

# BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD BESSON

## **Comportement asymptotique des valeurs propres du laplacien dans un domaine avec un trou**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 113 (1985), p. 211-230

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1985\\_\\_113\\_\\_211\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__211_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE  
DES VALEURS PROPRES DU LAPLACIEN  
DANS UN DOMAINE AVEC UN TROU**

PAR

GÉRARD BESSON (\*)

RÉSUMÉ. — Nous décrivons le comportement des valeurs propres du laplacien sur une variété riemannienne à laquelle on retire le voisinage tubulaire (de rayon tendant vers zéro) d'une sous-variété fermée, en basse codimension (2, 3 ou 4).

ABSTRACT. — We describe the behaviour of the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on a compact manifold from which a tubular neighbourhood (of radius going to zero) of a closed submanifold is excised, in low codimension (2, 3 or 4).

**0. Introduction**

Sur une variété riemannienne compacte  $M$  avec ou sans bord, considérons les deux problèmes suivants :

Si  $w$  désigne un point de  $M$ ,  $B(\varepsilon)$  la boule de rayon  $\varepsilon$  (petit) autour de  $w$  et  $\Delta$  le Laplacien de  $M$ .

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \lambda u \quad \text{sur } M, \\ \text{conditions aux bords de } M \text{ (si } \partial M \neq \emptyset) \end{array} \right. \\ (2) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \lambda u \quad \text{sur } M_\varepsilon = M \setminus B(\varepsilon), \\ u \equiv 0 \quad \text{sur } \partial B_\varepsilon, \\ \text{conditions aux bords de } M. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Les conditions aux bords de  $M$  sont de type Dirichlet ou Neumann.

---

(\*) Texte reçu le 20 septembre 1984, révisé le 6 mars 1985.

Gérard BESSON, Institut Fourier, B. P. n° 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex (France).

On range les valeurs propres de ces deux problèmes par ordre croissant :

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \quad \text{et} \quad \lambda_1(\varepsilon) < \lambda_2(\varepsilon) \leq \dots$$

D'après [C-F] et [R-T] on sait que  $\lambda_i(\varepsilon)$  converge vers  $\lambda_i$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

On s'intéresse ici à l'étude plus précise de cette convergence. S. OZAWA [01-06] a obtenu les premiers résultats en ce sens en dimension 2, 3 et 4, pour les domaines bornés euclidiens et la condition de Dirichlet.

Le travail qui suit a été motivé par un essai de simplification des démonstrations contenues dans les articles précités. Il repose de manière essentielle sur une idée de Y. COLIN DE VERDIÈRE [CV].

Le paragraphe 1 est consacré à la dimension 2 où tout un développement asymptotique en puissances de  $(\text{Log } \varepsilon)^{-1}$  est obtenu pour  $\lambda_i(\varepsilon)$  au voisinage de la valeur propre  $\lambda_i$ , celle-ci étant supposée simple.

Le paragraphe 2 concerne les dimensions 3 et 4 où seuls le premier terme de développement de  $\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_i$  ( $\lambda_i$  simple) ainsi que le reste sont calculés.

Le paragraphe 3 étend les résultats précédents au cas où l'on considère un nombre fini de points  $w_i$  distincts.

Enfin, dans le paragraphe 4 le cas des variétés auxquelles on retire un voisinage tubulaire d'une sous-variété de codimension 2 est traité.

Signalons que P. BÉRARD et S. GALLOT [B-G] ont obtenu un équivalent de  $\lambda_1(\varepsilon) - \lambda_1$  en toute dimension.

L'auteur tient à remercier vivement, pour de nombreuses conversations et suggestions, Y. Colin de Verdière qui l'a encouragé à étudier ce problème et P. Bérard pour l'aide apportée dans la rédaction de ce texte.

## 1. Le cas de la dimension 2

Si  $\alpha \in \mathbb{C}$  n'est pas une valeur propre du Laplacien sur  $M$ , l'opérateur  $(\Delta - \alpha)^{-1}$  existe et est un opérateur compact à noyau; ce dernier est une fonction  $R(\alpha; x, y)$  définie sur  $M \times M$  à l'exception de la diagonale, vérifiant :

$$\begin{cases} (\Delta_1 - \alpha) R(\alpha; \cdot, y) = \delta_{(\cdot)y}, \\ \text{conditions au bord de } M \end{cases}$$

où  $\Delta_1$  désigne l'opérateur Laplacien agissant sur la première variable. On vérifie aisément en utilisant le théorème de Sobolev, en dim 2, que  $R(\alpha; \cdot, y)$  est dans  $L^2(M)$ .

Par ailleurs  $R(\alpha; \cdot, \cdot)$ , a une singularité sur la diagonale identique à celle de la fonction de Green.

Enfin  $R$  est méromorphe en  $\alpha$  et admet un pôle simple en chaque point du spectre de  $\Delta$  avec pour résidu le noyau du projecteur spectral correspondant. (Pour les propriétés de la résolvante du Laplacien sur une variété riemannienne voir [A], chapitre 4.)

On peut donc écrire, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $(I)$  :

$$R(\alpha; x, y) = -\frac{1}{2\pi} \text{Log}(r) + \frac{\sum_{i=1}^k \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}}{\lambda - \alpha} + F(\alpha; x, y),$$

où  $r$  est la distance de  $x$  à  $y$ ,  $(\varphi_i)_{i=1, \dots, k}$  une base orthonormée de l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$  et  $F$  une fonction hermitienne en  $(x, y)$  analytique en  $\alpha$  au voisinage de  $\alpha = \lambda$ .

LEMME 1.1. — *Sous les hypothèses de ce paragraphe (dim  $M=2$ )  $F(\cdot; \cdot, y_0)$  est  $C^1$  en  $(\alpha, x)$  au voisinage de  $(\lambda, y_0)$  pour tout  $y_0$  dans  $M$ .*

*Preuve.* — On a l'égalité

$$(\Delta_1 - \alpha) F = \delta_{y_0} + H(x, y_0) - \frac{\alpha}{2\pi} \text{Log } r + \frac{1}{2\pi} \Delta(\text{Log } r),$$

où  $D$  et  $C$  sont des constantes et  $H$  une fonction  $C^\infty$ . Par ailleurs, l'expression du Laplacien en coordonnées polaires autour de  $y_0$  pour une fonction ne dépendant que de la distance est :

$$\Delta_0 = -\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}(1+g(x))\frac{d}{dr}\right) = \Delta_E - \frac{1}{r}g(x)\frac{d}{dr},$$

où  $\Delta_E$  désigne le Laplacien euclidien en coordonnées polaires et  $g$  une fonction  $C^\infty$  telle que (cf. [K], p. 81-83) :

$$g(x) = Nr^2 + r^3 L(x) \quad L \text{ est } C^\infty \text{ et } N \text{ une constante;}$$

en conséquence,

$$-\frac{1}{2\pi} \Delta(\text{Log } r) = \delta_0 + h(r), \quad h \in H^1(M).$$

La fonction  $\text{Log } r$  étant dans  $H^s(M)$  pour tout  $s < 1$  :

$$(\Delta - \alpha) F \in H^s(M), \quad s < 1.$$

Par définition de la résolvante  $(R(\alpha; \cdot, y_0) = (\Delta - \alpha)^{-1}(\delta_{y_0}))$  et le fait que l'application  $\alpha \mapsto (\Delta - \alpha)^{-1}$  est méromorphe en  $\alpha$  à valeurs dans les opérateurs de  $H^s$  dans  $H^{s+2}$  pour tout  $s$ , on a :

$$\alpha \mapsto F(\alpha; \cdot, y_0)$$

est méromorphe en  $\alpha$  à valeurs dans  $H^{2+s}(M)$  pour  $s < 1$ . Il est aisé de vérifier que cette application est en fait analytique au voisinage de  $\alpha = \lambda$ .

Enfin l'injection  $H^{2+s}(M) \hookrightarrow C^1(M)$  permet de conclure.

*Convergence des  $\lambda_i(\varepsilon)$ .* — Dans ce qui suit  $\lambda$  désignera une valeur propre simple du problème (1) et  $\lambda(\varepsilon)$  la valeur propre correspondante de (2) pour  $\varepsilon$  assez petit.

Nous allons construire une fonction :

$$f_\varepsilon(x) = R(\alpha(\varepsilon); x, w),$$

en sorte que par un choix convenable de  $\alpha(\varepsilon)$ , elle soit « très petite » sur le bord de  $B(\varepsilon)$ .

Soit  $\varphi$  une fonction propre normée correspondant à  $\lambda$ . Supposons d'abord que  $\varphi(w) \neq 0$ . Soit  $\alpha(\varepsilon)$  la solution de l'équation implicite

$$-\frac{1}{2\pi} \text{Log } \varepsilon + \frac{|\varphi(w)|^2}{\lambda - \alpha(\varepsilon)} + F(\alpha(\varepsilon); w, w) = 0; \quad \alpha(0) = \lambda.$$

La fonction  $F$  étant analytique en  $\alpha$ , par le résultat classique d'existence de la série réciproque, il existe une série entière  $\sum_{n \geq 1} a_n Z^n$  de rayon de convergence non nul, telle que :

$$\begin{aligned} \lambda - \alpha(\varepsilon) &= \sum_{n \geq 1} a_n (-\text{Log } \varepsilon)^{-n} \quad \varepsilon \text{ assez petit,} \\ a_1 &= +2\pi |\varphi(w)|^2 \quad (\text{comparer avec [O4]}). \end{aligned}$$

La fonction  $f_\varepsilon$  ainsi définie vérifie :

$$\begin{cases} (\Delta - \alpha(\varepsilon)) f_\varepsilon \equiv 0 & \text{sur } M_\varepsilon, \\ f_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = R(\alpha(\varepsilon); \cdot, w) \end{cases}$$

pour  $x$  sur le bord de  $B_\varepsilon$ .

$$R(\alpha(\varepsilon); x, w) = \frac{(\varphi(x) - \varphi(w)) \overline{\varphi(w)}}{\lambda - \alpha(\varepsilon)} + F(\alpha(\varepsilon); x, w) - F(\alpha(\varepsilon); w, w),$$

or  $\varphi$  et  $F$  étant  $C^1$  :

$$\varphi(x) - \varphi(w) = O(\varepsilon),$$

$$F(\alpha(\varepsilon); x, w) - F(\alpha(\varepsilon); w, w) = O(\varepsilon).$$

D'où :

$$\begin{cases} f_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = O(\varepsilon |\log \varepsilon|), \\ (\Delta - \alpha(\varepsilon)) f_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } M_\varepsilon, \\ f_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = O(\varepsilon |\log \varepsilon|), \end{cases}$$

ce qui suggère que  $\alpha(\varepsilon)$  est « presque » une valeur propre de (2).

Soit  $u_\varepsilon$  la fonction harmonique sur  $M_\varepsilon$  vérifiant les conditions au bord de  $M$  et égale à  $f_\varepsilon$  sur  $\partial B_\varepsilon$ . Alors  $u_\varepsilon$  atteignant son maximum sur  $\partial B_\varepsilon$  :

$$\forall x \in M_\varepsilon, \quad u_\varepsilon(x) = O(\varepsilon |\log \varepsilon|)$$

(pour l'existence de  $u_\varepsilon$  dans le cadre des variétés riemanniennes cf. [A].)

Posons

$$h_\varepsilon = f_\varepsilon - u_\varepsilon,$$

qui vérifie l'équation

$$\begin{cases} (\Delta - \alpha(\varepsilon)) h_\varepsilon = \alpha(\varepsilon) u_\varepsilon = O(\varepsilon |\log \varepsilon|) \quad \text{sur } M_\varepsilon, \\ h_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} \equiv 0, \end{cases}$$

pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\alpha(\varepsilon)$  est proche de  $\lambda$ ; la valeur propre de (2) la plus proche de  $\alpha(\varepsilon)$  est donc  $\lambda(\varepsilon)$ .

Si  $\alpha(\varepsilon)$  n'est pas égale à  $\lambda(\varepsilon)$ , l'opérateur  $(\Delta - \alpha(\varepsilon))^{-1}$  compact auto-adjoint est tel que sa norme soit égale à son rayon spectral qui est donc  $1/|\lambda(\varepsilon) - \alpha(\varepsilon)|$ , d'où :

$$|\lambda(\varepsilon) - \alpha(\varepsilon)| \leq \frac{\|u_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)}}{\|h_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)}}.$$

Or,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)} = O(\varepsilon |\log \varepsilon|),$$

$$\|h_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)} \geq C |\log \varepsilon| \quad (C \text{ est une constante}).$$

Cette dernière inégalité résultant du comportement (singulier) de la fonction de Green près de la diagonale. Donc

$$\lambda(\varepsilon) - \alpha(\varepsilon) = O(\varepsilon)$$

et

$$\lambda(\varepsilon) - \lambda = \sum_{n \geq 1} a_n (-\text{Log } \varepsilon)^{-n} + O(\varepsilon).$$

Si  $\varphi(w) = 0$ , le même raisonnement avec comme fonction propre approchée  $\varphi$  elle-même et  $\alpha(\varepsilon) = \lambda$  donne

$$\lambda(\varepsilon) - \lambda = O(\varepsilon),$$

toutefois chaque terme  $a_n$  contenant  $|\varphi(w)|^2$  l'expression ci-dessus reste valable. On a donc la :

**PROPOSITION 1.2.** — *Si  $\dim M = 2$  et si  $\lambda$  est une valeur propre simple du problème (1)*

$$\lambda(\varepsilon) - \lambda = \sum_{n \geq 1} a_n (-\text{Log } \varepsilon)^{-n} + O(\varepsilon)$$

*pour  $\varepsilon$  petit, où la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  dépendant de  $\lambda$  a un rayon de convergence non nul.*

## 2. Cas des dimensions 3 et 4

La méthode utilisée dans le paragraphe précédent s'applique également en dimension 3 ou 4.

Dans ce qui suit, les hypothèses seront les mêmes que dans la section précédente. On obtient les résultats suivants :

**PROPOSITION 2.1.** — *Sous les hypothèses considérées et avec les notations de 1 :*

(i) *si  $n = 3$ ,  $\lambda(\varepsilon) - \lambda = -4\pi |\varphi(w)|^2 \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ ;*

(ii) *si  $n = 4$ ,  $\lambda(\varepsilon) - \lambda = -2\omega_3 |\varphi(w)|^2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3 |\text{Log } \varepsilon|^{1/2})$  où  $\omega_3 = \text{Vol}(S^3)$ .*

Remarquons que la partie (i) de la proposition est obtenue dans [O6], mais que le résultat démontré dans [O5] en dimension 4 fait apparaître un reste en  $O(\varepsilon^{5/2})$ .

La démonstration de ces résultats est essentiellement la même que celle de 1.2, elle nécessite toutefois quelques arguments techniques supplémentaires.

*Preuve de (i).* — On utilise la description suivante de  $R(\alpha; x, y)$  en dimension 3

$$R(\alpha; x, y) = \frac{-1}{4\pi r} + \frac{\overline{\varphi(x)\varphi(y)}}{\lambda - \alpha} + F(\alpha; x, y).$$

Le même raisonnement que précédemment permet de montrer que  $F(\cdot, \cdot, y_0)$  est continue en  $(\alpha, x)$  au voisinage de  $(\lambda, y_0)$  pour tout  $y_0$  dans  $M$  et analytique en  $\alpha$ .

Si  $|\varphi(w)|^2 \neq 0$  on définit  $\alpha(\varepsilon)$  par l'équation implicite

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon} + \frac{|\varphi(w)|^2}{\lambda - \alpha(\varepsilon)} + F(\alpha(\varepsilon); w, w) = 0.$$

La fonction  $f_\varepsilon$  vérifie donc

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta - \alpha(\varepsilon)) f_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } M_\varepsilon \\ f_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = O(1), \\ \text{condition au bord } \partial M \end{array} \right.$$

on définit alors  $u_\varepsilon$  par l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + 1) u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } M_\varepsilon \\ u_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = f_\varepsilon, \\ \text{condition au bord de } M. \end{array} \right.$$

On a par ailleurs le :

LEMME 2.2. — Si  $v_\varepsilon$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \Delta) v_\varepsilon = 0, \\ v_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = 1, \\ \text{condition sur } \partial M, \end{array} \right.$$

alors :

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)} = O(\varepsilon).$$

D'où :

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)} = O(\varepsilon).$$



La démonstration se poursuit alors comme dans 1

$$|\lambda(\varepsilon) - \alpha(\varepsilon)| \leq \frac{\|u_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)}}{\|h_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)}} \quad \text{et} \quad \|h_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)} \geq c/\varepsilon.$$

*Preuve du lemme.* — Il suffit de montrer qu'il existe une constante  $D$  strictement positive telle que pour tout  $x$  dans  $M$

$$|v_\varepsilon(x)| \leq D \frac{\varepsilon}{r},$$

où  $r$  est la distance de  $x$  à  $w$ .

Or, si  $G$  désigne la fonction de Green sur  $M$  (cf. [A], chap. 4) alors :

$$|G(x, w)| \leq \frac{A}{r}.$$

Une démonstration analogue permettrait de montrer que

$$|R(-1; x, w)| \leq \frac{B}{r}$$

(on peut aussi remarquer que  $R(-1; x, w) + (1/4\pi r)$  est continue sur  $M$ ).

Par ailleurs,

$$R(-1; x, w) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{4\pi r}$$

donc

$$w_\varepsilon(x)|_{\partial B_\varepsilon} = -8\pi\varepsilon R(-1; x, w) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2$$

et par conséquent pour  $\varepsilon$  assez petit  $w_\varepsilon(x)|_{\partial B_\varepsilon} \geq 1$  et vérifie l'équation

$$(\Delta + 1)w_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } M_\varepsilon.$$

Par le principe du maximum

$$0 \leq v_\varepsilon(x) \leq w_\varepsilon(x) \quad \text{pour tout } x \text{ dans } M_\varepsilon,$$

d'où le résultat.

Le cas  $\varphi(w) = 0$  se traite comme précédemment.

*Preuve de (ii).* — Résumons les étapes :

$$R(\alpha; x, y) = -\frac{1}{2\omega_3 r^2} + \frac{\varphi(x)\overline{\varphi(y)}}{\lambda - \alpha} + F(\alpha; x, y).$$

Une démonstration analogue à celle donnée dans [A], p. 106-114 montre que :

$$|R(\alpha; x, y)| \leq k_\alpha r^{-2}, \quad r = \text{distance de } x \text{ à } y, \quad k_\alpha \text{ Cte.}$$

De plus,

$$|(\Delta - \alpha) F(\alpha; \cdot, y_0)| \leq \frac{C}{r^2}$$

d'où en appliquant la proposition 4.12 de [A], p. 107-108, on obtient :

$$F(\alpha; x, y_0) = \int_M R(\alpha; x, z) F(\alpha; z, y_0) dz,$$

$$|F(\alpha; x, y_0)| \leq C' (1 + |\text{Log}(d(x, y_0))|).$$

Donc :

$$R(\alpha; x, w) = -\frac{1}{2\omega_3 r^2} + \frac{\varphi(x)\overline{\varphi(w)}}{\lambda - \alpha} + \frac{G(\alpha; x, w)}{r},$$

où  $G$  est continue en  $(\alpha, x)$  au voisinage de  $(\lambda, w)$  et analytique en  $\alpha$ .

On définit alors  $\alpha(\varepsilon)$  par l'équation implicite

$$-\frac{1}{2\omega_3 \varepsilon^2} + \frac{|\varphi(w)|^2}{\lambda - \alpha(\varepsilon)} + \frac{G(\alpha(\varepsilon); w, w)}{\varepsilon} = 0.$$

La fonction  $f_\varepsilon$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta - \alpha(\varepsilon)) f_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } M_\varepsilon \\ f_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = O(1/\varepsilon) \\ \text{condition sur } \partial M. \end{array} \right.$$

On conclut alors en utilisant le lemme suivant :

LEMME 2.3. — Si  $v_\varepsilon$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \Delta) v_\varepsilon = 0, \\ v_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon} = 1 \quad \text{alors} \quad \|v_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)} = O(\varepsilon^2 |\text{Log } \varepsilon|^{1/2}). \\ \text{condition sur } \partial M. \end{array} \right.$$

### 3. Cas d'un nombre fini de points

Dans les mêmes conditions que précédemment, on suppose donné un nombre fini de points sur  $M$  deux à deux distincts,  $(w_i)_{i=1, \dots, k}$  et on considère la variété à bords  $M_\varepsilon = M \setminus \bigcup B_i(\varepsilon)$  où  $B_i(\varepsilon)$  est la boule de rayon  $\varepsilon$  autour de  $w_i$ , le nombre  $\varepsilon$  étant supposé suffisamment petit en sorte que les boules  $B_i(\varepsilon)$  soient deux à deux disjointes.

Le problème traité est donc celui de la convergence des valeurs propres du Laplacien sur  $M_\varepsilon$  avec conditions de Dirichlet sur le bord des boules  $B_i$  vers celles de  $M$  (avec condition aux bords de  $M$  s'il y a lieu).

Les résultats sont analogues à ceux des propositions 1.1 et 2.1 à condition de remplacer  $|\varphi(w)|^2$  par  $\sum_{i=1}^k |\varphi(w_i)|^2$  (avec les mêmes notations et hypothèses).

La méthode de démonstration est la même que précédemment : on cherche une « presque » fonction propre sous la forme

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^k a_i(\varepsilon) R(\alpha(\varepsilon); x, w_i) \quad \text{pour } x \in M_\varepsilon.$$

En choisissant  $a_i(\varepsilon)$  en sorte que la partie principale de  $f_\varepsilon$  au voisinage de chaque  $w_j$  soit nulle on construit une fonction telle que

$$\begin{cases} (\Delta - \alpha(\varepsilon)) f_\varepsilon \equiv 0 & \text{sur } M_\varepsilon, \\ f_\varepsilon|_{\partial B_i} = O(\varepsilon \cdot G_d(\varepsilon)), \end{cases}$$

où  $G_d(\cdot)$  est le noyau de Green de  $\mathbb{R}^d$  ( $d=2, 3$  ou  $4$ ); la fin de la démonstration est alors la même que précédemment. La condition sur les  $a_i(\varepsilon)$  est donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1, i \neq j}^k a_i(\varepsilon) R(\alpha(\varepsilon); w_i, w_j) \\ + a_j(\varepsilon) \left( G_d(\varepsilon) + \frac{|\varphi(w_j)|^2}{\lambda - \alpha(\varepsilon)} + F(\alpha(\varepsilon); w_j, w_j) \right) = 0, \end{aligned}$$

pour tout  $j$  ( $1 \leq j \leq k$ ).

Ce système de  $k$  équations à  $k$  inconnues  $(a_i(\varepsilon))$  n'admet de solution non triviale que si son déterminant est nul.

L'équation

$$\det(b_{ij}(\varepsilon)) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} b_{ij}(\varepsilon) &= R(\alpha(\varepsilon); w_i, w_j) \quad \text{si } i \neq j, \\ b_{ii}(\varepsilon) &= G_d(\varepsilon) + \frac{|\varphi(w_i)|^2}{\lambda - \alpha(\varepsilon)} + F(\alpha(\varepsilon); w_i, w_i), \end{aligned}$$

détermine  $\lambda - \alpha(\varepsilon)$  analytiquement en  $[G_d(\varepsilon)]^{-1}$  pour  $\varepsilon$  assez petit.

De plus on vérifie que :

- (i)  $\lambda - \alpha(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^k |\varphi(w_i)|^2 / G_d(\varepsilon) + O([G_d(\varepsilon)]^{-2})$ ,
  - (ii) les  $a_i(\varepsilon)$  peuvent être choisis bornés en  $\varepsilon$  lorsque celui-ci tend vers zéro,
- d'où le résultat.

#### 4. Cas d'une sous-variété de codimension 2

Soit  $Y$  une sous-variété fermée (éventuellement non connexe) de  $M$ , ne rencontrant pas le bord de  $M$ , lorsque celui-ci existe, et définissons la variété  $M_\varepsilon = M \setminus T_\varepsilon$  où  $T_\varepsilon$  est un voisinage tubulaire d'épaisseur  $\varepsilon$  (assez petit) de  $Y$ .

On s'intéresse donc à la convergence du spectre du Laplacien sur  $M_\varepsilon$  avec condition de Dirichlet au bord de  $T_\varepsilon$ , vers celui de  $M$ .

On se propose de montrer :

THÉORÈME 4. 1. — *Si  $Y$  est de codimension 2 et si  $\lambda$  est une valeur propre simple de  $M$ ,*

- (i)  $\lambda(\varepsilon) - \lambda$  admet un développement asymptotique au voisinage de  $\varepsilon = 0$ , en  $|\text{Log } \varepsilon|^{-k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), à tout ordre. De plus, le premier terme est :

$$- \frac{(n-2)\omega_{n-1}}{\omega_{n-3}} \cdot \frac{1}{\text{Log } \varepsilon} \int_Y |\varphi(y)|^2 dv(y),$$

où  $\varphi$  est une fonction propre normalisée associée à la valeur propre  $\lambda$  et  $\omega_m = \text{vol}(S^{m-1})$ .

- (ii) Si  $\varphi$  est identiquement nulle sur  $Y$ , alors :

$$\lambda(\varepsilon) - \lambda = O(\varepsilon).$$

Remarques. — Si le bord de  $M$  n'est pas vide, les conditions de Dirichlet ou Neumann sont imposées sur celui-ci. Il n'en sera pas fait mention par la suite.

La technique de démonstration est rigoureusement la même que précédemment. Elle nécessite une description de la singularité du noyau résolvant.

LEMME 4.2 [D]. — Si  $\alpha$  n'appartient pas au spectre de  $M$  et  $(x, y)$  sont des points de  $M$ , alors :

$$R(\alpha; x, y) = \frac{C_n}{d^{n-2}(x, y)} + \sum \frac{\varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}}{\lambda - \alpha} + \frac{F(\alpha; x, y)}{d^{n-3}(x, y)},$$

où  $C_n = 1/(n-2)\omega_{n-1}$ ,  $d(x, y)$  est la distance entre  $x$  et  $y$  dans  $M$ ,  $\lambda$  une valeur propre du Laplacien de  $M$  et  $(\varphi_i)$  une base  $L^2$ -orthonormée de l'espace propre correspondant.

De plus  $F$  vérifie

- (i)  $F(\alpha; \cdot, \cdot)$  est  $C^\infty$  sur  $M \times M \setminus \{\text{diagonale}\}$ .
- (ii)  $F(\alpha; \cdot, \cdot)$  est continue au voisinage de la diagonale.
- (iii)  $F$  est analytique en  $\alpha$  au voisinage de  $\lambda$ , à valeurs dans les fonctions continues sur  $M \times M$ .

Preuve. — Une démonstration de ce lemme est donnée dans [D] utilisant le développement asymptotique de Minakshisundaram-Pleijel; nous en esquissons ici une autre utilisant la technique de la preuve de la proposition 4.1.2 [A], p. 107-108.

Le premier terme résulte de la construction de  $R$ , posons

$$R(\alpha; x, y) - \frac{C_n}{d^{n-2}(x, y)} = H(\alpha; x, y).$$

$(\Delta - \alpha)[H(\alpha; \cdot, y)] = O(d^{2-n}(x, y))$  lorsque  $x$  tend vers  $y$  d'où

$$H(\alpha; x, y) = \int_M R(\alpha; x, z)[(\Delta - \alpha)(H(\alpha; z, y))] dz$$

et par le résultat mentionné ci-dessus

$$H(\alpha; x, y) = \begin{cases} O(d^{4-n}(x, y)) & \text{si } n > 4, \\ O(1 + |\text{Log}(d(x, y))|) & \text{si } n = 4, \\ O(1) & \text{si } n = 3, \end{cases}$$

d'où le comportement annoncé pour  $n \geq 4$ . En dimension 3, la continuité résulte de l'étude de

$$\int_M \frac{1}{d(x, z)} \times \frac{1}{d(z, y)} dz.$$

La mémoromorphie en  $\alpha$  provient de résultats classiques sur la résolvante ([R-S]).

Soit alors  $h$  une fonction de  $C^\infty(Y)$  et  $x \in M \setminus Y$ , posons

$$\begin{aligned} T(h)(x) &= \int_Y R(\alpha; x, y) h(y) dv(y), \\ T(h)(x) &= C_n \int_Y \frac{h(y)}{d^{n-2}(x, y)} dv(y) + \frac{\varphi(x)}{\lambda - \alpha} \int_Y \bar{\varphi}(y) h(y) dv(y) \\ &\quad + \dots + \int_Y \frac{h(y) F(\alpha; x, y)}{d^{n-3}(x, y)} dv(y), \\ T(h) &= G(h) + \frac{1}{\lambda - \alpha} P(h) + T_\alpha(h). \end{aligned}$$

On supposera que  $x$  tend vers un point  $y_0$  de  $Y$  le long d'une géodésique normale à  $Y$  en  $y_0$ .

Alors si  $r = d(x, y_0)$ .

LEMME 4.3. — On a

- (i)  $(\Delta - \alpha) T = 0$  sur  $M \setminus Y$ .
- (ii)  $T(h)(x) = -(\omega_{n-3}/(n-2) \omega_{n-1} \text{Log } r) h(y_0) + O(1)$ .

*Preuve.* — (a) Par continuité de  $\varphi$ ,  $P(h)(x)$  converge vers  $P(h)(y_0)$ .

(b) La fonction  $1/[d(y, z)]^{n-3}$  étant intégrable sur  $Y$  et  $F$  continue

$$\int_Y \frac{h(y) F(\alpha; x, y) dv(y)}{d^{n-3}(x, y)} \xrightarrow{x \rightarrow y_0} \int_Y \frac{h(y) F(\alpha; y_0, y)}{d^{n-3}(y_0, y)} dv(y).$$

(c) On a l'égalité,

$$\int_Y \frac{h(y)}{d^{n-2}(x, y)} dv(y) = \int_Y \frac{h(y) - h(y_0)}{d^{n-2}(x, y)} dv(y) + h(y_0) \int_Y \frac{dv(y)}{d^{n-2}(x, y)},$$

comme dans le cas précédent

$$\int_Y \frac{h(y) - h(y_0)}{(d(x, y))^{n-2}} dv(y) \xrightarrow{x \rightarrow y_0} \int_Y \frac{h(y) - h(y_0)}{(d(y_0, y))^{n-2}} dv(y).$$

La fonction  $(h(y) - h(y_0))/(d(y_0, y))^{n-2}$  étant clairement intégrable sur  $Y$ , il suffit donc d'étudier la quantité :

$$\int_Y \frac{dv(y)}{[d(x, y)]^{n-2}},$$

posons  $r = d(x, y_0)$  et montrons que

$$\int_Y \left( \frac{1}{[d(x, y)]^{n-2}} - \frac{1}{[r^2 + d^2(y_0, y)]^{(n-2)/2}} \right) dv(y) = O(1) \quad \text{lorsque } r \rightarrow 0.$$

En effet

$$\left| \int_{d_0 \leq 10r} \left( \frac{1}{d^{n-2}} - \frac{1}{d_1^{n-2}} \right) dv(y) \right| = \left| \int_{d_0 \leq 10r} \left[ \left( \frac{d_1}{d} \right)^{n-2} - 1 \right] \frac{dv(y)}{d_1^{n-2}} \right| = I$$

où  $d = d(x, y)$ ,  $d_0 = d(y_0, y)$  et  $d_1 = (r^2 + d_0^2)^{1/2}$ .

$$I \leq \int_{d_0 \leq 10r} \left[ \left( \frac{d_1}{d} \right)^{n-2} + 1 \right] \frac{dv(y)}{d_1^{n-2}}$$

or  $d \geq r \geq 1/10 d_0$ , d'où

$$I \leq \frac{(101)^{(n-2)/2} + 1}{r^{n-2}} \text{Vol}(d_0 \leq 10r) = O(1),$$

la variété  $Y$  étant de dimension  $n-2$ .

Par ailleurs

$$J = \left| \int_{d_0 \geq 10r} \left( \frac{1}{d^{n-2}} - \frac{1}{d_1^{n-2}} \right) dv(y) \right| \leq \int_{d_0 \geq 10r} \frac{|d^{n-2} - d_1^{n-2}|}{d^{n-2} d_1^{n-2}} dv(y),$$

$$J \leq \int_{d_0 \geq 10r} \frac{|d - d_1|}{d^{n-2} d_1^{n-2}} \left( \sum_{p=3}^{n-3} d^{n-p} d_1^{p-3} \right) dv(y).$$

Or par l'inégalité triangulaire

$$\frac{q}{10} d_0 \leq d_0 - r \leq d \leq d_0 + r \leq \left( \frac{11}{10} \right) d_0,$$

$$d_0 \leq d_1 \leq \left( \frac{1}{100} + 1 \right)^{1/2} d_0$$

et

$$d - d_1 \leq r, \quad d_1 - d \leq d_1 - d_0 + r \leq 2r,$$

d'où

$$J \leq \text{Cte.} \cdot r \int_{d_0 \geq 10r} \frac{1}{d_0^{n-1}} dv(y)$$

et il est aisé de vérifier que

$$\int_{d_0 \geq 10r} \frac{1}{d_0^{n-1}} dv(y) = O(1/r).$$

Enfin, si  $d_Y(y, z)$  désigne la distance entre deux points  $y$  et  $z$  de  $Y$  associée à la structure riemannienne de  $Y$ , on a :

$$\frac{d^2(y, z)}{d_Y^2(y, z)} = 1 + O(d_Y(y, z)) \quad (\text{cf. [D]})$$

ce qui conduit à

$$\int_Y \left| \left[ \frac{1}{(d(y_0, y))^{n-2}} - \frac{1}{(d_Y(y_0, y))^{n-2}} \right] \right| dv(y) < +\infty.$$

En résumé, il suffit d'étudier la quantité

$$\int_Y \frac{1}{(r^2 + d_Y^2(y_0, y))^{(n-2)/2}} dy$$

où si  $B_Y(\delta)$  désigne la boule géodésique de  $Y$  centrée en  $y_0$  et de rayon  $\delta$  (assez petit)

$$\int_{B_Y(\delta)} \frac{1}{(r^2 + d_Y^2(y_0, y))^{(n-2)/2}} dv(y)$$

l'utilisation de la carte exponentielle sur  $Y$ , en  $y_0$  permet de ramener ce calcul à son analogue euclidien, ce qui conduit au résultat annoncé.

L'estimation du lemme 4.3 permet d'appliquer le théorème 3.4 de [M-N-P], que nous rappelons ici :

**THÉOREME 4.4 ([M-N-P]).** — *Avec les notations précédentes, on a la représentation asymptotique suivante*

$$T(h)(x) = - \left( \frac{\omega_{n-3}}{(n-2)\omega_{n-1}} \right) h(y_0) \text{Log}(r) + \Lambda_s(h)(y_0) + O(r^2)$$



pour tout  $s \in (0, 1)$ , et  $r$  suffisamment petit. Dans cette expression  $\Lambda$  est une application linéaire de  $C^\infty(Y)$  dans lui-même.

*Remarque 1.* — Pour des raisons de simplicité la preuve du théorème précédent dans [M-N-P] n'est donnée que sous les hypothèses supplémentaires suivantes :

- (i)  $M$  est un ouvert relativement compacte de  $\mathbb{R}^n$ ;
- (ii) l'opérateur considéré vérifie l'inégalité de Garding sur  $M$ ;
- (iii)  $Y$  est difféomorphe à une sphère de dimension  $n-2$ .

Ces hypothèses sont clairement superflues. On peut toutefois ramener la situation qui nous intéresse à celle-ci :

(a) on peut recouvrir  $Y$  par un nombre fini d'ouvert du type  $Y \cap B(\delta)$  ou  $B(\delta)$  est une boule de  $M$ , centrée en un point de  $Y$  et de rayon  $\delta$  (petit);

(b) en utilisant une partition de l'unité adaptée, on peut supposer que  $h$  est à support dans une boule  $B_Y(\delta')$  de  $Y$ , centrée au même point que  $B(\delta)$  et de rayon  $\delta' < \delta$ ;

(c) de plus  $\delta$  peut être choisi assez petit de sorte que  $(\Delta - \alpha)$  (avec condition de Dirichlet sur  $\partial B(\delta)$ ) vérifie la condition (ii) sur  $B(\delta)$ ;

(d) si

$$T'(h)(x) = \int_{B_Y(\delta')} R'(\alpha; x, y) dv(y)$$

où  $R'$  est la résolvante du Laplacien avec condition de Dirichlet sur le bord, sur  $B(\delta)$ , alors

$$U(h)(x) = T(h)(x) - T'(h)(x)$$

vérifie :

$$(\Delta - \alpha)U(h) = 0 \quad \text{sur } B(\delta)$$

$U(h)$  est donc une fonction  $C^\infty$  sur  $B(\delta)$  et

$$U(h)(x) = U(h)(y_0) + O(r) \quad \text{si } y_0 \in B_Y(\delta')$$

$U$  dépend linéairement de  $h$ . Il suffit donc de prouver l'estimation asymptotique pour  $T'(h)$ ;

(e) La carte exponentielle à partir du centre de  $B(\delta)$  permet de se ramener au cas où  $M$  est une boule de  $\mathbb{R}^n$  et  $Y$  un ouvert d'une sous-variété. Un argument analogue permet d'appliquer 4.4 à cette situation.

*Remarque 2.* — Pour la suite de la démonstration, il est nécessaire d'explicitier le comportement de l'expression  $O(r^s)$  en  $\alpha$  et  $h$ .

Ce terme provient des développements  $G(h)$ ,  $P(h)$  et  $T_\alpha(h)$ , or

(a) on a  $P(h)(x) \xrightarrow{x \rightarrow y_0} P(h)(y_0)$  uniformément pour  $h$  dans un borné de

$C^0(Y)$ ;

(b) De même  $T_\alpha(h)(x) \xrightarrow{x \rightarrow y_0} T_\alpha(h)(y_0)$ , une démonstration en tout point

analogue à celle du (c) de la preuve du lemme 4.3, montre que  $T_\alpha(h)(x) - T_\alpha(h)(y_0)$  converge vers 0, uniformément pour  $h$  borné dans  $C^0(Y)$  et  $\alpha$  proche de  $\lambda$ ;

(c) enfin l'expression  $\int_Y (h(y) - h(y_0)) dv(y) / (d(x, y))^{n-2}$  converge, pour les mêmes raisons, uniformément pour  $h$  dans un borné de  $C^1(Y)$ .

*Fin de la preuve de 4.1.* — Posons

$$A = -\frac{\omega_{n-3}}{(n-2)\omega_{n-1}}, \quad B_\alpha = -\frac{1}{\lambda - \alpha} P + \Lambda_\alpha$$

$$\gamma = \lambda - \alpha \quad \text{et} \quad U_\gamma = P + (\lambda - \alpha) B_\alpha.$$

Alors 4.4 devient

$$T(h)(x) = (A \operatorname{Log} r) h(y_0) + \frac{1}{\gamma} U_\gamma(h)(y_0) + O(r^s).$$

Comme précédemment on va chercher à annuler le terme principal de ce développement. La remarque 2 précédente montre que  $U_\gamma$  (dont on peut préciser l'expression) est analytique en  $\gamma$ . Soit

$$U_\gamma = \sum_{\gamma \geq 0} \gamma^n U_n, \quad U_0 = P,$$

où chaque  $U_n$  est une application linéaire de  $C^\infty(Y)$  dans lui-même.

Soit  $\Phi(\gamma) = \sum_{\gamma \geq 0} \gamma^n \Phi_n$  et  $\mu(\gamma) = \sum_{\gamma \geq 0} \gamma^n \mu_n$  des séries formelles à coefficients dans  $C^\infty(Y)$  pour  $\Phi$  et dans  $\mathbb{R}$  pour  $\mu$ .

LEMME 4.5. — L'équation suivante est résoluble (formellement) :

$$U_\gamma(\Phi(\gamma)) = \mu(\gamma) \Phi(\gamma),$$

avec,

$$\Phi_0 = \varphi|_Y \quad \text{et} \quad \mu_0 = \int_Y |\varphi(y)|^2 dv(y).$$

*Preuve.* — Identifions les coefficients de  $\gamma^n$ , il faut donc résoudre :

$$\sum_{k+l=n} U_k(\Phi_l) = \sum_{m+p=n} \mu_m \Phi_p$$

où

$$(P - \mu_0)(\Phi_n) = \sum_{m+p=n, m \neq 0} \mu_m \Phi_p - \sum_{k+l=n, k \neq 0} U_k(\Phi_l)$$

(a) le cas  $n=0$  donne

$$P(\Phi_0) = \mu_0 \Phi_0$$

si  $\Phi_0 = \varphi$  et  $\mu_0 = \int_Y |\varphi(y)|^2 dv(y)$  l'égalité est vérifiée;

(b) cas  $n=1$ , l'égalité devient  $(P - \mu_0)\Phi_1 = \mu_1 \Phi_0 - U_1(\Phi_0)$ . L'opérateur  $(P - \mu_0)$  est, sur l'orthogonale à  $\varphi|_Y$  dans  $L^2(Y)$ , la multiplication par  $-\mu_0$  (qui est non nul) et donc bijectif. La condition

$$\mu_1 \Phi_0 - U_1(\Phi_0) \text{ orthogonale à } \Phi_0,$$

détermine  $\mu_1$  et permet de calculer  $\Phi_1$  vérifiant l'équation ci-dessus. Par ailleurs,  $U_1(\Phi_0)$  étant  $C^\infty$ , il en est de même de  $\Phi_1$ ;

(c) le cas général s'en déduit par un procédé de récurrence.

Supposons alors que  $\varphi|_Y$  n'est pas identiquement nulle.

Si

$$v_N(\gamma) = \sum_{n=0}^N \mu_n \gamma^n, \quad \psi_N(\gamma) = \sum_{n=0}^N \Phi_n \gamma^n$$

on a donc

$$U_\gamma(\psi_N(\gamma)) = v_N(\gamma) \psi_N(\gamma) + O(\gamma^{N+1}).$$

Par ailleurs, l'équation implicite

$$v_N(\gamma) + \gamma A \operatorname{Log} \varepsilon = 0,$$

détermine une fonction analytique  $L_N$  telle que

$$\gamma(\varepsilon) = L_N\left(-\frac{1}{\operatorname{Log} \varepsilon}\right), \quad \gamma(0) = 0,$$

vérifie cette équation. De plus,

$$\gamma(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\mu_0}{A \operatorname{Log} \varepsilon}.$$

Alors la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \int_Y R(\alpha(\varepsilon); x, y) \psi_N(\gamma(\varepsilon)) dv(y) \quad (\lambda - \alpha(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon)),$$

vérifie

$$(\Delta - \alpha(\varepsilon)) f_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } M_\varepsilon,$$

$$f_\varepsilon|_{\partial T_\varepsilon} = (A \log \varepsilon) \psi_N(\gamma(\varepsilon)) + \frac{1}{\gamma(\varepsilon)} U_{\gamma(\varepsilon)}(\psi_N(\gamma(\varepsilon))) + O(\varepsilon^2),$$

car  $\psi_N(\gamma(\varepsilon))$  est dans un borné de  $C^1$  pour  $\varepsilon$  assez petit et  $\gamma(\varepsilon)$  est proche de zéro.

$$f_\varepsilon|_{\partial T_\varepsilon} = (A \log \varepsilon) \psi_N(\gamma(\varepsilon)) + \frac{1}{\gamma(\varepsilon)} v_N(\gamma(\varepsilon)) \psi_N(\gamma(\varepsilon)) + O(|\log \varepsilon|^{-N})$$

car  $\gamma(\varepsilon) = O(|\log \varepsilon|^{-N})$ .

Si  $\lambda(\varepsilon)$  est la valeur propre du Laplacien (avec condition de Dirichlet sur  $\partial T_\varepsilon$ ) sur  $M_\varepsilon$ , la plus proche de  $\lambda$  (elle existe et est unique si  $\varepsilon$  est assez petit), alors un argument analogue à celui utilisé au paragraphe 1 donne :

$$|\lambda(\varepsilon) - \alpha(\varepsilon)| = O(|\log \varepsilon|^{-(N+1)}).$$

Le théorème s'en déduit donc en négligeant les termes non significatifs dans l'expression

$$\lambda(\varepsilon) - \lambda = -L_N \left( \frac{-1}{\log \varepsilon} \right) + O(|\log \varepsilon|^{-(N+1)}).$$

Le cas où  $\varphi|_Y \equiv 0$  se traite comme précédemment.

## 5. Conclusion

La faiblesse de la méthode apparaît dans l'impossibilité de traiter le cas des valeurs propres multiples ainsi que celui des dimensions plus grandes. Il est toutefois intéressant de noter que le comportement obtenu dans [B-G] pour la première valeur propre ( $\lambda_1 = 0$  si  $M$  est compacte sans bord) mais en toute dimension permet d'espérer des résultats analogues de manière générale.

Les coefficients de  $|\operatorname{Log} \varepsilon|^{-k}$  apparaissant dans la proposition 1.1 et le théorème 4.1 ont probablement une signification géométrique que l'auteur n'a pas pu dégager avec précision. Les remarques à propos de la fonction  $F$  figurant dans [CV] concernent le cas de la sphère  $S^3$ , où les valeurs propres du Laplacien sont toutes multiples.

## BIBLIOGRAPHIE

- [A] AUBIN (T.), Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère equations, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 252, Springer-Verlag.
- [B-G] BÉRARD (P.) et GALLOT (S.), *C. R. Acad. Sc.*, t. 297, n° 3, p. 185-188.
- [CV] COLIN DE VERDIÈRE (Y.), Pseudo-Laplacien I. *Annales de l'Institut Fourier de Grenoble*, t. 32, fasc. 3, 1982, p. 275-286.
- [C-F] CHAVEL (I.) and FELDMAN (E.), Spectra of domain in compact manifold, *J. Funct. Anal.*, vol. 30, n° 2, 1978, p. 198-222.
- [D] DAHLANE (A.), *Thèse de 3<sup>e</sup> cycle*, Institut Fourier, Université de Grenoble-I.
- [K] KLINGENBERG (W.), A course in differential geometry, *Graduate texts in mathematics*, 51, Springer-Verlag.
- [M-N-P] MAZ'JA (V. G.), NAZAROV (S.) and PLAMENEVSKII (F. A.), *Math. U.S.S.R. Sbornik*, vol. 44, n° 2, 1983, p. 167-194.
- [R-S] REED (M.) and SIMON (B.), Methods of modern mathematical physics. I. *Functional analysis*, Academic Press, New York, 1972.
- [R-T] RAUCH (J.) and TAYLOR (M.), Potential and scattering theory on widely perturbed domain, *J. Funct. Anal.*, vol. 18, 1975, p. 27-29.
- [O1] OZAWA (S.), Surgery of domain and the Green's function of the Laplacian, *Proc. Japan Acad.*, vol. 56 A, 1980, p. 459-461.
- [O2] OZAWA (S.), Singular Hadamard's variation of domains and eigenvalues of the Laplacian, *Ibid.*, vol. 56 A, 1980, p. 306-310.
- [O3] OZAWA (S.), Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian, *Ibid.*, vol. 57 A, n° 5, 1981, p. 242-246.
- [O4] OZAWA (S.), Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian, *Duke mathematical journal*, vol. 48, 1981, p. 767-778.
- [O5] OZAWA (S.), Singular Hadamard Variation 2, *Proc. Japan Acad.*, vol. 57 A, 1981.
- [O6] OZAWA (S.), An asymptotic formula for the eigenvalues of the Laplacian in a Domain with a small hole, *Ibid.*, vol. 58 A, 1982.