BULLETIN DE LA S. M. F.

MARC AUBRY
JEAN-MICHEL LEMAIRE

Sommes connexes fibrées en cercles

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 459-462
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__459_0>

Bull. Soc. math. France,
113, 1985, p. 459-462

SOMMES CONNEXES FIBRÉES EN CERCLES

PAR

MARC AUBRY et JEAN-MICHEL LEMAIRE (*)

RÉSUMÉ. — Nous montrons qu'en dimension cinq toute variété compacte, simplement connexe, sans bord, admet une action de cercle libre si et seulement si elle est sans torsion : ceci fournit des exemples de sommes connexes non triviales admettant une action de cercle libre; d'autres exemples en dimension six étaient déjà connus par un résultat de Goldstein et Lininger.

ABSTRACT. — We show that any five dimensional compact simply connected manifold without boundary admits a free circle action if and only if it is torsion-free: we thus obtain examples of non-trivial connected sums which support a free circle action; other examples in dimension six were already known by a result of Goldstein and Lininger.

Cette note a pour but de cerner davantage la réponse à une question de W. Hsiang à laquelle S. HALPERIN vient d'apporter de nouveaux développements [H] : quelles sont les variétés compactes, sans bord, 1-connexes, qui admettent une action de cercle sans point fixe et une décomposition en somme connexe non triviale?

S. Halperin montre qu'une telle variété M vérifie nécessairement $\pi_{2i}(M)\otimes\mathbb{Q}\neq 0$, pour un certain $i>0$. Ainsi $S^3\times S^3 \# S^3\times S^3$ n'admet pas d'action libre de cercle.

En fait, GOLDSTEIN et LININGER [GL] avaient déjà classé les variétés de dimension 6 répondant à cette question dont l'homologie est sans torsion : ce sont :

$$(S^2\times S^4)^{\# k-1}\#(S^3\times S^3)^{\# k}$$

et :

$$\eta_4\#(S^2\times S^4)^{\# k-2}\#(S^3\times S^3)^{\# k}.$$

(*) Texte reçu le 20 février 1985.

M. AUBRY et J.-M. LEMAIRE, Laboratoire de Mathématiques, U.A.-C.N.R.S. 168, parc Valrose, 06034 Nice Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1985/04 459 4/$ 3.40

où $(X)^{\# n}$ représente la somme connexe de n exemplaires de la variété X et η_4 l'espace total du fibré non trivial en S^4 au-dessus de S^2. En dimension 6, ce sont les seuls cas 1-connexes dont l'homologie soit sans torsion.

En particulier $S^2 \times S^4 \# S^3 \times S^3$ n'admet pas d'action libre de cercle, mais :

$$S^2 \times S^4 \# S^3 \times S^3 \# S^3 \times S^3$$

en admet une. Nous montrons que, pour tout n, $m \geqq 0$, la somme connexe $(S^2 \times S^3)^{\# n}$ de même que $\eta_3 \#(S^2 \times S^3)^m$ (où η_3 désigne l'espace total du S^3-fibré non trivial au-dessus de S^2), est l'espace total d'un S^1-fibré principal, et donc répond à la question pour $n \geqq 2$, $m \geqq 1$.

Dans tout ce qui suit, « variété » signifiera variété C^∞ compacte sans bord. Soit X une variété 1-connexe de dimension 4, et soit :

$$c \in H^2(X; \mathbb{Z}), \qquad c \neq 0.$$

L'espace total M du fibré S^1-principal classé par c est une variété de dimension 5, qui est 1-connexe si et seulement si $c\,\mathbb{Z}$ est un facteur direct dans $H^2(X; \mathbb{Z})$: ceci résulte immédiatement de la considération du diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_2(X) & \to & \pi_2(K(\mathbb{Z}, 2)) & \to & \pi_1(M) & \to & \pi_1(X)=0 \\
\downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \\
H_2(X) & \to & H_2(K(\mathbb{Z}, 2)) & \to & H_1(M) & \to & H_1(X)=0
\end{array}$$

dont les lignes sont respectivement les suites exactes d'homotopie et d'homologie (de Serre) de la fibration :

$$M \to X \xrightarrow{c} K(\mathbb{Z}, 2).$$

De plus, pour toute fibration $S^1 \to M \to X$, où M (resp. X) est une variété de dimension 5 (resp. 4), M 1-connexe implique M sans torsion. En effet, la suite exacte d'homotopie montre que X est 1-connexe. D'où, par le théorème des coefficients universels, $H^2(X)$ – et $H^2(M)$ – sont sans torsion. La suite spectrale de Serre montre alors que :

$$H^3(M) \simeq \operatorname{Ker}(d^2 : H^2(X) \otimes H^1(S^1) \to H^4(X))$$

est sans torsion.

Rappelons le résultat suivant, dû à SMALE [S] (dans le cas $w_2=0$) et à BARDEN [B] (pour $w_2 \neq 0$) : les variétés 1-connexes de dimension 5 sont classées par leur H_2 et par un invariant lié à l'ordre d'un élément du H_2 détecté par w_2; en particulier, toute variété 1-connexe M vérifiant

$$w_2(M)=0 \quad (\text{resp}\, w_2(M) \neq 0)$$

et $H_2(M; \mathbb{Z})=\mathbb{Z}^r$ est difféomorphe à :

$$(S^2 \times S^3)^{\# r} \quad (\text{resp}\, \eta_3 \# (S^2 \times S^3)^{\# r-1}).$$

Soit donc $p : M \to X$ la projection du fibré en cercles classé par $c \in H^2(X; \mathbb{Z})$. Le fibré tangent à M est somme directe de $p^* TX$ et du fibré tangent le long des fibres, qui est trivial de rang 1. Donc :

$$w_2(M)=p^* w_2(X).$$

Ainsi si nous prenons :

$$X=(S^2 \times S^2)^{\# m}, \qquad m \geqq 1$$

et

$$c=(a_1, a'_1, \ldots, a_m, a'_m) \in \mathbb{Z}^{2m},$$

avec

$$pgcd(a_1, a'_1, \ldots, a_m, a'_m)=1,$$

la variété M est 1-connexe et vérifie $w_2(M)=0$, car :

$$w_2(X)=0 \qquad \text{et} \qquad H_2(M)=\mathbb{Z}^{2m-1}.$$

D'après le théorème de Smale, M est difféomorphe à $(S^2 \times S^3)^{\# 2m-1}$ et nous avons donc construit des fibrés principaux :

$$S^1 \to (S^2 \times S^3)^{\# 2m-1} \to (S^2 \times S^2)^{\# m}.$$

De même, prenons $X=(S^2 \times S^2)^{\# m} \# \mathbb{C}P(2)$, muni du S^1-fibré obtenu en recollant sur un voisinage du collier le fibré de Hopf sur $\mathbb{C}P(2)$ et le fibré trivial sur $(S^2 \times S^2)^{\# m}$: la classe caractéristique de ce fibré est un générateur du facteur $H^2(\mathbb{C}P(2))$ dans $H^2(X)$. D'autre part, $w_2(X)$ n'est autre que la réduction mod. 2 de cette classe et par construction :

$$0=p^* w_2(X)=w_2(M).$$

Comme $H_2(M)=\mathbb{Z}^{2m}$, la variété M est difféomorphe à $(S^2\times S^3)^{\# 2m}$ et l'on a défini un fibré principal pour chaque m

$$S^1 \to (S^2\times S^3)^{\# 2m} \to (S^2\times S^2)^{\# m} \# \mathbb{C}P(2).$$

Finalement, nous avons fibré $(S^2\times S^3)^{\# n}$ en cercles pour tout n.

Enfin, si l'on prend $X=\mathbb{C}P(2)\#\mathbb{C}P(2)$ muni du S^1-fibré classé par un générateur d'un des facteurs de $H^2(X)$, la variété obtenue M est simplement connexe et a la cohomologie de $S^2\times S^3$, mais vérifie $w_2(M)\neq 0$. C'est l'espace total du S^3-fibré non trivial au-dessus de S^2, d'après le théorème de Barden. De même, si l'on prend :

$$X=\mathbb{C}P(2)\#\mathbb{C}P(2)\#(S^2\times S^2)^{\# n}$$

muni du S^1-fibré classé par un générateur d'un des facteurs de $H^2(X)$, on obtient la variété :

$$M=\eta_3\#(S^2\times S^3)^{\# n}.$$

Conclusion. — D'après le théorème de Barden,

$$(S^2\times S^3)^{\# n} \quad \text{et} \quad \eta_3\#(S^2\times S^3)^{\# n},$$

pour $n\geqq 0$, représentent toutes les variétés de dimension 5, 1-connexes, dont le H_2 est sans torsion. Ce qui précède permet d'affirmer qu'une variété 1-connexe de dimension 5 admet une action de cercle libre si et seulement si elle est sans torsion.

BIBLIOGRAPHIE

[B] BARDEN (D.). — Simply connected five manifolds, *Ann. Math.*, vol. 82, 1965, p. 365-385.

[GL] GOLDSTEIN (R.) and LININGER (L.). — A classification of 6-manifolds with free S^1-actions, *Lect. Notes Math.*, vol. 298, p. 316-323, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag.

[H] HALPERIN (S.). — *Rational homotopy and torus actions*, preprint, Toronto, 1984.

[S] SMALE (S.). — On the structure of 5-manifolds, *Ann. Math.*, vol. 75, 1962, p. 38-46.