BULLETIN DE LA S. M. F.

YVES FÉLIX
JEAN-CLAUDE THOMAS

Module d'holonomie d'une fibration

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 255-258
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__255_0>

Bull. Soc. math. France,
113, 1985, p. 255-258.

MODULE D'HOLONOMIE D'UNE FIBRATION

PAR

YVES FELIX (*) et JEAN-CLAUDE THOMAS (**)

RÉSUMÉ. — Si F désigne la fibre homotopique d'une application $f: L \to K$, alors $H_*(F)$ supporte une structure canonique de $H_*(\Omega K)$-module. Nous démontrons que si f est l'inclusion d'une cofibration $\vee S^{n_i} \to L \xrightarrow{f} K$ alors l'homologie réduite de F est un $H_*(\Omega K)$-module libre engendré par $H_+(\vee S^{n_i})$.

ABSTRACT. — Let F be the homotopy fibre of $f: L \to K$, then $H_*(F)$ is equipped with a canonical structure of $H_*(\Omega K)$-module. We prove that if f is the inclusion map in the cofibration $\vee S^{n_i} \to L \xrightarrow{f} K$, then the reduced homology of F is a free $H_*(\Omega K)$-module generated by $H_+(\vee S^{n_i})$.

Mots clés : Construction de Adams-Hilton — Holonomie.
Classification A.M.S. : 55 P 05-55 R 05.

Introduction

Dans une fibration $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$, où B est supposé connexe par arcs et pointé, la propriété de relèvement des homotopies définit, à homotopie près, une opération de l'espace des lacets de Moore ΩB sur la fibre F, [W], notée :

$$\nu: \quad F \times \Omega B \to F,$$

(*) Texte reçu le 23 mai 1984, révisé le 20 mars 1985.

(*) Chercheur qualifié au F.N.R.S., Université Catholique de Louvain, Institut de Mathématiques, 1348 Louvain-La-Neuve, Belgique.

(**) E.R.A. au C.N.R.S. 07 590, Université de Lille I, U.E.R. de Mathématiques, 59655 Villeneuve-d'Ascq.

Cette application induit une unique structure de $H_*(\Omega B)$-module (à droite) sur $H_*(F)$ que nous appelons *module d'holonomie.*

Dans le cas de la fibration canonique $\Omega B \xrightarrow{i} PB \xrightarrow{p} B$, la structure d'holonomie de $H_*(\Omega B)$ est induite par la structure d'algèbre de Pontrjagin de $H_*(\Omega B)$ [F.T]. Aussi, prolongeant les techniques initialement introduites par Adams et Hilton [A.H], nous construisons (Lemme) un module différentiel gradué, dont l'homologie est un $H_*(\Omega B)$-module isomorphe au module d'holonomie $H_*(F)$ et nous démontrons :

Théorème. — *Soient L un CW-complexe* 1*-réduit et* $\vee_{i=1}^{n} S^{n_i} \xrightarrow{f} L \xrightarrow{i} K$ *une cofibration* ($n_i \geq 2$). *Désignons par F la fibre homotopique de l'inclusion i de L dans K.*

Alors, $H_+(F)$ *est un* $\mathrm{H}_*(\Omega K)$*-module libre engendré par* $H_+(\vee_i S^{n_i})$.

($H_*(X)$ désigne l'homologie singulière de X à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $H_+(X)$ désigne l'homologie réduite.)

La construction et le théorème sont illustrés par les exemples suivants :

Exemple 1. — Soit F la fibre homotopique de la projection :

$$S_a^3 \vee S_b^3 \cup_\varphi e^{2m+2} \to S_a^3,$$

où $\varphi = k[a[a, \ldots, [a, b] \ldots]$ (m fois a, $k \in \mathbb{Z}$).

La construction précédente montre que :

$$H_+(F) = (\mathbb{Z}[\alpha]/k\,.\,\alpha^m)\,.\,b,$$

avec $\deg b = 3$, $\deg \alpha = 2$, $\mathbb{Z}[\alpha] = H_2(\Omega S^3 a)$.

Exemple 2. — Soit $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ une fibration où E est supposé avoir le type d'homotopie d'un bouquet de sphères.

Désignons par V l'image de la composée,

$$\pi_*(\Omega E) \xrightarrow{\Omega p} \pi_*(\Omega B) \xrightarrow{\text{Hurewicz}} H_*(\Omega B)$$

et par $\partial : H_*(\Omega B) \to H_*(F)$ le morphisme induit par le connectant de la suite exacte de Puppe $\nu|_{*\times\Omega B} : \Omega B \to F$. Un petit calcul montre alors :

$$\operatorname{Im} \partial = H_*(\Omega B)/V\,.\,H_*(\Omega B).$$

Exemple 3 [C.M.N.], § 8. — Soit $f: S^{m-1} \cup_{p^r} e^m \to S^m$ l'application cellulaire qui écrase le $m-1$ squelette et $F = F_m(p^r)$ la fibre homotopique de f, le théorème précédent entraîne que

$$H_+(F_m(p^r) = H_+(S^{m-1}) \otimes H_*(\Omega S^m)$$

en tant que $H_*(\Omega S^m)$-module.

Signalons que, dans son étude de la $\mathbb{Z}$-formalité [A], D. ANICK étudie l'homologie d'un carré fibré par des techniques similaires. Notons aussi que, dans [B], H. BAUES donne une description cellulaire de la fibre homotopique de certaines applications. Le théorème précédent peut se déduire de ses constructions.

Démonstration du théorème. — Soit K un $C.W.$-complexe 1-réduit $(K^0 = K^1 = *)$ et $(e_i)_{i \in I}$ l'ensemble de ses cellules de dimension supérieure ou égale à deux. Désignons par $A(K)$ l'anneau unitaire libre engendré par $\{a_i\}_{i \in I}$ avec $\deg(a_i) = \dim e_i - 1$ et par $B(K)$ la somme directe de $\mathbb{Z}$ et du groupe abélien libre engendré par $\{b_i\}_{i \in I}$ où $\deg(b_i) = \dim e_i$. D'après [A.H], il existe des différentielles d, D, $\bar{D}$ et des homomorphismes θ, θ' et $\bar{\theta}$ rendant commutatif le diagramme de groupes différentiels :

$$\begin{array}{ccc}
(A(K), d) & \xrightarrow{\theta'} & C_*(\Omega K) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(B(K) \otimes A(K), D) & \xrightarrow{\theta} & C_*(PK) \\
\downarrow & & \downarrow \\
A(K), \bar{D}) & \xrightarrow{\bar{\theta}} & C_*(K)
\end{array}$$

où θ' (resp. θ) est un homomorphisme d'algèbres différentielles (resp. de modules différentiels), et θ, θ' et $\bar{\theta}$ induisent des isomorphismes en homologie.

Soient maintenant un sous $C.W.$-complexe L de K, $i: L \to K$ l'inclusion canonique et F la fibre homotopique de i. La construction d'ADAMS-HILTON se faisant par récurrence sur les cellules ([A.H], p. 317), l'homomorphisme $B(K) \otimes A(K) \to C_*(PK)$ se restreint à un homomorphisme de $A(K)$-modules $B(L) \otimes A(K) \xrightarrow{\varphi} C_*(F)$. Par un argument de suite spectrale, on montre alors :

LEMME. — *Le morphisme canonique* $B(L) \otimes A(K) \xrightarrow{\varphi} C_*(F)$ *induit en homologie un isomorphisme de* $H_*(A(K))$ $(= H_*(\Omega K))$*-modules.*

Pour terminer la démonstration du théorème, notons $A=A(L)$ l'algèbre des chaînes définies ci-dessus et $A(K)=A\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$, $\dim a_i=n_i$.

La différentielle d sur $A(K)$ est définie de la manière suivante : si $f_i: S^{n_i-1}\to \Omega L$ correspond à l'application d'attachement de la cellule e^{n_i+1}, alors $da_i\in A(L)$ est un cycle représentant l'image du générateur de $H_{n_i-1}(S^{n_i-1})$ par le morphisme f_i. Il en résulte que $\bar{D}b_i\in B(L)$. $B(L)\otimes A(K)$ étant un modèle de ADAMS-HILTON de F, nous obtenons la suite exacte de $A(K)$-modules différentiels

$$0\to B(L)\otimes A(K)\to B(K)\otimes A(K)\to B(K)/B(L)\otimes A(K)\to 0,$$

d'où l'isomorphisme de $H_*(A(K))$-modules

$$H_+(B(L)\otimes A(K))\simeq s^{-1}(H(B(K)/B(L))\otimes H(A(K)).$$

BIBLIOGRAPHIE

[A.H] ADAMS (J. F.) and HILTON (P. J.) — On the chain algebra of a loop space, *Comm. Math. Helv.*, vol. 30, 1955, pp. 305-330.

[A] ANICK (D. J.). — A model of Adams-Hilton type for fiber squares, To appear in *Ill J. Math.*, 1985.

[B] BAUES (H.). — On the homotopy classification problem, vol. 5, Preprint Max-Planck-Institut Bonn, 1984.

[C.M.N.] COHEN (F.), MOORE (J. C.) and NEISENDORFER (J.). — Torsion in homotopy groups, *Ann. Math.*, vol. 109, 1979, p. 121-163.

[F.T] FELIX (Y.) et THOMAS (J. C.). — Sur l'opération d'holonomie rationnelle. To appear in *Proceedings of the research symposium on algebra and algebraic Topology Stockholm*, 1983.

[W] WHITEHEAD (G.). — Elements of homotopy theory, *Graduate Texts in Math.*, Springer-Verlag, 1978.