BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES CHAUMAT
ANNE-MARIE CHOLLET

# Propriétés de division par des fonctions de $A^\infty(D)$

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 114 (1986), p. 153-174
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__153_0>

*Bull. Soc. math. France,*
114, 1986, p. 153-174.

# PROPRIÉTÉS DE DIVISION PAR DES FONCTIONS DE $A^\infty(D)$

PAR

JACQUES CHAUMAT et ANNE-MARIE CHOLLET (*)

RÉSUMÉ. — Soit $D$ un domaine strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$ à frontière $\partial D$ de classe $C^\infty$. On note $C^\infty(\bar{D})$ l'algèbre des fonctions continues ainsi que toutes leurs dérivées dans $\bar{D}$ et $A^\infty(D)$ la classe des fonctions holomorphes dans $D$ appartenant à $C^\infty(\bar{D})$.

Soit $E$ un sous-ensemble fermé de $\partial D$. On désigne par $C_E^\infty$ [resp. $A_E^\infty$] l'idéal de $C^\infty(\bar{D})$ [resp. $A^\infty(D)$] formé des fonctions plates sur $E$. On dit que $E$ a la propriété de division par des fonctions de $A^\infty(D)$ si, pour toute famille de fonctions $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $C_E^\infty$, il existe une fonction $F$ de $A_E^\infty$ nulle seulement sur $E$ et une famille de fonctions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $C_E^\infty$ vérifiant $f_i = Fk_i$, pour tout entier $i$.

On montre qu'un sous-ensemble fermé $E$ de $\partial D$ vérifiant la propriété de division par des fonctions de $A^\infty(D)$ est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$, c'est-à-dire que, pour toute fonction $f$ de $C^\infty(\bar{D})$ telle que $\bar{\partial} f$ soit plate sur $E$, il existe une fonction $F$ de $A^\infty(D)$ telle que $f-F$ soit dans $C_E^\infty$.

On donne des conditions suffisantes sur $E$ pour qu'il vérifie la propriété de division par des fonctions de $A^\infty(D)$. Elles s'expriment en termes de $N_\varepsilon(E)$ le nombre minimum de boules relatives à la pseudo-distance usuelle sur $\partial D$, de rayon $\varepsilon$, dont la réunion recouvre $E$.

ABSTRACT. — Let $D$ be a strictly pseudoconvex domain in $\mathbb{C}^n$ with $C^\infty$-boundary $\partial D$. $C^\infty(\bar{D})$ will denote the algebra of functions continuous with all their derivatives in $\bar{D}$ and $A^\infty(D)$ is the class of the holomorphic functions in $D$ belonging to $C^\infty(\bar{D})$.

Let $E$ be a closed subset of $\partial D$. $C_E^\infty$ [resp. $A_E^\infty$] will denote the ideal of $C^\infty(\bar{D})$ [resp. $A^\infty(D)$] consisting of all the functions flat on $E$. The set $E$ is said to have the division property by functions in $A^\infty(D)$ if, for every family of functions $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $C_E^\infty$, there exist a function $F$ in $A_E^\infty$ vanishing only on $E$ and a family of functions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $C_E^\infty$ such that $f_i = Fk_i$, for every integer $i$.

We prove that every closed subset which has the division property by functions in $A^\infty(D)$ is an interpolation set of infinite order for $A^\infty(D)$, i.e., for every function $f$ in $C^\infty(\bar{D})$ such that $\bar{\partial} f$ is flat on $E$, there exists a function $F$ in $A^\infty(D)$ such that $f-F$ belongs to $C_E^\infty$.

Sufficient conditions are given for $E$ to have the division property by functions in $A^\infty(D)$. They are expressed in terms of $N_\varepsilon(E)$ the minimal number of balls, with respect to the usual pseudodistance on $\partial D$, of radius $\varepsilon$, whose union covers $E$.

(*) Texte reçu le 20 décembre 1985.

J. CHAUMAT et A. M. CHOLLET, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1986/02 153 22/$4.20

Soit $D$ un domaine strictement pseudo-convexe dans $\mathbb{C}^n$ à frontière régulière $\partial D$. On note $C^\infty(\bar{D})$ l'algèbre des fonctions de classe $C^\infty$ sur $\bar{D}$, l'adhérence de $D$ et $A^\infty(D)$ la sous-algèbre de $C^\infty(\bar{D})$ formée des fonctions holomorphes dans $D$.

Soit $E$ un sous-ensemble fermé de $\partial D$; on désigne par $C_E^\infty$ [resp. $A_E^\infty$ l'idéal de $C^\infty(\bar{D})$ [resp. $A^\infty(D)$] formé des fonctions plates sur $E$.

Dans leurs études des idéaux de $A^\infty(D)$ de type fini [2] J. Bruna et J. M. Ortega prouvent la propriété suivante. Soit $E$ une sous-variété compacte de $\partial D$ dont l'espace tangent en chaque point est dans l'espace tangent complexe à $\partial D$; alors, pour toute famille $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $A_E^\infty$, il existe une fonction $F$ de $A_E^\infty$ et une famille de fonctions $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $A_E^\infty$ vérifiant $f_i = Fk_i$, pour tout entier $i$.

Dans le cas $n=1$, lorsque $D$ est le disque unité du plan complexe, les sous-ensembles $E$ de $\partial D$ tels que $A_E^\infty$ ne soit pas trivial et qui vérifient cette propriété de division sont caractérisés par la condition de Carleson $\int_0^1 N_\varepsilon(E)\, d\varepsilon < \infty$ où $N_\varepsilon(E)$ est le nombre minimal d'intervalles de rayon $\varepsilon$ dont la réunion recouvre $E$ ([3], [4], [6]).

On introduit et on étudie dans ce travail une propriété de division plus forte. On dit que $E$ vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$ si, pour toute famille de fonctions $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $C_E^\infty$, il existe une fonction $F$ de $A_E^\infty$ nulle seulement sur $E$ et une famille de fonctions $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $C_E^\infty$ vérifiant $f_i = Fk_i$, pour tout entier $i$.

On montre qu'un sous-ensemble fermé $E$ de $\partial D$ vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$ est d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$, c'est-à-dire que, pour toute fonction $f$ de $C^\infty(\bar{D})$ telle que $\bar{\partial} f$ soit plate sur $E$, il existe une fonction $F$ de $A^\infty(D)$ telle que $f-F$ soit dans $C_E^\infty$.

On donne des conditions suffisantes sur $E$ pour qu'il vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$. Elles s'expriment comme dans [5] à l'aide de $N_\varepsilon(E)$ le nombre minimal de boules de rayon $\varepsilon$ dont la réunion recouvre $E$. Mais les boules sont relatives à la pseudo-distance usuelle sur $\partial D$.

Dans le cas $n=1$, en utilisant la caractérisation des ensembles d'interpolation d'ordre infini [1], on montre que $E$ a la propriété de division par $A^\infty(D)$ si et seulement s'il est d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$. On ignore si cette équivalence subsiste dans le cas $n>1$ pour les sous-ensembles portés par des sous-variétés de $\partial D$ totalement réelles.

La proposition 2 et le théorème 12 sous la condition (10.1) ont été obtenus indépendamment par J. BRUNA et J. M. ORTEGA [3]. Les auteurs ont construit [7] d'autres exemples d'ensembles vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$; ce sont, en particulier, les sous-ensembles $E$ de $\partial D$ localement inclus dans une sous-variété de $\partial D$ dont l'espace tangent est dans l'espace tangent complexe à $\partial D$. Il s'agit là d'une amélioration du résultat de J. BRUNAT et J. M. ORTEGA précédemment cité [2].

On peut relier la propriété de division à des propriétés formelles algébriques notamment à la propriété de platitude de l'idéal $A_E^\infty$ comme l'ont montré J. BRUNA et J. M. ORTEGA [2]. Les auteurs remercient le Referee pour ce développement (paragraphes 16 à 19). On y trouve une autre présentation de la proposition 2 obtenue comme conséquence de la résolution de l'équation $\bar\partial u=f$ avec $\bar\partial f=0$ dans les formes différentielles à coefficients dans $C_E^\infty$.

Dans tout ce qui suit $D$ désigne un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière $\partial D$ de classe $C^\infty$. Le domaine $D$ est donc défini par la donnée d'une fonction $r$ de classe $C^\infty$ dans un voisinage de $\bar D$, l'adhérence de $D$, telle que

(i) $D=\{z\in\mathbb{C}^n;\ r(z)<0\}$,

(ii) $\operatorname{grad} r\neq 0$ sur $\partial D$.

Le domaine $D$ sera dit strictement pseudo-convexe si, de plus, $r$ est strictement plurisousharmonique dans un voisinage de $\partial D$, c'est-à-dire, si l'on a

(iii) $\sum_{j,k=1}^n \dfrac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar z_k}(z)\, w_j \bar w_k>0$,

pour tout $w\neq 0$ de $\mathbb{C}^n$ et tout $z$ de $\partial D$.

On dit alors que $r$ est une fonction définissant $D$.

On note $A^\infty(D)$ la classe des fonctions holomorphes dans $D$ dont toutes les dérivées sont continues dans $\bar D$.

1. DÉFINITIONS. — Un sous-ensemble fermé $E$ de $\partial D$ est un ensemble de zéros pour $A^\infty(D)$ s'il existe une fonction $f$ de $A^\infty(D)$ telle que l'on ait $E=\{z\in\bar D;\ f(z)=0\}$.

On dit qu'une fonction de classe $C^\infty$ sur $\bar D$ est plate sur $E$ si elle s'annule ainsi que toutes ses dérivées sur $E$. De même on dit qu'une forme différentielle de classe $C^\infty$ sur $\bar{D}$ est plate sur $E$ si ses coefficients sont plats sur $E$.

Un sous-ensemble fermé $E$ de $\partial D$ est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$, si, pour toute fonction $g$ de classe $C^\infty$ dans $\mathbb{C}^n$ telle que $\bar{\partial} g$ soit plate sur $E$, il existe une fonction $f$ de $A^\infty(D)$ telle que $f-g$ soit plate sur $E$.

On désigne par $C_E^\infty$ [resp. $A_E^\infty$] l'idéal dans $C^\infty(\bar{D})$ [resp. $A^\infty(D)$] formé des fonctions plates sur $E$.

Un sous-ensemble fermé $E$ de $\partial D$ vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$ si, pour toute suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $C_E^\infty$, il existe une fonction $F$ de $A_E^\infty$ nulle seulement sur $E$ et une suite de fonctions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $C_E^\infty$ telles que l'on ait $f_i=Fk_i$, pour tout $i$ dans $\mathbb{N}$.

2. Proposition. — *Un sous-ensemble fermé $E$ de $\partial D$ vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$ est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$.*

*Preuve.* — Soit $f$ une fonction de classe $C^\infty$ dans $\mathbb{C}^n$ telle que $\bar{\partial} f$ soit plate sur $E$. On a $\bar{\partial} f=\sum_{i=1}^n f_i\, d\bar{z}_i$ et les fonctions $f_i$ sont de classe $C^\infty$ dans $\mathbb{C}^n$ et plates sur $E$. Alors, par hypothèse, il existe une fonction $F$ de $A_E^\infty$ nulle seulement sur $E$ et des fonctions $k_i$, $i=1, \ldots, n$ de $C_E^\infty$ telles que l'on ait $f_i=Fk_i$, pour $i=1, \ldots, n$.

La forme différentielle $\bar{\partial} f/F=\sum_{i=1}^n k_i\, d\bar{z}_i$ est une (0.1) forme de classe $C^\infty$ dans $\bar{D}$, $\bar{\partial}$-fermée. Il existe donc [12] une fonction $u$ de classe $C^\infty$ dans $\bar{D}$ telle que l'on ait $\bar{\partial} f/F=\bar{\partial} u$ dans $\bar{D}$.

Alors, si on pose $G=f-Fu$, la fonction $G$ est une fonction de $A^\infty(D)$ telle que $G-f$ soit plate sur $E$.

3. Proposition. — *Une réunion finie de sous-ensembles fermés de $\partial D$ vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$ vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$.*

*Preuve.* — Soient $E_1$ et $E_2$ deux sous-ensembles fermés de $\partial D$ vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$ et $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classes $C^\infty$ sur $\bar{D}$, plates sur $E_1\cup E_2$. Il existe une fonction $F_1$ de $A^\infty(D)$, plate sur $E_1$, nulle seulement sur $E_1$ et une suite de fonctions $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de classe $C^\infty$ sur $\bar{D}$, plates sur $E_1$ telles que l'on ait, pour tout $i$ dans $\mathbb{N}$, $f_i=F_1 h_i$.

Puisque $F_1$ ne s'annule que sur $E_1$, les fonctions $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont plates sur $E_1\cup E_2$. Il existe donc une fonction $F_2$ de $A^\infty(D)$ plate sur $E_2$, nulle seulement sur $E_2$ et une suite de fonctions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de classe $C^\infty$ dans $\bar{D}$, plates sur $E_2$ telles que l'on ait, pour tout $i$ dans $\mathbb{N}$, $h_i=F_2\,k_i$. Ici encore, les fonctions $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont plates sur $E_1\cup E_2$ et l'on a, pour tout $i$ dans $\mathbb{N}$, $f_i=F_1\,F_2\,k_i$, ce qui achève la preuve de la proposition.

4. Soit $r$ une fonction définissant $D$. Si $\beta$ est un réel, on note

$$D_\beta=\{z; r(z)<\beta\} \qquad \text{avec} \quad D_0=D.$$

Il existe $\beta_0>0$ tel que,

pour tout $\beta$, $|\beta|<\beta_0$, $D_\beta$ soit un domaine borné, à frontière de classe $C^\infty$, défini par $r-\beta$,

$V=\bigcup_{|\beta|<\beta_0}\partial D_\beta$ soit un ouvert contenant $\partial D$

et, enfin, pour tout $z$ de $V$, il existe un unique $\beta(z)$, $|\beta(z)|<\beta_0$ pour lequel $z$ appartienne à $\partial D_{\beta(z)}$.

Soit $z$ un point de $\mathbb{C}^n$, on désigne par $J$ la structure presque complexe de $T_z(\mathbb{C}^n)$ l'espace tangent en $z$ à $\mathbb{C}^n$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $M$ une sous-variété de $\mathbb{C}^n$ et $T_z(M)$ son espace tangent en $z$; $M$ est dite totalement réelle si, en tout point $z$ de $M$, on a $T_z(M)\cap JT_z(M)=\{0\}$.

Pour tout $z$ de $V$, on note $T_z^{\mathbb{C}}(\partial D_{\beta(z)})$ l'espace tangent complexe en $z$ à $\partial D_{\beta(z)}$; c'est, par définition, le sous espace complexe maximal de $T_z(\partial D_{\beta(z)})$ l'espace tangent en $z$ à $\partial D_{\beta(z)}$.

Pour tout $z$ de $V$, on note $\nu(z)$ le vecteur unitaire de la normale en $z$ à $\partial D_{\beta(z)}$ orienté vers l'extérieur; on a alors la décomposition orthogonale complexe

$$T_z(\mathbb{C}^n)=\mathbb{C}[\nu(z)]\oplus T_z^{\mathbb{C}}(\partial D_{\beta(z)})$$

et la décomposition orthogonale réelle

$$T_z(\partial D_{\beta(z)})=\mathbb{R}[i\,\nu(z)]\oplus T_z^{\mathbb{C}}(\partial D_{\beta(z)}).$$

Pour tout $z$ de $V$, on note $\Pi_z$ la projection orthogonale complexe sur $\mathbb{C}[\nu(z)]$.

Pour tout couple $(z, w)$ de $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$, on note $|z-w|$ la distance euclidienne de $z$ à $w$.

Soit $\chi$ une fonction de classe $C^\infty$ sur $]-\infty, 0]$, positive, vérifiant $\chi(t)=1$ pour $-\beta_0/2\leqslant t\leqslant 0$ et $\chi(t)=0$ pour $t\leqslant-\beta_0$.

Pour tout couple $(z, w)$ de $\bar{D}\times\bar{D}$, on pose

$$(4.1)\quad \rho(z, w)=\chi(\beta(z))\,|\Pi_z(z-w)| \\ +\chi(\beta(w))\,|\Pi_w(z-w)|+|z-w|^2-r(z)-r(w).$$

$\rho$ est une fonction à valeurs positives vérifiant les propriétés suivantes:

(*a*) $\rho\ (z,\ w)=0$ si et seulement si $z$ et $w$ appartiennent à $\partial D$ et $z=w$;

(*b*) il existe une constante $K>0$ telle que l'on ait

$$(4.2)\qquad \rho(z, w)\leqslant K[\rho(z, t)+\rho(t, w)],\quad \text{pour } z, w \text{ et } t \text{ dans } \bar{D}.$$

On dit alors que $\rho$ définit une pseudo-distance sur $\partial D$.

Il existe une constante $C>0$ telle que l'on ait

$$(4.3)\quad |z-w|^2\leqslant\rho(z, w)\leqslant C\,|z-w|\quad \text{pour tout } (z, w) \text{ de } \partial D\times\bar{D}.$$

Si $E$ est un sous-ensemble de $\partial D$, on note, pour tout $z$ de $\bar{D}$,

$$\rho(z, E)=\inf_{w\in E}\rho(z, w).$$

Dans la suite, on ne considérera de boules que pour la pseudo-distance $\rho$; pour tout $z$ de $\partial D$ et tout $r>0$, on notera

$$B_r(z)=B(z, r)=\{\,w\in\partial D;\ \rho(z, w)<r\,\},$$

la boule de centre $z$ et de rayon $r$.

5. Notations. — Pour simplifier la rédaction, on écrira « pour tout $z$ dans $E$, $a(z)\approx b(z)$ » ou encore « pour tout $z$ dans $E$, $a(z)$ est équivalent à $b(z)$ » pour exprimer qu'il existe des constantes $c$ et $C$, strictement positives, telles que, pour tout $z$ dans $E$, $ca(z)\leqslant b(z)\leqslant C\,a(z)$. De même, la proposition « pour tout $z$ dans $E$, $a(z)\ll b(z)$ » signifiera qu'il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout $z$ dans $E$, $a(z)\leqslant C\,b(z)$. Plus généralement, on pourra écrire $a(z)\ll b(z)+O(1)$ lorsqu'il existera des constantes $C$ et $C'$, strictement positives, telles que, pour tout $z$ dans $E$, on ait $a(z)\leqslant C\,b(z)+C'$.

6. Soit $D$ un domaine borné strictement pseudo-convexe dans $\mathbb{C}^n$, à frontière de classe $C^\infty$. On sait ([8], [9]) qu'il existe une fonction $H$, une fonction $r$ définissant $D$, un voisinage $V$ de $\partial D$ et des constantes $A$, $a$, $M$, $m$, $\beta$, strictement positives, vérifiant les propriétés suivantes:

(*a*) $H$ appartient à $C^\infty(V, \mathscr{H}(D_\beta))$, (c'est-à-dire, $H$ est de classe $C^\infty$ dans $V\times D_\beta$ et, pour chaque $\zeta$ de $V$, la fonction $z\rightarrow H(\zeta, z)$ est holomorphe dans $D_\beta$);

($b$) Re $H(\zeta, z)$ est strictement positive pour tout $(\zeta, z)$ de $\partial D \times \bar{D}$, $\zeta \neq z$;

($c$) pour tout $(\zeta, z)$ de $\partial D \times \bar{D}$, on a

$$-r(z)+m|\zeta-z|^2 \leqslant \operatorname{Re} H(\zeta, z) \leqslant M|\zeta-z|^2-r(z), \tag{6.1}$$

($d$) pour tout $(\zeta, z)$ de $\partial D \times \bar{D}$, on a

$$a|H(\zeta, z)| \leqslant \rho(\zeta, z) \leqslant A|H(\zeta, z)|. \tag{6.2}$$

7. Pour tout sous-ensemble $E$ fermé de $\partial D$ et pour tout $\varepsilon>0$, on désigne par $\tilde{N}_\varepsilon(E)$ le nombre minimal de boules de rayon $\varepsilon$ dont la réunion recouvre $E$. On sait [Proposition 2 de l'appendice [5]] que l'on peut recouvrir $E$ par des boules de rayon $\varepsilon$ dont les centres sont situés sur $E$, à des distances mutuelles supérieures ou égales à $\varepsilon$, et dont le nombre, noté $N_\varepsilon(E)$, est équivalent à $\tilde{N}_\varepsilon(E)$. On dira que ces boules forment un $\varepsilon$-recouvrement de $E$. On ne considérera dans la suite que de tels recouvrements.

8. Lemme. — *Soit* $\gamma:[-1,1] \to \partial D$ *une courbe de classe* $C^\infty$ *de* $\partial D$ *dont la tangente en chaque point n'est pas dans l'espace tangent complexe à* $\partial D$.

*Soit* $E$ *un sous-ensemble compact de* $\gamma(]-1,1[)=\Gamma$. *Il existe un voisinage ouvert* $O$ *de* $E$ *dans* $\mathbb{C}^n$, *une constante* $C>0$ *et une application* $\pi$ *de* $O$ *sur* $\Gamma \cap O$ *de classe* $C^\infty$ *tels que*

($a$) *si* $z$ *appartient à* $\Gamma \cap O$, *on ait* $\pi(z)=z$;

($b$) *pour tout* $z$ *dans* $O \cap \bar{D}$ *et tout* $t$ *dans* $[-1,1]$, *on ait*

$$|\gamma(t)-\pi(z)| \approx \rho(\gamma(t), \pi(z)), \tag{8.1}$$

$$|H(\gamma(t), z)| \geqslant C[\rho(\gamma(t), \pi(z))+\rho(\pi(z), z)]. \tag{8.2}$$

La preuve de ce lemme est donnée dans [5].

La proposition suivante est un raffinement de la proposition 18 de [5]. On améliore l'estimation 18($b$).

9. Proposition. — *Soit* $E$ *un sous-ensemble fermé de* $\partial D$ *vérifiant la condition*

(9.1) *il existe* $\gamma:[-1,1] \to \partial D$ *une courbe de* $\partial D$ *dont la tangente en chaque point n'est pas dans l'espace tangent complexe à* $\partial D$ *telle que l'on ait*

$$E \subset \gamma(]-1,1[)=\Gamma,$$

*et*

$$\int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\, d\varepsilon \ll r(\log 1/r + O(1))$$

*pour tout r,* $0 < r \leqslant 1$ *et toute boule* $B_r$ *de rayon r centrée sur* $\partial D$. *Alors il existe une fonction* $\psi$ *holomorphe au voisinage de tout point de* $\bar{D} \setminus E$, *de partie réelle strictement positive dans* $\bar{D} \setminus E$ *qui vérifie les estimations suivantes*

(*a*) $\operatorname{Re} \psi(z) \gg \log 1/\rho(z, E) + O(1)$, *pour tout z de* $\bar{D} \setminus E$;

(*b*) $\operatorname{Re} \psi(z) \ll \log 1/\rho(z, E) + O(1)$, *pour tout z de* $\bar{D} \setminus E$;

(*c*) $|D^\alpha \psi(z)| \leqslant C(|\alpha|)\, \rho(z, E)^{-|\alpha|-1}$, *pour tout multi-indice* $\alpha$ *de longueur* $|\alpha|$ *et tout z* de $\bar{D} \setminus E$.

*Preuve.* — La condition (9.1) implique la condition de Carleson, à savoir

$$\int_0^1 N_\varepsilon(E)\, d\varepsilon < \infty,$$

qui s'écrit encore

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} N_{2^{-k}}(E) < \infty. \tag{9.2}$$

Soit $\psi$ la fonction définie sur $D$ par

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}}{2^{-k} + H(\zeta_{j,k}, z)}, \tag{9.3}$$

où, pour chaque entier $k$, $(\zeta_{j,k})$, $j = 1, \ldots, N_k = N_{2^{-k}}(E)$ désigne la suite des centres des boules $B_{j,k}$, $j = 1, \ldots, N_k = N_{2^{-k}}(E)$ d'un $2^{-k}$-recouvrement de $E$. On sait que, par définition, $\zeta_{j,k}$ appartient à $E$. On vérifie, comme dans la preuve de la proposition 8 [5], que $\psi$ est holomorphe au voisinage de tout point de $\bar{D} \setminus E$, de partie réelle strictement positive dans $\bar{D} \setminus E$ et satisfait les estimations (*a*) et (*c*) de la proposition. On se propose d'obtenir l'estimation (*b*). On a, pour tout $z$ de $\bar{D} \setminus E$,

$$\operatorname{Re} \psi(z) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + \operatorname{Re} H(\zeta_{j,k}, z)}{|2^{-k} + H(\zeta_{j,k}, z)|^2}.$$

De là, si on suppose $z$ dans $O$ et $\rho(z, \pi(z)) < 1/2$, on a, en utilisant les propriétés de $H$ et (8.2),

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + |\zeta_{j,k} - z|^2 - r(z)}{2^{-2k} + \rho(\zeta_{j,k}, \pi(z))^2 + \rho(\pi(z), z)^2}$$

ou encore

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + |\zeta_{j,k} - \pi(z)|^2 + |\pi(z) - z|^2 - r(z)}{2^{-2k} + \rho(\zeta_{j,k}, \pi(z))^2 + \rho(\pi(z), z)^2}.$$

En utilisant (8.1) et l'inégalité $|\pi(z) - z|^2 - r(z) \leqslant \rho(\pi(z), z)$ on a

$$\operatorname{Re}\psi(z) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + \rho(\zeta_{j,k}, \pi(z))^2 + \rho(\pi(z), z)}{2^{-2k} + \rho(\zeta_{j,k}, \pi(z))^2 + \rho(\pi(z), z)^2}$$

et donc, à l'aide de (9.2),

$$(9.4) \quad \operatorname{Re}\psi(z) \ll O(1) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + \rho(\pi(z), z)}{2^{-2k} + \rho(\zeta_{j,k}, \pi(z))^2 + \rho(\pi(z), z)^2}.$$

On distingue deux cas.

*Premier cas*: $\rho(\pi(z), z) > \rho(z, E)^2$.

$$(9.5) \quad \operatorname{Re}\psi(z) \ll O(1) + \sum_{2^{-k} \geqslant \rho(\pi(z), z)} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-2k}}{2^{-2k} + \rho(\pi(z), \zeta_{j,k})^2} + \sum_{2^{-k} < \rho(\pi(z), z)} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} \rho(\pi(z), z)}{\rho(\pi(z), z)^2 + \rho(\pi(z), \zeta_{j,k})^2}.$$

Soit $S_1$ et $S_2$ les deux séries intervenant dans cette inégalité. On se propose de majorer tout d'abord $S_1$. Pour cela, on note, pour $k$ et $l$ entiers positifs,

$$A_{l,k} = \{j;\, 2^l 2^{-k} < \rho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \leqslant 2^{l+1} 2^{-k}\},$$
$$B_{l,k} = \{j;\, \rho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \leqslant 2^l 2^{-k}\},$$

et card $A_{l,k}$ [resp. card $B_{l,k}$] le cardinal de $A_{l,k}$ [resp. $B_{l,k}$]. On a alors, en utilisant (8.1) et en remarquant que les $\zeta_{j,k}$ sont situés le long d'une courbe à une distance mutuelle au moins égale à $2^{-k}$,

$$\operatorname{card} B_{l,k} \ll 2^l \qquad \text{et} \qquad \operatorname{card} A_{l,k} \leqslant \operatorname{card} B_{l+1,k}.$$

De là

$$S_1 \ll \sum_{2^{-k} \geqslant \rho(\pi(z), z)} \left( \sum_{j \in B_{0,k}} 1 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j \in A_{l,k}} \frac{1}{1+2^{2l}} \right)$$

$$\ll \sum_{2^{-k} \geqslant \rho(\pi(z), z)} \left( \operatorname{card} B_{0,k} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\operatorname{card} B_{l+1,k}}{1+2^{2l}} \right)$$

$$\ll \sum_{2^{-k} \geqslant \rho(\pi(z), z)} \left( 1 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{l+1}}{1+2^{2l}} \right),$$

$$S_1 \ll \sum_{2^{-k} \geqslant \rho(\pi(z), z)} 1 \ll \log \frac{1}{\rho(\pi(z), z)} + O(1). \tag{9.6}$$

Pour majorer $S_2$, on note, pour $k$ et $l$ entiers positifs,

$$C_{l,k} = \{ j ;\, 2^l \rho(\pi(z), z) < \rho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \leqslant 2^{l+1} \rho(\pi(z), z) \},$$

$$D_{l,k} = \{ j ;\, \rho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \leqslant 2^l \rho(\pi(z), z) \}.$$

On a

$$\operatorname{card} D_{l,k} \leqslant N_{2^{-k}} (B_{2^l \rho(\pi(z), z)} \cap E) \tag{9.7}$$

et

$$\operatorname{card} C_{l,k} \leqslant \operatorname{card} D_{l+1,k}$$

et donc

$$S_2 \ll \frac{1}{\rho(\pi(z), z)} \left[ \sum_{2^{-k} < \rho(\pi(z), z)} 2^{-k} \operatorname{card} D_{0,k} \right.$$

$$\left. + \sum_{2^{-k} < \rho(\pi(z), z)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1+2^{2l}} \operatorname{card} D_{l+1,k} \right].$$

On majore $S_2$ en remplaçant

$$\sum_{2^{-k} < \rho(\pi(z), z)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1+2^{2l}} \operatorname{card} D_{l+1,k}$$

par

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^{2l}} \sum_{2^{-k} < 2^l \rho(\pi(z), z)} 2^{-k} \operatorname{card} D_{l+1,k}.$$

on utilise ensuite l'hypothèse (9.1) et (9.7) pour remarquer que, pour tout $l$, on a

$$\sum_{2^{-k}<2^l\rho(\pi(z),z)} 2^{-k}\operatorname{card} D_{l,k} \leqslant 2^l\rho(\pi(z),z)\left[\log\frac{1}{2^l\rho(\pi(z),z)}+O(1)\right].$$

On a donc, puisque $\sum_l 2^l/(1+2^{2l})\log 1/2^l<\infty$,

$$S_2 \ll \log\frac{1}{\rho(\pi(z),z)}+O(1). \tag{9.8}$$

On déduit de (9.5), (9.6) et (9.8) que, pour tout $z$ vérifiant $\rho(\pi(z),z)>\rho(z,E)^2$, on a

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\log\frac{1}{\rho(\pi(z),z)}+O(1)\ll\log\frac{1}{\rho(z,E)}+O(1), \tag{9.9}$$

ce qui achève la preuve de l'estimation (*b*), dans le premier cas.

*Deuxième cas*: $\rho(\pi(z),z)\leqslant\rho(z,E)^2$.

On reprend l'inégalité (9.4)

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll O(1)+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}+\rho(\pi(z),z)}{2^{-2k}+\rho(\zeta_{j,k},\pi(z))^2+\rho(\pi(z),z)^2}.$$

On a, pour tout $k$ et pour tout $j$,

$$\rho(\pi(z),z)\leqslant\rho(z,\zeta_{j,k})^2\ll\rho(\pi(z),z)^2+\rho(\zeta_{j,k},\pi(z))^2,$$

de là

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll O(1)+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}}{2^{-2k}+\rho(\zeta_{j,k},\pi(z))^2}.$$

Comme précédemment, on écrit

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll O(1)+\sum_{2^{-k}\geqslant\rho(\pi(z),E)}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-2k}}{2^{-2k}+\rho(\pi(z),\zeta_{j,k})^2}$$
$$+\sum_{2^{-k}<\rho(\pi(z),E)}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-2k}}{2^{-2k}+\rho(\pi(z),\zeta_{j,k})^2}.$$

Soit $S'_1$ et $S'_2$ les deux séries intervenant dans cette inégalité. La première somme se majore comme $S_1$ et on obtient

$$S'_1 \ll \log \frac{1}{\rho(\pi(z), E)} + O(1).$$

On a

$$\rho(z, E) \ll \rho(\pi(z), z) + \rho(\pi(z), E) \leqslant \rho(z, E)^2 + \rho(\pi(z), E),$$

et donc

$$\rho(z, E) \ll \rho(\pi(z), E), \tag{9.10}$$

d'où

$$S'_1 \ll \log \frac{1}{\rho(z, E)} + O(1). \tag{9.11}$$

On majore maintenant $S'_2$; on a

$$S'_2 \ll \sum_{2^{-k} < \rho(\pi(z), E)} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}}{\rho(\pi(z), \zeta_{j,k})^2}.$$

Des propriétés des $2^{-k}$-recouvrements rappelés dans le paragraphe 7, on déduit que pour tout $k$ vérifiant $2^{-k} < \rho(\pi(z), E)$ et pour tout $j = 1, \ldots, N_k$, on a

$$2^{-k} < \rho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \tag{9.12}$$

et, de plus, il existe une constante $c_1$, $0 < c_1 < 1$, telle que pour tout $k$ et pour tout $j = 1, \ldots, N_k$, les boules $B'_{j,k}$ de centre $\zeta_{j,k}$ et de rayon $c_1 2^{-k}$ soient disjointes.

On vérifie aisément que l'on a, pour tout $\zeta$ dans $B'_{j,k}$,

$$\rho(\pi(z), \zeta_{j,k}) \approx \rho(\pi(z), \zeta). \tag{9.13}$$

Soit

$$I_{j,k} = \{ t \in ]-1, 1[; \gamma(t) \in B'_{j,k} \}.$$

Puisque le long de $\Gamma$, d'après (8.1), la pseudo-distance et la distance euclidienne sont équivalentes, la mesure de Lebesgue de $I_{j,k}$ notée $|I_{j,k}|$, vérifie

$$|I_{j,k}|\approx 2^{-k}.$$

De là, on a donc, pour tout $k$ vérifiant $2^{-k}<\rho(\pi(z), E)$ et pour tout $j=1, \ldots, N_k$, d'après (9.13) et (8.1),

$$\frac{2^{-k}}{\rho(\pi(z), \zeta_{j,k})^2}\approx\frac{2^{-k}}{|\pi(z)-\zeta_{j,k}|^2}\approx\int_{I_{j,k}}\frac{dt}{|\pi(z)-\gamma(t)|^2}.$$

Puisque les intervalles $I_{j,k}$ sont disjoints et qu'on a d'après (8.1) et (9.13),

$$|\pi(z)-\gamma(t)|\gg, \qquad \rho(\pi(z), E),$$

on a donc

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}}{|\pi(z)-\zeta_{j,k}|^2}&\ll\sum_{j=1}^{N_k}\int_{I_{j,k}}\frac{dt}{|\pi(z)-\gamma(t)|^2}\\&\ll\int_{\cup_{j=1}^{N_k}I_{j,k}}\frac{dt}{|\pi(z)-\gamma(t)|^2}\\&\ll\int_{\rho(\pi(z), E)}^{\infty}\frac{du}{u^2}\ll\frac{1}{\rho(\pi(z), E)}\end{aligned}$$

et donc

$$S'_2\ll\sum_{2^{-k}<\rho(\pi(z), E)}\frac{2^{-k}}{\rho(\pi(z), E)}=O(1). \tag{9.14}$$

On a d'après (9.11) et (9.14)

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\log\frac{1}{\rho(\pi(z), E)}+O(1)$$

et donc, d'après (9.10),

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\log\frac{1}{\rho(z, E)}+O(1). \tag{9.15}$$

L'estimation ($b$) de la proposition est donc établie dans les deux cas d'après (9.9) et (9.15).

La proposition suivante est un raffinement de la proposition 19 de [5]. On ne suppose plus $E$ porté par une sous-variété de $\partial D$.

10. PROPOSITION. — *Soit $E$ un sous-ensemble compact de $\partial D$ vérifiant la condition*

$$\int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\, d\varepsilon \ll r, \tag{10.1}$$

*pour tout $r$, $0 < r \leqslant 1$ et toute boule $B_r$ de rayon $r$ centrée sur $\partial D$. Alors, il existe une fonction $\psi$ holomorphe au voisinage de tout point de $\bar{D} \setminus E$, de partie réelle strictement positive dans $\bar{D} \setminus E$ qui vérifie les estimations suivantes:*

(*a*) $\operatorname{Re} \psi(z) \gg \log 1/\rho(z, E) + O(1)$, *pour tout $z$ de $\bar{D} \setminus E$;*

(*b*) $\operatorname{Re} \psi(z) \ll \log 1/\rho(z, E) + O(1)$, *pour tout $z$ de $\bar{D} \setminus E$;*

(*c*) $|D^\alpha \psi(z)| \leqslant C(|\alpha|)\, \rho(z, E)^{-|\alpha|-1}$, *pour tout multi-indice $\alpha$ de longueur $|\alpha|$ et tout $z$ de $\bar{D} \setminus E$.*

*Preuve.* — On définit, comme dans la preuve de la proposition 9, la fonction $\psi$ par

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}}{2^{-k} + H(\zeta_{j,k}, z)},$$

avec les mêmes notations. Seule, diffère la preuve de l'estimation (*b*) que l'on développe maintenant.

On a pour tout $z \in \bar{D} \setminus E$

$$\operatorname{Re} \psi(z) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + \operatorname{Re} H(\zeta_{j,k}, z)}{|2^{-k} + H(\zeta_{j,k}, z)|^2}.$$

Donc, en utilisant les propriétés de $H$, si on suppose $\rho(z, E) < 1/2$, on a

$$\operatorname{Re} \psi(z) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k} + \rho(\zeta_{j,k}, z)}{2^{-2k} + \rho(\zeta_{j,k}, z)^2},$$

$$\operatorname{Re} \psi(z) \ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{2^{-k} + \rho(\zeta_{j,k}, z)}. \tag{10.2}$$

On note, pour tout $(l, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$C_{l,k}=\{j;\, 2^l\rho(z,E)<\rho(\zeta_{j,k}, z)\leqslant 2^{l+1}\rho(z,E)\},$$
$$D_{l,k}=\{j;\, \rho(\zeta_{j,k}, z)\leqslant 2^l\rho(z,E)\}.$$

et on a

$$\text{card}\, D_{l,k}\leqslant N_{2^{-k}}(B_{2^l\rho(z,E)}\cap E). \tag{10.3}$$

On déduit de (10.2)

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\left(\frac{\text{card}\, D_{0,k}}{2^{-k}+\rho(z,E)}+\sum_{l=0}^{L_z}\frac{\text{card}\, C_{l,k}}{2^{-k}+2^l\rho(z,E)}\right).$$

Ici $2^{L_z}\rho(z,E)$ est équivalent à 1 ce qui implique

$$L_z\ll\text{Log}\frac{1}{\rho(z,E)}+O(1),$$

car $D$ est borné.

On intègre par parties la somme portant sur $l$; on obtient

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\sum_{l=1}^{L_z}\frac{2^l\rho(z,E)}{2^{-2k}+2^{2l}\rho(z,E)^2}\text{card}\, D_{l,k}+O(1).$$

On échange les sommations et on coupe la somme sur $k$ en deux parties

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\sum_{l=1}^{L_z} 2^l\rho(z,E)\left(\sum_{2^{-k}<2^l\rho(z,E)}+\sum_{2^{-k}\geqslant 2^l\rho(z,E)}\right)+O(1),$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Re}\psi(z)\ll\Sigma_1+\Sigma_2+O(1), \tag{10.4}$$

avec

$$\Sigma_1=\sum_{l=1}^{L_z}\frac{1}{2^l\rho(z,E)}\sum_{2^{-k}<2^l\rho(z,E)} 2^{-k}\text{card}\, D_{l,k}.$$

Mais d'après (10.3) et l'hypothèse (10.1), on remarque que, pour tout $l$, on a

$$\sum_{2^{-k}<2^l\rho(z,E)} 2^{-k}\text{card}\, D_{l,k}\ll 2^l\rho(z,E),$$

et donc

$$(10.5) \qquad \Sigma_1 \ll L_z \ll \log \frac{1}{\rho(z, E)} + O(1).$$

$$\Sigma_2 = \sum_{l=1}^{L_z} 2^l \rho(z, E) \sum_{2^{-k} \geq 2^l \rho(z, E)} 2^k \operatorname{card} D_{l, k},$$

mais ici card $D_{l, k}$ est majoré par une constante absolue. En effet, on compte dans la boule de centre $z$ et de rayon $2^l \rho(z, E)$ des points écartés d'une distance supérieure à son rayon [10].

De plus,

$$\sum_{2^{-k} \geq 2^l \rho(z, E)} 2^k \ll (2^l \rho(z, E))^{-1}.$$

On a donc

$$(10.6) \qquad \Sigma_2 \ll L_z \ll \log \frac{1}{\rho(z, E)} + O(1).$$

De là, d'après (10.4) et (10.5), on déduit que pour tout $z$ dans $\bar{D} \setminus E$, vérifiant $\rho(z, E) < 1/2$, on a

$$\operatorname{Re} \psi(z) \ll \log \frac{1}{\rho(z, E)} + O(1).$$

Ceci achève la preuve de la proposition 10.

11. Lemme de division par $C^\infty(\bar{D})$ [13]. — *Soit $E$ un sous-ensemble fermé de $\partial D$. Soit $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctions de $C_E^\infty$. Alors il existe une fonction $g$ de $C_E^\infty$ positive et ne s'annulant que sur $E$ et des fonctions $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $C_E^\infty$ telles que l'on ait $f_i = g h_i$, pour tout $i$* dans $\mathbb{N}$. *Si, de plus, $f$ est une fonction de $C_E^\infty$ ne s'annulant que sur $E$ telle que l'on ait $g \ll |f|$, alors il existe des fonctions $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $C_E^\infty$ telles que l'on ait $f_i = f k_i$, pour tout $i$ dans $\mathbb{N}$.*

*Preuve.* — La première assertion n'est autre que le lemme V.2.4 de [12]. La fonction $g$ y est construite en sorte que, pour tout $(p, q, i) \in \mathbb{N}^3$, on ait

$$(11.1) \qquad \lim_{x \to E} g^{-q}(x) \sum_{|\beta| \leq p} |D^\beta f_i(x)| = 0.$$

La deuxième assertion du lemme est donc une conséquence de (11.1) et des inégalités suivantes

$$|D^\alpha k_i| \leqslant C(|\alpha|)|f|^{-|\alpha|-1} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} |D^\beta f_i| \\ \leqslant C(|\alpha|)|g|^{-|\alpha|-1} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} |D^\beta f_i|,$$

valables dans $\bar{D} \setminus E$, pour tout entier $i$ et pour tout multi-indice $\alpha$ de longueur $|\alpha|$.

12. THÉORÈME. — *Soit $E$ un sous-ensemble fermé de $\partial D$ vérifiant la condition* (9.1) *ou la condition* (10.1). *Alors $E$ vérifie la propriété de division par $A^\infty(D)$, c'est-à-dire, étant donnée une famille de fonctions $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $C_E^\infty$, il existe une fonction $F$ de $A_E^\infty$ ne s'annulant que sur $E$ et des fonctions $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $C_E^\infty$ telles que l'on ait $f_i = F k_i$, pour tout $i$ dans $\mathbb{N}$.*

*De plus, pour tout $i$, $k_i$ appartient à l'adhérence dans $C^\infty(\bar{D})$ de $A^\infty(D).f_i$.*

*Preuve.* — On applique le lemme précédent aux fonctions $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Il existe donc une fonction $g$ positive de $C_E^\infty$ ne s'annulant que sur $E$ et des fonctions $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $C_E^\infty$ telles que l'on ait $f_i = g h_i$, pour tout $i$ dans $\mathbb{N}$. La première partie du théorème sera établie si on construit une fonction $F$ de $A_E^\infty$ telle que l'on ait $g \leqslant |F|$ dans $\bar{D} \setminus E$.

On peut supposer $\sup_{x \in \bar{D}} g(x) \leqslant 1/2$ et poser $\theta = \log 1/g$. La fonction $\theta$ est positive, de classe $C^\infty$ sur $\bar{D} \setminus E$; de plus, puisque $g$ est plate sur $E$, il existe une fonction $\omega(t)$ tendant vers $+\infty$ lorsque $t$ tend vers zéro telle que l'on ait

$$\theta(z) \geqslant \omega(\rho(z, E)) \log \frac{1}{\rho(z, E)}, \quad \text{pour tout } z \text{ de } \bar{D} \setminus E.$$

Puisque le sous-ensemble $E$ vérifie (9.1) ou (10.1) on peut lui appliquer les conclusions des propositions 9 et 10 dont on reprend les notations; il existe donc une fonction $\psi(z)$ holomorphe dans $D$, de classe $C^\infty$ dans $\bar{D} \setminus E$ telle que l'on ait

$$\operatorname{Re} \psi(z) \leqslant \log \frac{1}{\rho(z, E)} + O(1) \quad \text{pour tout } z \text{ de } \bar{D} \setminus E.$$

On déduit de là que, quel que soit $p$ entier, $p \geqslant 1$, il existe un voisinage de $E$ dans $\bar{D}$ telle que l'on ait dans ce voisinage

$$\operatorname{Re} \psi(z) \leqslant 2^{-p} \theta(z).$$

Puisque la série $\sum_1^\infty 2^{-k} N_k$ converge et que l'on a pour tout $z$ de $\bar{D} \setminus E$ et tout $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(12.1) $$|2^{-k}+H(\zeta_{j,k}, z)| \geqslant \rho(z, E),$$

il existe donc $k_p$ tel que, si on note,

$$\psi_p(z)=\sum_{k \geqslant k_p} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k}}{2^{-k}+H(\zeta_{j,k}, z)},$$

on ait, pour tout $z$ de $\bar{D} \setminus E$ et, pour tout $p \geqslant 1$,

$$\operatorname{Re} \psi_p(z) \leqslant 2^{-p} \theta(z).$$

On peut s'assurer que la suite $(k_p)_{p \geqslant 1}$ tende vers $+\infty$ lorsque $p$ tend vers $+\infty$. De plus, la convergence de la série $\sum_1^\infty 2^{-k} N_k$ implique l'existence d'une suite $(\lambda_k)_{k \geqslant 1}$ tendant vers $+\infty$ telle que la série $\sum_k \lambda_k 2^{-k} N_k$ soit convergente. On note, pour tout $k \geqslant 1$, $\lambda'_k = \inf(\lambda_k, \operatorname{card}\{p; k_p \leqslant k\})$.

On a encore

(12.2) $$\sum_k \lambda'_k 2^{-k} N_k < \infty.$$

On montre alors, comme dans la preuve du théorème 9 [5] que la fonction $F$ définie par,

$$F(z)=\exp -\varphi(z)=\exp -\sum_{k=1}^\infty \sum_{k=1}^{N_k} \frac{\lambda'_k 2^{-k}}{2^{-k}+H(\zeta_{j,k}, z)}=\exp -\sum_{k=1}^\infty \lambda'_k a_k$$

est dans $A^\infty(D)$, plate sur $E$ et ne s'annule que sur $E$. On a alors, puisque $\operatorname{Re} a_k$ est positive, $\operatorname{Re} \varphi(z) \leqslant \sum_{k=1}^\infty \operatorname{card}\{p; k_p \leqslant k\} \operatorname{Re} a_k$,

$$\sum_{k=1}^\infty \sum_{\{p;\, k_p \leqslant k\}} \operatorname{Re} a_k = \sum_{p=1}^\infty \sum_{\{k;\, k \geqslant k_p\}} \operatorname{Re} a_k,$$

et donc, pour tout $z$ de $\bar{D} \setminus E$,

$$\operatorname{Re} \varphi(z) \leqslant \sum_{p=1}^\infty \operatorname{Re} \psi_p(z) \leqslant \theta(z).$$

On déduit de là $g \leqslant |F|$ sur $\bar{D} \setminus E$. Il existe donc d'après le lemme 11 des fonctions $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $C_E^\infty$ telles que l'on ait $f_i = F k_i$, pour tout $i$ dans $\mathbb{N}$. On se propose maintenant de montrer que, pour tout $i$ dans $\mathbb{N}$, $k_i$ appartient à l'adhérence dans $C^\infty(D)$ de $A^\infty(D).f_i$.

On pose, pour tout entier $l$,

$$\varphi_l(z)=\sum_{k=1}^{l}\lambda'_k\sum_{j=1}^{N_k}\frac{2^{-k}}{2^{-k}+H(\zeta_{j,k}, z)}.$$

D'après 6 (*b*), (12.1) et (12.2) on a, pour tout $l$ et tout $z$ de $\bar{D}\setminus E$,

$$0<\operatorname{Re}\varphi_l(z)<\operatorname{Re}\varphi(z),$$
$$|D^\alpha\varphi_l(z)|\leqslant C(|\alpha|)\,\rho(z, E)^{-|\alpha|-1},$$

pour tout multi-indice $\alpha$ de longueur $|\alpha|$. On a aussi, pour tout $z$ de $\bar{D}\setminus E$,

$$\lim_{l\to\infty}\varphi_l(z)=\varphi(z).$$

On note $k_{i,l}=f_i\exp\varphi_l$ pour tout $(i, l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. La fonction $k_{i,l}$ appartient à $A^\infty(D).f_i$ et converge ponctuellement vers $k_i$ lorsque $l$ tend vers $+\infty$.

On a, de plus, pour tout multi-indice $\alpha$ et tout $z$ de $\bar{D}\setminus E$

$$\begin{aligned}|D^\alpha k_{i,l}(z)|&\leqslant C(|\alpha|)\,\rho(z, E)^{-2|\alpha|}\exp(\operatorname{Re}\varphi(z))\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}|D^\beta f_i(z)|\\&\leqslant C(|\alpha|)\,|F(z)|^{-2}\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}|D^\beta f_i(z)|\\&\leqslant C(|\alpha|)\,(g(z))^{-2}\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}|D^\beta f_i(z)|.\end{aligned}$$

On déduit de là, d'après (11.1),

$$\lim_{z\to E}D^\alpha k_{i,l}(z)=0.$$

Pour tout entier $p$, la suite $(k_{i,l})_{l\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^p(\bar{D})$ donc relativement compacte dans $C^{p-1}(\bar{D})$; elle converge donc vers $k_i$ dans $C^\infty(\bar{D})$, ce qui achève la preuve du théorème.

13. Théorème [5]. — *Soit $E$ un sous-ensemble fermé de $\partial D$ vérifiant la condition* (9.1) *ou la condition* (10.1). *Alors $E$ est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$.*

*Preuve.* — Il s'agit d'une conséquence de la proposition 2 et du théorème 12.

14. Proposition. — *Lorsque $D$ est le disque unité du plan complexe, un sous-ensemble fermé $E$ de $\partial D$ a la propriété de division par $A^\infty(D)$ si et seulement si c'est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$.*

*Preuve.* — D'après la proposition 2 il suffit de montrer qu'un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ a la propriété de division par

$A^\infty(D)$. Or les sous-ensembles fermés du bord du disque qui sont des ensembles d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$ ont été caractérisés dans [1] par une condition équivalente [5] à (9.1). Ceci achève la preuve de la proposition puisque, d'après le théorème 12, si $E$ vérifie la condition (9.1) il a la propriété de division.

15. REMARQUE. — Dans le cas $n>1$, lorsque les sous-ensembles $E$ sont situés sur des sous-variétés totalement réelles de $\partial D$, on ne sait pas si les conclusions de la proposition 14 subsistent.

16. LEMME. — *Soit $E$ un sous ensemble fermé de $\partial D$ vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$. Alors $A_E^\infty$ est un $A^\infty(D)$-module plat.*

*Preuve.* — Si $(f_i)$, $i=1, 2, \ldots, l$, est une famille finie de fonctions de $A_E^\infty$ il existe alors, par hypothèse, une fonction $F$ de $A_E^\infty$ et une famille finie $(k_i)$, $i=1, 2, \ldots, l$, de fonctions de $A_E^\infty$ vérifiant $f_i=Fk_i$, pour $i=1, 2, \ldots, l$. De là, comme le remarquent J. BRUNA et J. M. ORTEGA, on déduit que $A_E^\infty$ est un $A^\infty(D)$-module plat (théorème 1.7, [2]).

17. LEMME. — *Soit $E$ un sous ensemble fermé de $\partial D$ vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$. Alors $C_E^\infty$ est isomorphe, comme $A^\infty(D)$-module, à $A_E^\infty \otimes_{A^\infty(D)} C^\infty(\bar{D})$. De même, l'espace $C_E^{\infty, p, q}$ des $(p, q)$ formes à coefficients dans $C_E^\infty$ est isomorphe, comme $A^\infty(D)$-module, à $A_E^\infty \otimes_{A^\infty(D)} C^{\infty, p, q}(\bar{D})$ où $C^{\infty, p, q}(\bar{D})$ désigne l'espace des $(p, q)$ formes de classe $C^\infty$ jusqu'au bord de $D$.*

*Preuve.* — On prouve ici la première assertion du lemme; la deuxième se démontre de façon analogue.

Soit $\alpha$ l'application canonique de $A_E^\infty \otimes_{A^\infty(D)} C^\infty(\bar{D})$ dans $C_E^\infty$ définie par $\alpha(\sum_i a_i \otimes f_i)=\sum_i a_i f_i$.

Cette application est surjective. En effet si $f$ appartient à $C_E^\infty$ il existe $F$ dans $A_E^\infty$ et $k$ dans $C_E^\infty$ vérifiant $f=Fk$, c'est-à-dire, $f=\alpha(F\otimes k)$.

L'application $\alpha$ est injective. Supposons que l'on ait $\sum_i a_i f_i=0$, pour $a_i$ dans $A_E^\infty$ et $f_i$ dans $C^\infty(\bar{D})$. Il existe $F$ dans $A_E^\infty$ et $k_i$ dans $A_E^\infty$ vérifiant $a_i=Fk_i$, pour tout $i$. Alors, on a

$$\sum_i a_i \otimes f_i=\sum_i (Fk_i)\otimes f_i=F\otimes \sum_i k_i f_i=0,$$

car

$$\sum_i k_i f_i=0$$

puisque

$$\textstyle\sum_i a_i f_i = F \sum_i k_i f_i = 0$$

et que $F$ ne s'annule que sur $E$.

18. PROPOSITION. — *Soit $E$ un sous ensemble fermé de $\partial D$ vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$. La suite de $A^\infty(D)$-modules et de $A^\infty(D)$-homomorphismes*

$$0 \to A_E^\infty \to C_E^{\infty,0,0} \xrightarrow{\bar\partial} C_E^{\infty,0,1} \xrightarrow{\bar\partial} \ldots \xrightarrow{\bar\partial} C_E^{\infty,0,n} \to 0$$

*est exacte.*

*Preuve.* — On déduit du théorème de J. J. KOHN [12] que la suite de $A^\infty(D)$-modules et de $A^\infty(D)$-isomorphismes

$$0 \to A^\infty(D) \to C^{\infty,0,0}(\bar D) \xrightarrow{\bar\partial} C^{\infty,0,1}(\bar D) \xrightarrow{\bar\partial} \ldots \xrightarrow{\bar\partial} C^{\infty,0,n}(\bar D) \to 0$$

est exacte. En tensorisant par le $A^\infty(D)$-module plat $A_E^\infty$ on obtient que

$$0 \to A_E^\infty \otimes_{A^\infty(D)} A^\infty(D) \to A_E^\infty \otimes_{A^\infty(D)} C^{\infty,0,0}(\bar D) \xrightarrow{1\otimes\bar\partial} \ldots \xrightarrow{1\otimes\bar\partial} A_E^\infty \otimes_{A^\infty(D)} C^{\infty,0,n}(\bar D) \to 0$$

est une suite exacte. Le lemme 17 permet de conclure.

On retrouve alors la proposition 2.

19. COROLLAIRE. — *Soit $E$ un sous ensemble fermé de $\partial D$ vérifiant la propriété de division par $A^\infty(D)$. Alors $E$ est un ensemble d'interpolation d'ordre infini pour $A^\infty(D)$.*

*Preuve.* — On utilise la méthode du théorème 5.12 de [11]. Si $f$ appartient à $C^\infty(\mathbb{C}^n)$ et $\bar\partial f$ appartient à $C_E^{\infty,0,1}$ il existe $g$ dans $C_E^\infty$ vérifiant $\bar\partial g = \bar\partial f$, car $\bar\partial f$ est $\bar\partial$-fermée dans $C_E^{\infty,0,1}$. Alors $h = f - g$ appartient à $A^\infty(D)$ et $g = f - h$ est plate sur $E$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXANDER (H.), TAYLOR (B. A.) and WILLIAMS (D. L.). — The interpolating sets for $A^\infty(D)$, *J. Math. Anal. Appl.*, 36, 1971, p. 556-566.

[2] BRUNA (J.) et ORTEGA (J. M.). — Closed finitely generated ideals in algebras of holomorphic functions and smooth to the boundary in strictly pseudoconvex domains, *Math. Ann.*, 268, 1984, p. 137-157.

[3] BRUNA (J.) et ORTEGA (J. M.). — Communication personnelle.

[4] CARLESON (L.). — Sets of uniqueness for functions, regular in the unit circle, *Acta Math.*, 87, 1952, p. 325-345.

[5] CHAUMAT (J.) et CHOLLET (A.-M.). — Ensembles de zéros et d'interpolation à la frontière de domaines strictement pseudo-convexes, *Arkiv för Matematik*, 1986 (à paraître).

[6] CHAUMAT (J.) et CHOLLET (A.-M.). — Propriétés de division par des fonctions de $A^{\infty}(D)$, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 300, 1985, p. 419-422.

[7] CHAUMAT (J.) et CHOLLET (A.-M.). — *Dimension de Hausdorff des ensembles des zéros et d'interpolation pour* $A^{\infty}(D)$ (à paraître).

[8] CHOLLET (A.-M.). — *Ensembles de zéros à la frontière de fonctions analytiques*, Ann. Inst. Fourier, 26, 1976, p. 51-80.

[9] CHOLLET (A.-M.). — Zéros à la frontière de fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, *Thèse d'État*, Orsay, 1976.

[10] COIFMAN (R. R.) et WEISS (G.). — *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*, Springer-Verlag, 1971.

[11] GAY (R.) et SEBBAR (A.). — Division et extension dans l'algèbre $A^{\infty}(\Omega)$ d'un ouvert pseudo-convexe à bord lisse de $\mathbb{C}^n$, *Math. Z.*, 189, 1985, p. 421-447.

[12] KOHN (J. J.). — Global regularity for $\bar{\partial}$ on weakly pseudoconvex manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181, 1973, p. 273-292.

[13] TOUGERON (J. C.). — *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer-Verlag, 1972.