G'; D_1, \ldots, D_p)} < c . D_1^{r_1} \ldots D_p^{r_p}.$$

Les conditions imposées dans le corollaire 2.3 montrent que le sous-groupe G' obtenu en appliquant le théorème 2.1 contient A et est contenu dans un translaté de $G \cap \mathscr{Z}(P)$, ainsi le corollaire est déduit du théorème 2.1.

Enfin pour conclure nous voulons signaler que le fait que le sous-groupe algébrique exhibé dans le théorème 2.1 est incomplètement défini par des équations de multidegrés $\leqslant (c_1 D_1, \ldots, c_p D_p)$, permet de retrouver le théorème I de [11].

3. Rappels sur les polynomes de Hilbert-Samuel multihomogènes

Pour faciliter nos références ultérieures, nous rassemblons dans ce paragraphe quelques définitions et propriétés plus ou moins classiques sur les idéaux multihomogènes. Le lecteur pourra comparer avec l'appendice de [10] et consulter [16].

Nous reprenons l'anneau :

$$R = K[X_{1,0}, \ldots, X_{1,N_1}, \ldots, X_{p,0}, \ldots, X_{p,N_p}]$$

introduit au paragraphe précédent ainsi que la notion de polynôme multihomogène de multidegré $(D_1, \ldots, D_p)$ dans R. Soit I un idéal multihomogène de R (i.e. engendré par des polynômes multihomogènes), I admet des décompositions primaires minimales (ou de Lasker-Noether) de la forme :

$$I = \mathfrak{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_h.$$

Nous dirons qu'une composante primaire $\mathfrak{Q}$ de I est triviale (ou irrelevante) si son radical contient

$$\cap_{i=1}^{p} (X_{i,0}, \ldots, X_{i,N_i}).$$

Un idéal multihomogène sera dit trivial si toutes ses composantes primaires sont triviales. Considérons $d_1, \ldots, d_p$ des entiers positifs, et $(R/I)_{(d_1, \ldots, d_p)}$ le K-espace vectoriel des éléments de R/I de multidegrés $(d_1, \ldots, d_p)$. On sait que lorsque les entiers $d_1, \ldots, d_p$ sont suffisamment grands, la dimension sur K de $(R/I)_{(d_1, \ldots, d_p)}$ coïncide avec la valeur en $(d_1, \ldots, d_p)$ d'un polynôme en p variables à coefficients dans $\mathbb{Q}$ appelé polynôme de Hilbert-Samuel (ou fonction caractéristique) de I (*voir* par exemple [16], théorème 7, p. 757). Remarquons que ce polynôme est identiquement nul si et seulement si I est trivial (*cf.* théorème 6 de [16]). Si I est non trivial le degré du polynôme de Hilbert-Samuel de I est égal à la dimension du sous-ensemble algébrique $\mathscr{Z}(I)$ dans $\mathbb{P}$. Pour I idéal multihomogène non trivial, on note comme précédemment $H(I; d_1, \ldots, d_p)$ le polynôme homogène égal à $(\dim I)!$ fois la partie homogène de plus haut degré ($=\dim I$) du polynôme de Hilbert-Samuel de I. Si I est l'idéal de définition d'une sous-variété V de $\mathbb{P}$ (non nécessairement irréductible) nous noterons encore $H(V; d_1, \ldots, d_p)$ pour $H(I; d_1, \ldots, d_p)$. En particulier si V n'est pas fermé pour la topologie de Zariski, le polynôme $H(V; d_1, \ldots, d_p)$ est défini comme étant $H(\bar{V}; d_1, \ldots, d_p)$ où $\bar{V}$ désigne l'adhérence de Zariski de V dans $\mathbb{P}$. Écrivons en posant $a = \dim I$, H sous la forme :

$$(*) \qquad H(I; d_1, \ldots, d_p) = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = a} c_\alpha(I) \frac{a!}{\alpha_1! \ldots \alpha_p!} d_1^{\alpha_1} \ldots d_p^{\alpha_p}$$

où la somme est étendue aux $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ tels que $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant N_1, \ldots, 0 \leqslant \alpha_p \leqslant N_p$ et $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = a$. Nous allons donner grâce au lemme suivant une interprétation géométrique des coefficients $c_\alpha(I)$ lorsque I est un idéal premier.

LEMME 3.1. — *Soit I un idéal multihomogène non trivial de dimension $a>0$ et P un polynôme multihomogène de multidegré $(D_1, \ldots, D_p)$ de R. Si P est non diviseur de zéro dans l'anneau R/I on a pour tout $d_1 \geqslant 1, \ldots, d_p \geqslant 1$:*

$$H((I, P); d_1, \ldots, d_p)$$
$$=\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_p=a}\left(c_\alpha(I)\sum_{i=1}^p \alpha_i \frac{D_i}{d_i}\right)\frac{(a-1)!}{\alpha_1!\ldots\alpha_p!}d_1^{\alpha_1}\ldots d_p^{\alpha_p}.$$

En particulier si $(d_1, \ldots, d_p)=(D_1, \ldots, D_p)$ on a :

$$H((I, P); D_1, \ldots, D_p)=H(I; D_1, \ldots, D_p).$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que comme P est non diviseur de zéro dans R/I on a pour $d_1, \ldots, d_p$ assez grands la suite exacte :

$$0 \rightarrow (R/I)_{(d_1-D_1, \ldots, d_p-D_p)} \rightarrow (R/I)_{(d_1, \ldots, d_p)} \rightarrow (R/(I, P))_{(d_1, \ldots, d_p)} \rightarrow 0$$

où la seconde flèche est la multiplication par P. Et donc on a encore :

$$\dim(R/(I, P))_{(d_1, \ldots, d_p)}$$
$$=\dim(R/I)_{(d_1, \ldots, d_p)}-\dim(R/I)_{(d_1-D_1, \ldots, d_p-D_p)}$$
$$=\sum_\alpha \frac{c_\alpha(I)}{\alpha_1!\ldots\alpha_p!}\sum_{i=1}^p \alpha_i D_i . d_1^{\alpha_1}\ldots d_i^{\alpha_i-1}\ldots d_p^{\alpha_p}+H'(d_1, \ldots, d_p)$$

où $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ parcourt l'ensemble des p-uples tels que $\alpha_1+\ldots+\alpha_p=a$ et où H' est un polynôme de degré $<a-1$. En égalant les parties homogènes de plus haut degré des deux membres on obtient la première identité du lemme.

Pour conclure à la seconde on remarque que si $(d_1, \ldots, d_p)=(D_1, \ldots, D_p)$ on a :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i . \frac{D_i}{d_i}=a.$$

pour tout $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$.

Soit V une sous-variété irréductible de $\mathbb{P}$ de dimension a et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des entiers qui vérifient $\alpha_1+\ldots+\alpha_p=a$ et $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant N_1, \ldots, 0 \leqslant \alpha_p \leqslant N_p$. Si $\mathfrak{P}$ est l'idéal de définition de V, on vérifie grâce au lemme précédent que $c_\alpha(\mathfrak{P})=\deg_\alpha(V)=H(V \cap L_1 \cap \ldots \cap L_p; 1, \ldots, 1)$ où, pour $i=1, \ldots, p$, L_i désigne une sous-variété linéaire générale de codimension α_i de $\mathbb{P}_{N_i}$. On en déduit que les c_α sont des entiers positifs. Ce dernier résultat s'étend facilement aux idéaux quelconques (multihomogènes et non triviaux) de R à l'aide du lemme suivant. On rappelle que la longueur $l(\mathfrak{Q})$ d'un idéal primaire $\mathfrak{Q}$ est le plus grand entier l tel qu'il existe une chaîne d'idéaux primaires distincts :

$$\mathfrak{Q}=\mathfrak{Q}_1 \subset \mathfrak{Q}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{Q}_l=\sqrt{\mathfrak{Q}},$$

($\sqrt{\mathfrak{Q}}$ désigne le radical de $\mathfrak{Q}$ qui ici est donc l'idéal premier associé à $\mathfrak{Q}$).

LEMME 3.2. — *Si I est un idéal multihomogène (non trivial) on a pour* $d_1 \geqslant 1, \ldots, d_p \geqslant 1$:

$$H(I; d_1, \ldots, d_p)=\sum_{\mathfrak{Q}} l(\mathfrak{Q}) . H(\sqrt{\mathfrak{Q}}; d_1, \ldots, d_p)$$

où la somme est étendue à toutes les composantes primaires de I (non triviales) et de même dimension que I.

Démonstration. — Elle se fait comme dans le cas classique homogène. Voir [16] théorème 8, p. 758 et paragraphe 32, p. 767. Remarquons en passant que si $I \subset J$ sont deux idéaux multihomogènes non triviaux de même dimension, on a : $H(J; d_1, \ldots, d_p) \leqslant H(I; d_1, \ldots, d_p)$.

Nous en arrivons maintenant au résultat qui nous sera le plus utile et qu'il convient de rapprocher du théorème II de [11] (*voir* aussi [3], § 5).

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert du spectre maximal de R (i. e. un ensemble d'idéaux maximaux de R ouvert pour la topologie de Zariski) nous introduisons un polynôme permettant de prendre en compte simultanément les multidegrés de toutes les composantes primaires isolées d'un idéal I (une composante est dite isolée si elle n'est pas contenue dans le radical d'une autre composante et immergée sinon) contenant un élément de $\mathcal{U}$. Plus précisément nous définissons :

$$S_{\mathcal{U}} H(I; d_1, \ldots, d_p)=\sum H(\mathfrak{Q}; d_1, \ldots, d_p),$$

où la somme est étendue à toutes les composantes primaires isolées non triviales de I contenues dans un élément de $\mathcal{U}$. Si $\mathcal{U}$ est le spectre maximal de R on notera encore SH le polynôme $S_{\mathscr{U}}H$. Par ailleurs, nous dirons qu'un idéal I_0 est parfait en tout point de $\mathscr{U}$ si tous les anneaux localisés $(R/I_0)_{\mathfrak{M}}$, sont de Cohen-Macaulay (ou semi-réguliers, *cf.* [13], p. 257) lorsque $\mathfrak{M}$ parcourt $\mathscr{U}$. Notons que si V est une sous-variété fermée de $\mathbb{P}$ et si l'on pose $\mathscr{U}$ l'ensemble ouvert des idéaux maximaux de R définissant soit un point lisse de V, soit un point de $\mathbb{P}$ hors de V, l'idéal de définition de V dans R est parfait en tout point de $\mathscr{U}$ (en fait on vérifie que l'idéal de définition de V est localement une intersection complète en tout point lisse de V et on utilise le théorème 14, p. 260 de [13]). Enfin le radical de Jacobson de R étant réduit à (0) l'intersection des idéaux maximaux de R n'appartenant pas à $\mathscr{U}$ est un idéal I_∞ radiciel (i. e. égal à son radical) et $\mathscr{U}$ peut être décrit comme l'ensemble des idéaux maximaux de R ne contenant pas I_∞.

PROPOSITION 3.3 : *Soit I_0 un idéal multihomogène de R et $I=(I_0, P_1, \ldots, P_m)$ l'idéal engendré par I_0 et des polynômes $P_1, \ldots, P_m$ de multidegrés $\leqslant (D_1, \ldots, D_p)$. On a :*

$$SH(\sqrt{I};\, D_1, \ldots, D_p) \leqslant SH(\sqrt{I_0};\, D_1, \ldots, D_p).$$

Si I_0 est parfait en tout point de $\mathscr{U}$ on a également :

$$S_{\mathscr{U}}H(I;\, D_1, \ldots, D_p) \leqslant S_{\mathscr{U}}H(I_0;\, D_1, \ldots. D_p).$$

Démonstration. — Nous allons montrer les deux inégalités simultanément, mais nous posons d'abord quelques notations. Si J est un idéal multihomogène non trivial de R nous noterons $J(b)$ [resp. $J(\leqslant b)$, $J(\geqslant b)$] l'idéal multihomogène intersection des composantes primaires isolées non triviales de dimension b (resp. $\leqslant b$, $\geqslant b$) de J, ou R s'il n'y a pas de telles composantes.

Fait A. — Si $J \subset J'$ et $\sqrt{J(\geqslant b+1)} = \sqrt{J'(\geqslant b+1)} =: \mathfrak{L}$ on a $J(b) \subset J'(b)$.

Preuve. — En effet en désignant par $\mathfrak{K}$ l'idéal $\bigcup_{e \geqslant 0}(J : \mathfrak{L}^e)$ et $\mathfrak{K}'$ l'idéal correspondant pour J' on a clairement $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}'$ et on vérifie $\mathfrak{K}(b) = J(b)$ et $\mathfrak{K}'(b) = J'(b)$ respectivement, enfin les idéaux $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K}'$ étant de dimensions $\leqslant b$ il suit de $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}'$ que $J(b) = \mathfrak{K}(b) \subset \mathfrak{K}'(b) = J'(b)$. □

Si I est trivial la proposition est évidente. Supposons donc I non trivial, alors I_0 est aussi non trivial et soit a sa dimension. Pour démontrer les deux inégalités de la proposition, on construit une suite d'idéaux multihomogènes

$$J_a \subset J_{a-1} \subset \ldots \subset J_0$$

telle que pour $0 \leqslant b \leqslant a$ on ait :

(b_1) $J_b \subset I$, $\sqrt{J_b(\geqslant b+1)} = \sqrt{I(\geqslant b+1)}$ et

$$SH(\sqrt{J_b}; D_1, \ldots, D_p) \leqslant SH(\sqrt{I_0}; D_1, \ldots, D_p)$$

en général,

(b_2) et de plus $S_{\mathscr{U}} H(J_b; D_1, \ldots, D_p) \leqslant S_{\mathscr{U}} H(I_0; D_1, \ldots, D_p)$ dans le cas I_0 parfait en tout point de $\mathscr{U}$.

Comme $\sqrt{J_0(\geqslant b+1)} = \sqrt{I(\geqslant b+1)}$ pour tout $0 \leqslant b \leqslant a$ et comme $J_0 \subset I$ il suit du fait A que $J_0(b) \subset I(b)$. Et donc, on a

$$SH(\sqrt{I}; D_1, \ldots, D_p) \leqslant SH(\sqrt{J_0}; D_1, \ldots, D_p)$$

et

$$S_{\mathscr{U}} H(I; D_1, \ldots, D_p) \leqslant S_{\mathscr{U}} H(J_0; D_1, \ldots, D_p).$$

(0_1) et (0_2) (dans le cas I_0 parfait en tout point de $\mathscr{U}$) conduisent alors directement aux inégalités annoncées dans la proposition.

Pour construire les idéaux J_b on procède par récurrence en posant $J_a = I_0$, les propriétés (a_1) et (a_2) sont alors claires. Étant donné J_b, on divise l'ensemble des premiers isolés associés à J_b en deux parties, la première F_1 consiste en les premiers qui ne sont pas associés à I et la seconde F_2 est son complémentaire. Il résulte de (b_1) que les premiers dans F_1 sont tous de dimensions $\leqslant b$. Notons $\mathscr{U}_b$ l'ouvert des éléments de $\mathscr{U}$ qui ne contiennent aucun premier de F_2, nous allons vérifier pas à pas que si I_0 est parfait en tout point de $\mathscr{U}$ alors pour tout b l'idéal J_b est parfait en tout point de $\mathscr{U}_b$ et $\mathscr{U}_{b+1}$ (J_a est clairement parfait en tout point de $\mathscr{U}_a$ et $\mathscr{U}_{a+1} =: \mathscr{U}$). Supposons J_b construit, nous allons exhiber J_{b-1}.

Fait B. — Tout premier associé à I contient un premier isolé associé à J_b. Les premiers appartenant à F_1 ne contiennent pas I.

Preuve. — On a $\sqrt{J_b} \subset \sqrt{I}$ d'où la première partie de l'assertion. Si $\mathfrak{P}$ est un premier isolé associé à J_b contenant I alors $\mathfrak{P}$ contient un premier $\mathfrak{P}'$ associé à I, par la première assertion $\mathfrak{P}'$ contient un premier isolé associé à J_b qui ne peut être que $\mathfrak{P}$, ainsi $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}'$ est dans F_2 et la deuxième assertion est établie. □

Nous posons $\mathfrak{N}_1$ (resp. $\mathfrak{N}_2$) l'intersection des composantes primaires isolées de J_b dont le radical est dans F_1 (resp. F_2), avec la convention $\mathfrak{N}_1$ (resp. $\mathfrak{N}_2$) $=R$ si F_1 (resp. F_2) est vide. Ainsi l'ouvert $\mathscr{U}_b$ est aussi l'ensemble des idéaux maximaux de R ne contenant pas $I_\infty \cap \mathfrak{N}_2$.

Si $\mathfrak{N}_1=R$, en posant $J_{b-1}=J_b$ les assertions $((b-1)_1)$ et $((b-1)_2)$ sont satisfaites. En effet $\sqrt{J_b(b)}\subset\sqrt{I(b)}$ résulte des deux premières assertions de (b_1) via le fait A, et comme $\mathfrak{N}_1=R$ tous les premiers associés à J_b sont aussi associés à I, d'où l'inclusion inverse. Nous supposons dorénavant $\mathfrak{N}_1$ idéal propre de R.

Par définition aucune composante de $\mathfrak{N}_1$ ne contient I, il existe donc, d'après [13], proposition 5, p. 81, au moins un élément de I non diviseur de zéro dans $R/\mathfrak{N}_1$ et, comme $I_0\subset J_b\subset\mathfrak{N}_1$ on peut trouver un tel élément P de la forme $A_1 P_1+\ldots+A_m P_m$ et de multidegré $(D_1, \ldots, D_p)$. (Notons que si $\mathfrak{L}$ est un idéal de R, il est équivalent de dire qu'un polynôme est non diviseur de zéro dans $R/\mathfrak{L}$ ou que ce polynôme n'appartient à aucun premier associé à $\mathfrak{L}$).

On pose $J_{b-1}=(J_b, P)$, il est alors clair que $J_{b-1}\subset I$. Lorsque I_0 est parfait en tout point de $\mathscr{U}$, l'idéal J_b est parfait en tout point de $\mathscr{U}_b$, et pour tout $\mathfrak{M}$ dans $\mathscr{U}_b$ on a $(J_b)_{\mathfrak{M}}=(\mathfrak{N}_1)_{\mathfrak{M}}$. Comme P est non diviseur de zéro dans $R/\mathfrak{N}_1$ il suit de [13], théorème 14, p. 260 que l'anneau $(R/(J_b, P))_{\mathfrak{M}}=(R/(\mathfrak{N}_1, P))_{\mathfrak{M}}$ est de Cohen-Macaulay, et donc que l'idéal (J_b, P) est aussi parfait dans $\mathscr{U}_b$. Nous allons voir que $\mathscr{U}_{b-1}$ est contenu dans $\mathscr{U}_b$ ce qui établira que J_{b-1} est parfait en tout point de $\mathscr{U}_{b-1}$.

Fait C. — On a $\sqrt{J_{b-1}}=\sqrt{(\mathfrak{N}_1, P)}\cap\sqrt{\mathfrak{N}_2}$. En particulier tous les premiers de F_2 sont également associés à J_{b-1} et $\mathscr{U}_{b-1}\subset\mathscr{U}_b$.

Preuve. — On a $\sqrt{J_{b-1}}=\sqrt{(\sqrt{J_b}, P)}$, mais $\sqrt{J_b}=\sqrt{\mathfrak{N}_1}\cap\sqrt{\mathfrak{N}_2}$ et comme $P\in I$ on vérifie encore $P\in\sqrt{\mathfrak{N}_2}$ d'où

$$\sqrt{J_{b-1}} = \sqrt{(\mathfrak{N}_1, P)}\cap\sqrt{\mathfrak{N}_2}.$$

L'inclusion inverse résulte facilement de $P\in\sqrt{\mathfrak{N}_2}$. Pour voir que les premiers de F_2 sont associés à J_{b-1} il suffit de vérifier qu'aucun de ces premiers ne contient $(\mathfrak{N}_1, P)$, or on sait qu'aucun de ces premiers ne contient $\mathfrak{N}_1$, ce qui achève de montrer le fait. □

Les composantes de $\mathfrak{N}_1$ sont toutes de dimensions $\leqslant b$ et P étant non diviseur de zéro dans $R/\mathfrak{N}_1$ l'idéal $(\mathfrak{N}_1, P)$ est de dimension $\leqslant b-1$ on a donc $\sqrt{J_{b-1}(\geqslant b)}=\sqrt{\mathfrak{N}_2(\geqslant b)}$ et chaque premier associé à $\mathfrak{N}_2$ étant aussi associé à I il vient $\sqrt{J_{b-1}(\geqslant b)}\supset\sqrt{I(\geqslant b)}$. L'inclusion inverse résulte du fait A car $\sqrt{J_{b-1}(\geqslant b+1)}=\sqrt{J_b(\geqslant b+1)}=\sqrt{I(\geqslant b+1)}$ et $J_{b-1}\subset I$. Ceci démontre les deux premières assertions de $((b-1)_1)$, mais le fait C permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
SH(\sqrt{J_{b-1}}; D_1, \ldots, D_p) \leqslant SH(\sqrt{\mathfrak{N}_2}; D_1, \ldots, D_p)& \\
+SH(\sqrt{(\mathfrak{N}_1, P)}; D_1, \ldots, D_p)&,
\end{aligned}
$$

et on vérifie aisément que si $\sqrt{\mathfrak{N}_1}=\mathfrak{P}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{P}_h$ on a

$$
\sqrt{(\mathfrak{N}_1, P)}=\sqrt{(\mathfrak{P}_1, P)}\cap\ldots\cap\sqrt{(\mathfrak{P}_h, P)},
$$

$(\sqrt{(\mathfrak{N}_1, P)}$ est clairement contenu dans l'intersection de droite et si Q appartient à cette intersection il existe des polynômes $B_1, \ldots, B_h$ et des entiers $e_1, \ldots, e_h$ tels que $Q^{e_i}-B_iP\in\mathfrak{P}_i$ pour $i=1, \ldots, h$, le polynôme $Q^{e_1+\cdots+e_h}$ appartient alors à $(\mathfrak{N}_1, P)$ d'où l'inclusion inverse). On en conclut que pour tout $c=1, \ldots, b$ on a $\sqrt{(\mathfrak{N}_1, P)(c-1)}=\sqrt{(\mathfrak{N}_1(c), P)}$. En utilisant le lemme 3.1 on obtient

$$
\begin{aligned}
&SH(\sqrt{(\mathfrak{N}_1, P)}; D_1, \ldots, D_p) \\
&\quad\leqslant\textstyle\sum_{c=1}^{b} H((\mathfrak{N}_1(c), P); D_1, \ldots, D_p)=\sum_{c=1}^{b} H(\mathfrak{N}_1(c); D_1, \ldots, D_p) \\
&\quad\leqslant SH(\sqrt{\mathfrak{N}_1}; D_1, \ldots, D_p).
\end{aligned}
$$

Reportant cette inégalité dans la précédente on vérifie la dernière assertion de $((b-1)_1)$ qui se trouve ainsi établi.

Pour démontrer $((b-1)_2)$ notons $\mathfrak{N}'_2$ (resp. $\mathfrak{N}'_1$) l'insertion des composantes primaires isolées non triviales de J_{b-1} dont le radical est contenu dans un élément de $\mathcal{U}$ et est associé à $\mathfrak{N}_2$ (resp. n'est pas associé à $\mathfrak{N}_2$). Les premiers associés à $\mathfrak{N}'_1$ sont nécessairement associés à $(\mathfrak{N}_1, P)$ (*cf.* fait C), et ne peuvent contenir aucun premier associé à $\mathfrak{N}_2\cap I_\infty$, donc de façon équivalente, on peut définir $\mathfrak{N}'_1$ comme l'intersection des composantes primaires isolées non triviales de J_{b-1} contenues dans un élément de $\mathcal{U}_b$.

Fait D. — Il existe un polynôme Q appartenant à l'intersection de toutes les composantes immergées de J_b et non diviseur de zéro dans $R/J_b(\geqslant 0)$ (et donc dans $R/\mathfrak{N}'_2$).

Preuve. — Pour toute composante immergée $\mathfrak{Q}$ et tout premier isolé $\mathfrak{P}$ associé à J_b il existe un élément de $\mathfrak{Q}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{P}$ car toute composante de J_b contenant $\mathfrak{Q}$ est nécessairement immergée dans J_b. D'après la proposition 5, p. 81 de [13], il existe donc un élément de $\mathfrak{Q}$ non diviseur de zéro dans $R/J_b(\geqslant 0)$, le produit de ces éléments est un polynôme Q satisfaisant le fait D. □

Par ailleurs les premiers associés à $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ étant distincts il résulte encore de la proposition 5, p. 81 de [13], qu'il existe un polynôme $Q' \in \mathfrak{N}_1$ non diviseur de zéro dans $R/\mathfrak{N}_2$ et donc dans $R/\mathfrak{N}'_2$. On a $Q'\mathfrak{N}_2 \subset J_b(\geqslant 0)$ d'où $QQ'\mathfrak{N}_2 \subset J_b \subset J_{b-1} \subset \mathfrak{N}'_2$ et par suite $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}'_2$ car QQ' est non diviseur de zéro dans $R/\mathfrak{N}'_2$.

Fait E. — Le radical d'une composante immergée de J_b n'est contenue dans aucun premier associé à $\mathfrak{N}'_1$. Il existe un polynôme Q dans l'intersection des composantes immergées de J_b non diviseur de zéro dans $R/\mathfrak{N}'_1$.

Preuve. — Comme J_b est parfait en tout point de $\mathscr{U}_b$, pour tout $\mathfrak{M} \in \mathscr{U}_b$ l'idéal $(J_b)_{\mathfrak{M}}$ de $R_{\mathfrak{M}}$ est sans composante immergée. En effet (0) est pur dans $(R/J_b)_{\mathfrak{M}}$, (*cf.* définitions, p. 257 de [13]), et donc si $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ sont deux premiers associés à $(J_b)_{\mathfrak{M}}$ tels que $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{P}'$ les idéaux $(\mathfrak{P}/J_b)_{\mathfrak{M}}$ et $(\mathfrak{P}'/J_b)_{\mathfrak{M}}$ associés à (0) dans $(R/J_b)_{\mathfrak{M}}$ sont égaux, comme $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ contiennent $(J_b)_{\mathfrak{M}}$ cela entraine que $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$ et montre que $(J_b)_{\mathfrak{M}}$ est bien sans composante immergée. Il en résulte qu'aucune composante immergée de J_b n'est contenue dans un élément de $\mathscr{U}_b$. La première assertion du fait suit alors de la définition de $\mathfrak{N}'_1$ et la seconde se démontre comme le fait D. □

Pour tout $c = 1, \ldots, b$ désignons par $\mathfrak{N}_1(c)_{\mathscr{U}}$ l'intersection des composantes primaires (isolées) de $\mathfrak{N}_1(c)$ contenues dans un élément de $\mathscr{U}$, on a clairement $H(\mathfrak{N}_1(c)_{\mathscr{U}}; D_1, \ldots, D_p) = S_{\mathscr{U}} H(\mathfrak{N}_1(c); D_1, \ldots, D_p)$ et les premiers associés à $\mathfrak{N}'_1(c-1)$ sont aussi associés à $(\mathfrak{N}_1(c)_{\mathscr{U}}, P)$.

Soit $1 \leqslant c \leqslant b$ et $\mathfrak{P}$ un premier isolé de dimension $c-1$ associé à $\mathfrak{N}'_1$, ce premier étant un premier isolé de J_{b-1} ne peut contenir $\mathfrak{N}_2$, et s'il contient $\mathfrak{N}_1(c')$ il contient aussi P et donc un premier isolé associé à $(\mathfrak{N}_1(c'), P)$, ce qui montre que $c' = c$ car tout premier isolé associé à $(\mathfrak{N}_1(c'), P)$ soit est associée à $\mathfrak{N}'_1$, soit n'est pas contenu dans un élément de $\mathscr{U}_b$. Reprenant la preuve du fait D on déduit de la proposition 5, p. 81 de [13], l'existence d'un élément Q' dans

$$\mathfrak{N}_2 \cap (\cap_{c' \neq c} \mathfrak{N}_1(c'))$$

et non diviseur de zéro dans $R/\mathfrak{N}'_1(c-1)$. Par définition, toute composante de $\mathfrak{N}'_1$ est contenue dans un élément de $\mathcal{U}$ et donc, encore par la proposition 5, p. 81 de [13], il existe un polynôme Q'' dans l'intersection des composantes primaires de $\mathfrak{N}_1(c)$ non contenues dans un élément de $\mathcal{U}$, non diviseur de zéro dans $R/\mathfrak{N}'_1(c-1)$. On a donc

$$Q'Q''\mathfrak{N}_1(c)_{\mathcal{U}} \subset J_b(\geqslant 0) \qquad \text{et} \qquad QQ'Q''(\mathfrak{N}_1(c)_{\mathcal{U}}, P) \subset J_{b-1} \subset \mathfrak{N}'_1(c-1),$$

comme $QQ'Q''$ est non diviseur de zéro dans $R/\mathfrak{N}'_1(c-1)$ on en déduit $(\mathfrak{N}_1(c)_{\mathcal{U}}, P) \subset \mathfrak{N}'_1(c-1)$ pour tout $c=1, \ldots, b$. Ces deux derniers idéaux étant de même dimension $c-1$ on obtient en utilisant les lemmes 3.2 et 3.1

$$\begin{aligned} H(\mathfrak{N}'_1(c-1); D_1, \ldots, D_p) &\leqslant H((\mathfrak{N}_1(c)_{\mathcal{U}}, P); D_1, \ldots, D_p) \\ &= H(\mathfrak{N}_1(c)_{\mathcal{U}}; D_1, \ldots, D_p) \leqslant S_{\mathcal{U}} H(\mathfrak{N}_1(c); D_1, \ldots, D_p), \end{aligned}$$

pour tout $c=1, \ldots, b$. De même comme $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}'_2$ et $\sqrt{\mathfrak{N}_2} = \sqrt{\mathfrak{N}'_2}$ on a

$$S_{\mathcal{U}} H(\mathfrak{N}'_2; D_1, \ldots, D_p) \leqslant S_{\mathcal{U}} H(\mathfrak{N}_2; D_1, \ldots, D_p),$$

et sommant ces différentes inégalités on obtient

$$\begin{aligned} &S_{\mathcal{U}} H(J_{b-1}; D_1, \ldots, D_p) \\ &\quad = S_{\mathcal{U}} H(\mathfrak{N}'_2; D_1, \ldots, D_p) + \textstyle\sum_{c=1}^{b} H(\mathfrak{N}'_1(c-1); D_1, \ldots, D_p) \\ &\quad \leqslant S_{\mathcal{U}} H(\mathfrak{N}_2; D_1, \ldots, D_p) + \textstyle\sum_{c=0}^{b} H(\mathfrak{N}_1(c); D_1, \ldots, D_p) \\ &\quad \leqslant S_{\mathcal{U}} H(J_b; D_1, \ldots, D_p). \end{aligned}$$

$((b-1)_2)$ découle alors de (b_2) et ceci achève d'établir la proposition 3.3.

Remarque. — On peut vérifier que la seconde inégalité de la proposition 3.3 est fausse en général. Plus précisément l'idéal $I_0 = (X_1^2 X_3 - X_2^2 X_0, X_1 X_4 - X_2 X_3, X_3^3 - X_4^2 X_0)$ est homogène, premier de dimension 2 et degré 4 dans $K[X_0, X_1, X_2, X_3, X_4]$ $(p=1)$, mais en prenant $m=2$, $D_1=1$, $P_1 = X_3$ et $P_2 = X_1 - X_4$ l'idéal :

$$\begin{aligned} I = (I_0, P_1, P_2) &= (X_1^2, X_2^2 X_0, X_3, X_1 - X_4) \\ &= (X_1^1, X_2^2, X_3, X_1 - X_4) \cap (X_0, X_1^2, X_3, X_1 - X_4) \end{aligned}$$

a deux composantes primaires isolées de dimension 0 et de degrés respectifs 4 et 2.

Mentionnons encore le résultat suivant qui explicite la situation des sous-variétés produits de $\mathbb{P}$.

LEMME 3.4. — *Si $V_1, \ldots, V_p$ sont des sous-variétés de $\mathbb{P}_{N_1}, \ldots, \mathbb{P}_{N_p}$ respectivement et si on note $V = V_1 \times \ldots \times V_p$ la sous-variété produit dans $\mathbb{P}$ on a pour tout $d_1 \geqslant 1, \ldots, d_p \geqslant 1$:*

$$H(V;\, d_1, \ldots, d_p) = \frac{(\dim V)!}{(\dim V_1)! \ldots (\dim V_p)!} \times \deg V_1 \ldots \deg V_p . d_1^{\dim V_1} \ldots d_p^{\dim V_p}.$$

Démonstration. — En utilisant l'interprétation géométrique des coefficients $c_\alpha(V)$ associés par $(*)$ au polynôme $H(V;\, d_1, \ldots, d_p)$ donnée avec l'énoncé du lemme 3.2, on vérifie sans peine que $c_\alpha(V) = 0$ si $\alpha \neq (\dim V_1, \ldots, \dim V_p)$ et $c_\alpha(V) = \deg V_1 \ldots \deg V_p$ sinon. Le lemme est alors immédiat d'après l'expression $(*)$.

Enfin pour conclure ce paragraphe, nous voudrions poser quelques définitions qui nous serons utiles dans les paragraphes 4 et 5.

On note maintenant $\mathfrak{G}$ l'idéal de définition de G dans R.

DÉFINITIONS 3.5. — (1) *Une sous-variété V de G sera dite définie (resp. incomplètement définie) par un idéal I dans G si $V = G \cap \mathscr{Z}(I)$ (resp. si toutes les composantes de V sont des composantes de $G \cap \mathscr{Z}(I)$),*

(2) *V sera alors dite définie (resp. incomplètement définie) par des équations de multidegrés $\leqslant (D_1, \ldots, D_p)$ si l'idéal I peut-être engendré modulo $\mathfrak{G}$ par des polynômes de multidegrés $\leqslant (D_1, \ldots, D_p)$,*

(3) *et on dira que I définit (resp. définit incomplètement) V dans G avec multiplicité $\geqslant l$ si les composantes primaires isolées de l'idéal $(\mathfrak{G}, I)$*

correspondant aux composantes irréductibles de V sont toutes de longueurs $\geqslant l$.

4. Géométrie dans les groupes algébriques commutatifs

4.1. Opérateurs et degrés

On reprend les notations introduites au paragraphe 2. Fixons pour commencer un point $g \in G$, et soient $(\mathscr{V}_\beta)_{\beta \in \mathscr{B}}$ un recouvrement de G par des ouverts de Zariski et

$$(T^{(\beta)}_{1,\,0}, \ldots, T^{(\beta)}_{p,\,N_p})_{\beta \in \mathscr{B}}$$

des familles de fonctions $T^{(\beta)}_{i,\,j}(\underline{X}_i, \mathbf{z})$ polynômes homogènes de degré $\leqslant c_i$ par rapport au système de variables $\underline{X}_i = (X_{i,\,0}, \ldots, X_{i,\,N_i})$, analytiques en $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d)$ au voisinage de $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ dans K^d et représentant pour un $\varepsilon > 0$ l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_g :\quad & G(K) \times B(\mathbf{0}, \varepsilon) \to G(K) \\ & (h, \mathbf{z}) \to h + g + \Phi(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

sur $\mathscr{V}_\beta \times \mathrm{B}(\mathbf{0}, \varepsilon)$ où $\mathrm{B}(\mathbf{0}, \varepsilon)$ est la boule de rayon ε centrée en $\mathbf{0}$ dans K^d.

Remarque. — On peut facilement construire de tels ouverts $\mathscr{V}_\beta$ et polynômes $T^{(\beta)}_{i,\,j}$ de degrés indépendants du point g considéré. H. Lange a montré (*voir* [5]) que l'on pouvait toujours plonger G_i dans un espace projectif $\mathbb{P}_{N_i}$ de dimension raisonnable de sorte à pouvoir choisir l'entier $c_i \leqslant 2$ (i. e. $c_i = 1$ ou 2).

Pour $\beta \in \mathscr{B}$ et $\boldsymbol{\varkappa} = (\kappa_1, \ldots, \kappa_d) \in \mathbb{N}^d$ on note $|\boldsymbol{\varkappa}| = \kappa_1 + \ldots + \kappa_d$ et l'on pose la définition suivante :

Définition 4.1. — *Pour tout $Q \in R$ multihomogène on note $\partial^{\boldsymbol{\varkappa}}_{g,\,\beta} Q$ le polynôme de R*

$$\frac{\partial^{|\boldsymbol{\varkappa}|}}{\partial \mathbf{z}^{\boldsymbol{\varkappa}}} Q(T^{(\beta)}_{1,\,0}(\underline{X}_1, \mathbf{z}), \ldots, T^{(\beta)}_{p,\,N_p}(\underline{X}_p, \mathbf{z}))\big|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}}.$$

Il est ainsi clair que si Q est de multidegré $(D_1, \ldots, D_p)$ les polynômes $\partial^{\boldsymbol{\varkappa}}_{g,\,\beta} Q$ sont de multidegrés $(c_1 D_1, \ldots, c_p D_p)$. On vérifie également que pour tout $\beta \in \mathscr{B}$ et $g \in G$ si $\varkappa = \mathbf{0}$ l'opérateur $\partial^{\mathbf{0}}_{g,\,\beta}$ est un homomorphisme de la K-algèbre R, mais en général l'opérateur $\partial^{\varkappa}_{g,\,\beta}$ est seulement K-linéaire.

Soit $\mathfrak{G}$ l'idéal de définition de G dans R.

DÉFINITION 4.2. — *Soient $k \in \mathbb{N}$, $g \in G$ et I un idéal multihomogène de R, on pose $\partial^k_g I$ l'idéal intersection de toutes les composantes primaires de l'idéal*

$$(\mathfrak{G},\ \partial^{\varkappa}_{g,\,\beta} Q;\ |\varkappa| \leqslant k,\ \beta \in \mathscr{B} \text{ et } Q \in I)$$

dont les variétés des zéros dans $\mathbb{P}$ rencontrent G.

On vérifie que $\partial^k_g \mathfrak{G} = \mathfrak{G}$, que si $I \subset J$ alors $\partial^k_g I \subset \partial^k_g J$ et que $(\partial^k_g I,\ \partial^k_g J) = \partial^k_g (I,\ J)$. On notera encore $\partial^0_g I = \tau_g I$ et $\partial^k_0 I = \partial^k I$ le cas échéant.

Les deux propositions suivantes explicitent la nature géométrique des opérateurs introduits.

PROPOSITION 4.3. — *Soient $k,\ k' \in \mathbb{N}$, $g,\ g' \in G$ et I un idéal multihomogène de R. L'idéal $\partial^k_g I$ ne dépend pas du choix des ouverts V_β et des fonctions $T^{(\beta)}_{i,\,j}$ utilisés pour représenter l'application $\tilde{\tau}_g$. Et les idéaux $\partial^k_g \circ \partial^{k'}_{g'} I$ et $\partial^{k+k'}_{g+g'} I$ sont égaux.*

Démonstration. — Considérons deux recouvrements $(\mathscr{V}_\beta)_{\beta \in \mathscr{B}}$ [resp. $(\mathscr{W}_\gamma)_{\gamma \in \mathscr{C}}$] de G et deux familles $T^{(\beta)}_{i,\,j}$ (resp. $U^{(\gamma)}_{i,\,j}$) de fonctions représentant l'application $\tilde{\tau}_g$ sur $\mathscr{V}_\beta \times B(\mathbf{0},\ \varepsilon)$ [resp. $\mathscr{W}_\gamma \times B(\mathbf{0},\ \delta)$]. Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ les idéaux $\partial^k_g I$ donnés par la définition 4.2 pour ces deux choix. Pour toute suite $\sigma = (\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_p)$ telle que $\sigma_i \in \{0,\ \ldots,\ N_i\}$ on pose :

$$\Pi^{(\beta)}_\sigma = \prod_{i=1}^{p} (T^{(\beta)}_{i,\,\sigma_i})^{D_i} \qquad [\text{resp. } \Omega^{(\gamma)}_\sigma = \prod_{i=1}^{p} (U^{(\gamma)}_{i,\,\sigma_i})^{D_i}].$$

On a alors sur $(\mathscr{V}_\beta \times \mathrm{B}(\mathbf{0},\ \varepsilon)) \cap (\mathscr{W}_\gamma \times \mathrm{B}(\mathbf{0},\ \delta))$ et pour tout polynôme Q de R multihomogène de multidegré $(D_1,\ \ldots,\ D_p)$ l'identité suivante :

$$(**) \qquad Q(\ldots,\ T^{(\beta)}_{i,\,j},\ \ldots) = \frac{\Pi^{(\beta)}_\sigma}{\Omega^{(\gamma)}_\sigma} \cdot Q(\ldots,\ U^{(\gamma)}_{i,\,j},\ \ldots)$$

On vérifie sans difficulté que pour $\varkappa' \in \mathbb{N}^d$ on a :

$$(\Omega^{(\gamma)}_\sigma)^{|\varkappa'|+1} \cdot \frac{\partial^{|\varkappa'|}}{\partial \mathbf{z}^{\varkappa'}} \left[\frac{\Pi^{(\beta)}_\sigma}{\Omega^{(\gamma)}_\sigma} \right] \Bigg|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}} \in R.$$

Appliquant la formule de Leibnitz à (**) et utilisant la relation ci-dessus il s'ensuit que pour tout $|\varkappa|\leqslant k$:

$$(\Omega_\sigma^{(\gamma)}(\underline{\underline{X}}, \mathbf{0}))^{k+1}\cdot\frac{\partial^{|\varkappa|}}{\partial \mathbf{z}^{\varkappa}}Q(\ldots, T_{i,j}^{(\beta)}(\underline{X}_i, \mathbf{z}), \ldots)\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}}\in\mathfrak{N}.$$

Comme les polynômes $\Omega_\sigma^{(\gamma)}(\underline{\underline{X}}, \mathbf{0})$ sont sans zéro commun dans G lorsque σ et γ varient, on en conclut que $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$. Symétriquement on montre que $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$ et donc que $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$ ce qui établit la première partie de la proposition.

De la même manière que précédemment on montre que l'idéal $\partial_g^k\circ\partial_{g'}^{k'}I$ est égal à l'intersection de toutes les composantes primaires, dont les variétés des zéros rencontrent G, de l'idéal $\mathfrak{L}$ engendré dans R par $\mathfrak{G}$ et les polynômes

$$\frac{\partial^{|\varkappa|}}{\partial \mathbf{z}^{\varkappa}}\circ\frac{\partial^{|\varkappa'|}}{\partial \mathbf{z}'^{\varkappa'}}Q(\underline{\mathrm{T}}^{(\beta)}(\underline{\underline{X}}, \mathbf{z}+\mathbf{z}'))\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}'=\mathbf{0}}=\frac{\partial^{|\varkappa+\varkappa'|}}{\partial \mathbf{z}^{\varkappa+\varkappa'}}Q(\underline{\underline{\mathrm{T}}}^{(\beta)}(\underline{\underline{X}}, \mathbf{z}))\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}}$$

lorsque $|\varkappa|\leqslant k$, $|\varkappa'|\leqslant k'$, β parcourt $\mathscr{B}$, Q parcourt I et les fonctions $T_{i,j}^{(\beta)}$ représentent une application $\tilde{\tau}_{g+g'}$ sur les ouverts $\mathscr{V}_\beta$. Ainsi l'idéal $\mathfrak{L}$ n'est autre que

$$\mathfrak{L}=(\mathfrak{G},\ \partial_{g+g',\,\beta}^{\varkappa}Q;\ |\varkappa|\leqslant k+k',\ \beta\in\mathscr{B}\text{ et }Q\in I).$$

Revenant à la définition 4.2 on déduit immédiatement que $\partial_g^k\circ\partial_{g'}^{k'}I=\partial_{g+g'}^{k+k'}I$. Ceci achève la preuve de la proposition 4.3.

PROPOSITION 4.4. — *Soit $g\in G$, $k\in\mathbb{N}$ et I un idéal multihomogène de R. On a équivalence entre les deux propriétés :*

(i) $h\in G\cap(\partial_g^k I)$

(ii) *tout polynôme Q de I s'annule à un ordre $>k$ le long de A en $g+h$.*

Démonstration. — La notion d'ordre le long de A a été définie au début du paragraphe 2. Soient $h\in G$, $\mathscr{V}_\beta$ un ouvert de G contenant h et $(T_{i,j}^{(\beta)};\ i=1, \ldots, p, j=0, \ldots, N_i)$ des fonctions représentant l'application $\tilde{\tau}_g$ sur $\mathscr{V}_\beta\times B(\mathbf{0}, \varepsilon)$. Soit $\underline{\underline{h}}=(h_{i,j})$ un système de coordonnées multiprojectives de h, les fonctions :

$$\psi_{i,j}(\mathbf{z})=T^{(\beta)}_{i,j}(\underline{\underline{\mathrm{h}}},\mathbf{z}) \qquad (i=1,\ldots,p, j=0,\ldots,N_i)$$

représentent, au voisinage de $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ dans K^d, l'application Ψ obtenue en composant Φ avec la translation τ_{g+h} dans G.

Si $h\in G\cap \mathbb{Z}(\partial^k_g I)$, pour tout polynôme $Q\in I$ et tout $|\varkappa|\leqslant k$ il suit de la définition 4.2 que :

$$\partial^{\varkappa}_{g,\beta}Q(\underline{\underline{\mathrm{h}}})=\frac{\partial^{|\varkappa|}}{\partial \mathbf{z}^{\varkappa}}Q(\ldots, T^{(\beta)}_{i,j}(\underline{\underline{\mathrm{h}}},\mathbf{z}),\ldots)\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}}=0,$$

c'est-à-dire que l'ordre de la fonction $F(\mathbf{z})=Q(\ldots,\psi_{i,j}(\mathbf{z}),\ldots)$ en $\mathbf{0}$ est $>k$. On a donc bien montré que (i) $\Rightarrow$ (ii).

Réciproquement si pour tout polynôme $Q\in I$ l'ordre de $F(\mathbf{z})$ en $\mathbf{0}$ est $>k$, on vérifie que pour tout $|\varkappa|\leqslant k$ on a $\partial^{\varkappa}_{g,\beta}Q(\underline{\underline{\mathrm{h}}})=0$. Soit $\beta'\in\mathscr{B}$, utilisant l'égalité $(**)$ de la preuve de la proposition 4.3 avec $U^{(\gamma)}_{i,j}=T^{(\beta')}_{i,j}$ et σ telle que $\Pi^{(\beta)}_{\sigma}(\underline{\underline{\mathrm{h}}},\mathbf{0})\neq 0$ on montre que pour tout $|\varkappa|\leqslant k$ on a :

$$(\Pi^{(\beta)}_{\sigma}(\underline{\underline{\mathrm{h}}},\mathbf{0}))^{k+1}\cdot\partial^{\varkappa}_{g,\beta'}Q(\underline{\underline{\mathrm{h}}})=\textstyle\sum_{|\varkappa'|\leqslant|\varkappa|}\lambda_{\varkappa'}\cdot\partial^{\varkappa'}_{g,\beta}Q(\underline{\underline{\mathrm{h}}})=0,$$

et donc $\partial^{\varkappa}_{g,\beta'}Q(\underline{\underline{\mathrm{h}}})=0$ pour tout $\beta'\in\mathscr{B}$. Comme $h\in G$ cela entraîne que $h\in G\cap^{t}\mathscr{Z}(\partial^k_g I)$ et achève la preuve de la proposition 4.4.

Remarque. — Si I est l'idéal de définition d'une sous-variété V de G, il est facile de vérifier à l'aide de la proposition 4.4 que $\tau_g I$ est contenu dans l'idéal de définition de la sous-variété $V-g$ de G. On peut démontrer que $\tau_g I$ est en fait égal à l'idéal de définition de $V-g$. La démonstration repose sur les techniques utilisées dans les preuves des propositions 4.3 et 4.4, nous la laissons au lecteur qui pourra également s'inspirer des paragraphes 2 et 3 de [9].

Nous en arrivons maintenant à une propriété de « quasi invariance » du polynôme de Hilbert-Samuel d'une sous-variété V de G par translation dans G. Moreau a remarqué dans [8] que la propriété d'invariance correspondante est satisfaite (i. e. que l'on peut prendre $c_1=\ldots=c_p=1$ dans le lemme ci-après) pourvu que l'on suppose que le plongement de G dans $\mathbb{P}$ permet pour tout $g\in G$ de prolonger le morphisme τ_g de translation par g

dans G en un morphisme de $\bar{G}$. Mais ici notre définition des opérateurs $\partial^{\varkappa}_{g,\,\beta}$ pour $|\varkappa|>0$ réintroduit ces entiers de sorte que même en restreignant le plongement de G dans $\mathbb{P}$ nous ne savons que remplacer, dans l'inégalité du théorème 2.1, l'expression $H(G'; D_1, \ldots, D_p)$ par $H(G'; c_1 D_1, \ldots, c_p D_p)$. Aussi n'avons nous imposé aucune condition au plongement de G dans $\mathbb{P}$ et montrons le lemme suivant qui est l'équivalent du lemme 5 de [10]. On note encore $c_i (i=1, \ldots, p)$ un majorant des degrés des formules représentant les translations sur G_i (*voir* remarque au début de ce paragraphe).

LEMME 4.5. — *Soit $g \in G$ et V une sous-variété de G. En désignant par $g+V$ la sous-variété translatée de V par g dans G on a* dim $V=$dim $(g+V)$ *et pour $d_1 \geqslant 1, \ldots, d_p \geqslant 1$:*

$$H(V; d_1, \ldots, d_p) \leqslant H(g+V; c_1 d_1, \ldots, c_p d_p).$$

Démonstration. — La translation par g étant un isomorphisme de G, il résulte que dim $V=$dim $(g+V)=a$. Par ailleurs, il suit du lemme 3.1 que si $Z_1=\mathscr{Z}(P_1), \ldots, Z_a=\mathscr{Z}(P_a)$ sont des hypersurfaces de $\mathbb{P}$ de même multidegré $(d_1, \ldots, d_p)$ et telles que $\dim(V \cap Z_1 \cap \ldots \cap Z_a)=0$ on a grâce au lemme 3.1 :

$$H(V; d_1, \ldots, d_p)=H(V \cap Z_1 \cap \ldots \cap Z_a; d_1, \ldots, d_p).$$

On peut choisir les hypersurfaces $Z_1, \ldots, Z_a$ de sorte que cette dernière quantité soit égale à $\operatorname{card}(V \cap Z_1 \cap \ldots \cap Z_a)$ et la translation par g étant un isomorphisme de G on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(V \cap Z_1 \cap \ldots \cap Z_a) &= \operatorname{card}(g+(V \cap Z_1 \cap \ldots \cap Z_a)) \\ &= H(g+(V \cap Z_1 \cap \ldots \cap Z_a); d_1, \ldots, d_p).\end{aligned}$$

On en déduit sans difficulté que :

$$\begin{aligned}&H(V; d_1, \ldots, d_p) \\ &\qquad = H((g+V) \cap (g+Z_1 \cap G) \cap \ldots \cap (g+Z_a \cap G); d_1, \ldots, d_p).\end{aligned}$$

Mais l'idéal de définition de $(g+Z_1 \cap G) \cap \ldots \cap (g+Z_a \cap G)$ contenant, d'après la proposition 4.4, l'idéal :

$$J=(\partial^{0}_{-g,\,\beta} P_i;\ \beta \in \mathscr{B} \text{ et } i=1, \ldots, a)$$

où les polynômes $\partial^{0}_{-g,\,\beta} P_i$ sont de multidegrés $(c_1 d_1, \ldots, c_p d_p)$, il suit de la proposition 3.3 que si I est l'idéal de définition de $g+V$ on a :

$$H(V;\, d_1, \ldots, d_p) \leqslant H(\sqrt{(I, J)};\, d_1, \ldots, d_p) \leqslant H(I;\, c_1 d_1, \ldots, c_p d_p),$$

ce qui établit le lemme 4.5.

4.2. Opérateurs et multiplicités

Le but de ce sous-paragraphe est de prouver un cas très particulier (proposition 4.7) d'un lemme initialement démontré par Wüstholz pour établir le théorème 2 de [17] ([1]). La preuve que nous donnons ici est plus proche de [3].

Nous reprenons les notations du début du paragraphe. En particulier nous nous sommes donnés $g \in G$, $(\mathscr{V}_\beta)_{\beta \in \mathscr{B}}$ un recouvrement de G et $((T^{(\beta)}_{1,\,0}, \ldots, T^{(\beta)}_{p,\,N_p}))_{\beta \in \mathscr{B}}$ des familles de fonctions représentant l'application $\tilde{\tau}_g$.

Soit G' un sous-groupe algébrique connexe de G, nous posons $s = \operatorname{codim}_A (A \cap G')$ et $\mathfrak{G}'$ l'idéal de définition de $g+G'$ dans R; c'est un idéal premier car G' est connexe et donc $g+G'$ est une sous-variété irréductible de $\mathbb{P}$. Appelons $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_d)$ la base canonique de K^d on a $K^d/\Phi^{-1}(A \cap G') \simeq K^s$ et l'on peut supposer, quitte à réindexer la base $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_d)$, que les vecteurs $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s$ se projettent en une base de $K^d/\Phi^{-1}(A \cap G')$.

Rappelons encore que la fonction $\Psi : K^s \to G(K)$, définie et analytique au voisinage de l'origine de K^s obtenue en restreignant à K^s la composée du sous-groupe analytique Φ avec la translation τ_g par g dans G, se factorise via l'espace tangent (à l'origine) de G. Plus précisément on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} K^s \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "T\Psi"'] & & G(K) \\ & TG(K) \arrow[ur, "g+\exp_G"'] & \end{tikzcd}$$

([1]) *Cf.* exposé de G. Wüstholz au Séminaire de Théorie des nombres de Paris le 12 décembre 1983.

où $T\Psi$ désigne l'application linéaire tangente de Ψ en $\mathbf{0}$ et $TG(K) \simeq K^n$ est l'espace tangent (à l'origine) de G.

On peut alors montrer le lemme suivant :

LEMME 4.6. — *Pour tout $\beta \in \mathscr{B}$ tel que $(g+G') \cap \mathscr{V}_\beta \neq \emptyset$ il existe des polynômes $Q_1, \ldots, Q_s \in \mathfrak{G}'$ tels que $\partial^{\varkappa_i}_{0, \beta} Q_j \notin \mathfrak{G}'$ si et seulement si $i=j$ lorsque i et j parcourent $\{1, \ldots, s\}$.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que l'application $R/\mathfrak{G}'$-linéaire

$$\mathfrak{G}' \to (R/\mathfrak{G}')^s$$
$$Q \to (\partial^{\varkappa_i}_{0, \beta} Q \bmod \mathfrak{G}')_{i=1, \ldots, s}$$

est de rang s. Mais s'il n'en était pas ainsi, il existerait des éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ de R, non tous dans $\mathfrak{G}'$, tels que pour tout Q dans $\mathfrak{G}'$ on ait :

$$\textstyle\sum_{i=1}^s \lambda_i \partial^{\varkappa_i}_{0, \beta} Q \in \mathfrak{G}'.$$

Soit g' un point de $(g+G') \cap \mathscr{V}_\beta$ et $\underline{\underline{g}}'$ un système de coordonnées multiprojectives de g' dans $\mathbb{P}$ tels que les éléments $\lambda_1(\underline{\underline{g}}'), \ldots, \lambda_s(\underline{\underline{g}}')$ de K soient non tous nuls, on a alors :

$$\textstyle\sum_{i=1}^s \lambda_i(\underline{\underline{g}}') \partial^{\varkappa_i}_{0, \beta} Q(\underline{\underline{g}}') = 0.$$

Ceci signifie que le vecteur $T\Psi(\lambda) \in TG(K)$, avec $\lambda = \lambda_1(\underline{\underline{g}}')\varkappa_1 + \ldots + \lambda_s(\underline{\underline{g}}')\varkappa_s$, est tangent à $g+G'$ en g' et appartient donc à $TG'(\overline{K})$. Mais ceci entraîne que $\lambda \in \Phi^{-1}(A \cap G')$ contredisant le fait que les éléments $\lambda_1(\underline{\underline{g}}'), \ldots, \lambda_s(\underline{\underline{g}}')$ de K sont non tous nuls et donc que λ est non nul dans $K^d/\Phi^{-1}(A \cap G')$.

Nous pouvons maintenant démontrer le cas particulier du lemme de Wüstholz dont nous aurons besoin. On reprend la définition 3.5 posée au paragraphe précédent et les notations introduites dans le présent paragraphe, notamment $s = \operatorname{codim}_A(A \cap G')$.

PROPOSITION 4.7 (Wüstholz). — *Si I est un idéal multihomogène de R définissant incomplètement $g+G'$ et si pour $T \in \mathbb{N}$ l'idéal $\partial^T I$ définit incomplètement $g+G'$ alors I définit incomplètement $g+G'$ avec multiplicité $\geqslant \binom{T+s}{s}$.*

Démonstration. — Il résulte de la définition 3.5 que l'idéal I a une composante primaire J isolée de radical $\mathfrak{G}'$. Cette composante étant isolée, on vérifie sans peine qu'il existe un polynôme Q de R n'appartenant pas à $\mathfrak{G}'$ et tel que $Q.J \subset I$, on a alors $\partial^T (Q.J) \subset \partial^T I \subset \mathfrak{G}'$. Mais si $Q \notin \mathfrak{G}'$ on a certainement $\partial^0_{0,\,\beta} Q \notin \mathfrak{G}'$ d'après la proposition 4.4. On montre alors de proche en proche que $\partial^t j \subset \mathfrak{G}'$ pour $t=0, 1, \ldots, T$. Si $\partial^{t-1} J \subset \mathfrak{G}'$ la formule de Leibnitz montre que pour $|\varkappa| = t$, $\beta \in \mathscr{B}$ et $P \in J$ on a :

$$0 \equiv \partial^{\varkappa}_{0,\,\beta}(PQ) \equiv (\partial^{\varkappa}_{0,\,\beta} P)(\partial^0_{0,\,\beta} Q) \bmod \mathfrak{G}',$$

d'où il suit que $\partial^{\varkappa}_{0,\,\beta} P \in \mathfrak{G}'$ car $\partial^0_{0,\,\beta} Q \notin \mathfrak{G}'$. Et donc $\partial^t J \subset \mathfrak{G}'$.

La longueur de l'idéal primaire J est égale au rang du $R/\mathfrak{G}'$-module $\oplus_{i \geq 1} (J, (\mathfrak{G}')^i)/(J, (\mathfrak{G}')^{i+1})$.

Or, reprenant les polynômes $Q_1, \ldots, Q_s$ associés à un $\beta \in \mathscr{B}$ tel que $(g+G') \cap \mathscr{V}_\beta \neq \varnothing$ par le lemme 4.6, nous allons montrer pour $i = 1, \ldots, T$ que la famille de polynômes de $(\mathfrak{G}')^i$

$$F_i = \{ Q_1^{t_1} \ldots Q_s^{t_s};\ t_1 + \ldots + t_s = i \}$$

est libre modulo $(J, (\mathfrak{G}')^{i+1})$, ceci montre bien que la longueur de J est $\geq \sum_{i=1}^T \binom{i+s-1}{s-1}$ et établit la proposition 4.7. Supposons qu'il existe des éléments $\lambda_{\mathbf{t}} \in R$ tels que :

$$P = \sum_{t_1 + \ldots + t_s = i} \lambda_{\mathbf{t}} Q_1^{t_1} \ldots Q_s^{t_s} \in (J, (\mathfrak{G}')^{i+1}),$$

appliquant l'opérateur $\Delta = (\partial^{\varkappa_s}_{0,\,\beta})^{t_s} \circ \ldots \circ (\partial^{\varkappa_s}_{0,\,\beta})^{t_s}$ à P, on obtient grâce au lemme 4.6 :

$$\Delta P \equiv t_1 ! \ldots t_s ! \lambda_{\mathbf{t}} \bmod \mathfrak{G}'.$$

Mais $P \in (J, (\mathfrak{G}')^{i+1})$ et donc d'après la définition 4.2, et la proposition 4.3 on a $\Delta P \in (\partial^i J, \partial^i (\mathfrak{G}')^{i+1}) \subset \mathfrak{G}'$, ainsi $\lambda_{\mathbf{t}} \in \mathfrak{G}'$ pour tout $|\mathbf{t}| \leq T$. Ceci prouve que la famille F_i est bien libre modulo $(J, (\mathfrak{G}')^{i+1})$ et achève de démontrer la proposition 4.7.

Le lemme démontré initialement par Wüstholz traite plus généralement le cas des sous-variétés algébriques V de G. C'est parce que nous utiliserons au paragraphe suivant uniquement la version restreinte ci-dessus du lemme de Wüstholz que nous améliorons le lemme de zéro de [17] (cf. corollaire 2.3).

5. Démonstration du théorème 2.1

On reprend toutes les notations et définitions introduites dans les paragraphes précédents. Sous les hypothèses du théorème 2.1 on définit une suite :

$$\mathfrak{G} = I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots$$

d'idéaux multihomogènes de R telle que I_r soit engendré par $\mathfrak{G}$ et des polynômes multihomogènes de multidegrés $\leqslant (c_1 D_1, \ldots, c_p D_p)$ s'annulant à un ordre $\geqslant (n+1-r)T+1$ le long de A en chaque point de $\Sigma(n+1-r)$. De fait on pose $I_1 = (\mathfrak{G}, P)$ et plus généralement :

$$I_r = (\mathfrak{G};\ \partial^{\varkappa}_{g,\,\beta} P;\ 0 \leqslant |\varkappa| \leqslant (r-1)\,T,\ g \in \Sigma(r-1) \text{ et } \beta \in \mathscr{B}).$$

On pose $\mathscr{X}_r = G \cap \mathscr{Z}(I_r)$ et $Z = \mathscr{Z}(P)$ dans $\mathbb{P}$. On notera encore d_r la dimension de $\mathscr{X}_r$ (c'est-à-dire le maximum des dimensions des composantes irréductibles de $\mathscr{X}_r$). Comme I_{n+1} s'annule sur $\Sigma(0) = \{0\}$ on a :

$$n = d_0 \geqslant d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_{n+1} \geqslant 0,$$

et il existe $r \leqslant n$ tel que $d_r = d_{r+1}$ ce qui entraîne que les idéaux I_r et I_{r+1} définissent incomplètement tous les deux une même sous-variété irréductible V de G de dimension d_r (*cf.* définition 3.5). Mais d'après la proposition 4.3 les idéaux I_{r+1} et $(\partial^T_g I_r;\ g \in \Sigma)$ ont les mêmes composantes primaires dont les variétés des zéros dans $\mathbb{P}$ rencontrent G. Et donc, ce dernier idéal également définit incomplètement V dans G. Soit $\mathfrak{P}$ l'idéal premier de définition de V dans R, nous noterons encore G_V le stabilisateur de $\mathfrak{P}$ dans G (i.e. $G_V = \mathrm{stab}_G \mathfrak{P} = :\{g \in G;\ \tau_g \mathfrak{P} = \mathfrak{P}\}$) et G_V^0 la composante connexe contenant l'origine de G_V. Nous démontrons alors le lemme suivant.

LEMME 5.1. — *Avec les notations ci-dessus et pour tout* $g \in \Sigma$ *on a* $\mathfrak{P} \supset \partial^T_g I_r$ *et en posant* $s = \mathrm{codim}_A (A \cap G_V^0)$ *on a :*

$$\binom{T+s}{s} . \mathrm{card}((\Sigma + G_V^0)/G_V^0) . H(G_V^0;\ D_1, \ldots, D_p) \leqslant H(G;\ c_1 D_1, \ldots, c_p D_p).$$

De plus G_V *est incomplètement défini par l'idéal* $J = (\tau_v I_r;\ v \in V)$.

Avant de démontrer ce lemme, voyons comment on conclut la preuve du théorème 2.1. On pose simplement $G'=G_V^0$, l'inégalité de la conclusion du lemme 5.1 devient alors celle de la conclusion du théorème 2.1, de plus $\mathscr{X}_r \subset \mathscr{X}_1 \subset Z$ donc G_V qui est contenu dans $G \cap \mathscr{Z}(J) \subset \bigcap_{v \in V} (\mathscr{X}_r - v)$ est bien contenu dans un translaté de $G \cap Z$. On remarque enfin que d'après la proposition 4.3 les idéaux J et

$$J'=(\mathfrak{G},\ \partial^{\varkappa}_{g+v,\ \beta} P;\ |\varkappa| \leqslant (r-1)\,T,\ g \in \Sigma(r-1),\ v \in V \text{ et } \beta \in \mathscr{B})$$

ont les mêmes composantes primaires dont les variétés des zéros rencontrent G et donc ce dernier idéal définit incomplétement lui aussi le sous-groupe algébrique $G'=G_V^0$. Il nous reste à constater que les polynômes $\partial^{\varkappa}_{g+v,\ \beta} P$ sont bien de multidegrés $\leqslant (c_1 D_1, \ldots, c_p D_p)$ et le théorème 2.1 est alors établi modulo la démonstration du lemme 5.1 que voici :

Démonstration du lemme 5.1. — Pour tout $t \geqslant 0$ posons $H_V(t)=G \cap \mathscr{Z}(\partial^t J))$, alors on a :

$$H_V(t)=\{g \in G;\ g+V \subset \mathscr{Z}(\partial^t I_r)\}.$$

En effet, comme $\tau_v I_r \subset J$ pour tout $v \in V$, si $g \in H_V(t)$ les éléments de I_r s'annulent le long de A en $g+v$ à un ordre $>t$ d'après la proposition 4.4, d'où $g+V \subset \mathscr{Z}(\partial^t I_r)$. Réciproquement si pour tout $v \in V$ on a $g+v \in \mathscr{Z}(\partial^t I_r)$ on vérifie à nouveau d'après la proposition 4.4 que les éléments de l'idéal $\partial^t_v I_r$ s'annulent en g, donc :

$$g \in \bigcap_{v \in V} \mathscr{Z}(\partial^t_v I_r)=\mathscr{Z}(\partial^t J).$$

De plus on vérifie aisément que

$$\bigcap_{v \in V} (\mathscr{X}_r - v)=H_V(0) \supset H_V(1) \supset \ldots \supset H_V(t) \supset \ldots$$

Mais G_V agit par translation sur $H_V(T)$ et l'espace quotient $H_V(T)/G_V$ est fini, en bijection avec l'ensemble des composantes irréductibles (isolées) de $\mathscr{Z}(\partial^T I_r)$ de la forme $g+V$ pour un certain $g \in G$ (car dim $V=$dim $\mathscr{X}_r$). On a donc :

$$H_V(T)=\bigcup_{\sigma \in S} (\sigma+G_V)$$

où S est un ensemble de représentants des classes de $H_V(T)/G_V$. D'après l'hypothèse du lemme 5.1, on sait que $\Sigma \subset H_V(T)$ et donc

$$(***) \qquad \operatorname{card} S \geqslant \operatorname{card}((\Sigma+G_V)/G_V)$$

et comme $0 \in \Sigma$ on a aussi $G_V \subset H_V(T) \subset H_V(0)$.

On sait que $G_V = \bigcup_{\sigma \in S_0} (\sigma + G_V^0)$ où S_0 est un ensemble fini de représentants des classes du groupe quotient G_V/G_V^0. Fixons $\sigma_0 \in S + S_0$ et $\sigma_0 + G_V^0$ une composante irréductible de $H_V(T)$, comme on a $H_V(0) = \bigcup_{\sigma \in S'} (\sigma + G_V)$ avec $S' \supset S$ [car $H_V(0) \supset H_V(T)$] il vient que $\sigma_0 + G_V^0$ est aussi une composante irréductible de $H_V(0)$ et donc que les idéaux J et $\partial^T J$ définissent incomplètement $\sigma_0 + G_V^0$. On déduit de la proposition 4.7 que l'idéal J définit incomplètement $\sigma_0 + G_V^0$ avec multiplicité $\geqslant \binom{T+s}{s}$, et ceci pour tout $\sigma_0 \in S + S_0$.

Comme d'après la définition 4.2 et la proposition 4.3 les idéaux J et J' (introduits plus haut) ont les mêmes composantes primaires dont les variétés des zéros rencontrent G, l'idéal J' définit incomplètement $\bigcup_{\sigma \in S} (\sigma + G_V)$ avec multiplicité $\geqslant \binom{T+s}{s}$.

Soit I_0 l'idéal de définition de G dans R, Comme G est lisse en tous ses points (c'est un groupe algébrique), I_0 est parfait en tout point de G. Notons $\mathscr{U}$ l'ensemble des idéaux maximaux de R définissant un point de G, comme $(\sigma + G_V^0) \cap G \neq \varnothing$ pour tout $\sigma \in S + S_0$ on a

$$\binom{T+s}{s} . \textstyle\sum_{\sigma \in S+S_0} H(\sigma + G_V^0;\, c_1 D_1, \ldots, c_p D_p) \leqslant S_{\mathscr{U}} H(J';\, c_1 D_1, \ldots, c_p D_p).$$

Comme l'idéal J' est engendré par I_0 et des polynômes de multidegrés $\leqslant (c_1 D_1, \ldots, c_p D_p)$ et I_0 étant parfait en tout point de $\mathscr{U}$ il suit de la proposition 3.3

$$\begin{aligned} S_{\mathscr{U}} H(J';\, c_1 D_1, \ldots, c_p D_p) &\leqslant S_{\mathscr{U}} H(I_0;\, c_1 D_1, \ldots, c_p D_p) \\ &= H(G;\, c_1 D_1, \ldots, c_p D_p). \end{aligned}$$

Utilisant le lemme 4.5 et la minoration (***) on obtient :

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{\sigma \in S+S_0} H(\sigma + G_V^0;\, c_1 D_1, \ldots, c_p D_p) \\ &\qquad \geqslant \operatorname{card}((\Sigma + G_V)/G_V) . \operatorname{card}(G_V/G_V^0) . H(G_V^0;\, D_1, \ldots, D_p). \end{aligned}$$

On remarque que $\operatorname{card}((\Sigma + G_V)/G_V) . \operatorname{card}(G_V/G_V^0) \geqslant \operatorname{card}((\Sigma + G_V^0)/G_V^0)$ et les inégalités ci-dessus entrainent :

$$\binom{T+s}{s} . \operatorname{card}((\Sigma + G_V^0)/G_V^0) . H(G_V^0;\, D_1, \ldots, D_p) \leqslant H(G;\, c_1 D_1, \ldots, c_p D_p),$$

ce qui achève d'établir l'inégalité annoncée dans le lemme. Enfin G_V est une composante de $H_V(0) = G \cap \mathscr{Z}(J)$ donc J définit incomplètement G_V dans G. On a ainsi démontré le lemme 5.1 et le théorème 2.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRAND (D.). — Lettre à J.-P. Serre, 26 janvier 1985.

[2] BROWNAWELL (W. D.). — Zero estimates for solutions of differential equations, dans « *Approximations diophantiennes et nombres transcendants* », Luminy 1982, *Birkhaüser Progress in Math.* 31, 1983, p. 67-94.

[3] BROWNAWELL (W. D.) and MASSER (D. W.). — Multiplicity estimates for analytic functions II, *Duke Math. Journal*, 47, 1980, p. 273-295.

[4] JABBOURI (E. M.). — Mesures d'indépendance algèbrique de valeurs de fonctions elliptiques et abéliennes, dans « *Problèmes diophantiens* 1985-1986 », Pub. Univ. Paris-VI, 1986, n° 6.

[5] LANGE (H.). — Families of translations of commutative algebraic groups, à paraître.

[6] LASKER (E.). — Zür Theorie der Moduln und Ideale, *Math. Ann.*, 60, 1905, p. 20-116.

[7] MASSER (D. W.). — On polynomials and exponential polynomials, *Inv. Math.*, 63, 1981, p. 81-95.

[8] MOREAU (J. C.). — Démonstration géométrique des lemmes de zéros II, dans « *Approximations diophantiennes et nombres transcendants* », Luminy 1982, *Birkhaüser Progress in Math.*, 31, 1983, p. 191-197.

[9] MASSER (D. W.) and WÜSTHOLZ (G.). — Zero estimates on group varieties I, *Inv. Math.*, 64, 1981, p. 489-516.

[10] MASSER (D. W.) and WÜSTHOLZ (G.). — Zero estimates on group varieties II, *Inv. Math.*, 80, 1985, p. 233-267.

[11] MASSER (D. W.) and WÜSTHOLZ (G.). — Fields of large transcendence degree, *Inv. Math.*, 72, 1983, p. 407-464.

[12] NESTERENKO (Y. V.). — Estimates for the orders of zeros of fonctions of a certain class and their applications in the theory of transcendental numbers, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Math.*, 41, 1977; *Math USSR Izv.*, 11, 1977, p. 239-270.

[13] NORTHCOTT (D. G.). — *Lessons on rings, modules and multiplicities*, Cambridge Univ. Press, 1968.

[14] PHILIPPON (P.). — Pour une théorie de l'indépendance algébrique, *Thèse d'État de l'Université de Paris-XI*, Juin 1983.

[15] TUBBS (R.). — Algebraic groups and small transcendence degree I, à paraître.

[16] VAN DER WAERDEN (B. L.). — On Hilbert's function, series of composition of ideals and a generalization of the theorem of Bezout, *Proc. Royal Acad. Amsterdam* 31, 1928, p. 749-770.

[17] WÜSTHOLZ (G.). — Recent progress in transcendence theory, dans « *Number theory, Noordwijkerhout* 1983, » H. JAGER (H.) éd., Springer Lecture Notes in Math., 1068, 1984, p. 280-296.