BULLETIN DE LA S. M. F.

SERGE OCHANINE

Modules de *SU*-bordisme. Couples exacts cohérents

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 79-98
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__79_0>

Bull. Soc. math. France,
113, 1985, p. 79-98.

MODULES DE SU-BORDISME. COUPLES EXACTS COHÉRENTS

PAR

SERGE OCHANINE (*)

RÉSUMÉ. — Le premier d'une série de trois articles consacrés à l'étude des propriétés homologiques des modules de SU-bordisme de complexes cellulaires finis. On introduit la catégorie des couples exacts cohérents dont l'objet type est le couple exact de Conner-Floyd, et l'on étudie les propriétés de finitude de tels objets.

ABSTRACT. — The first of a series of three articles on the homology properties of modules of SU-bordism of finite complexes. A convenient category of coherent exact couples modelled on the Conner-Floyd exact couple is introduced and the finiteness properties of its objects are studied.

Soit X un complexe cellulaire fini. L. Smith [5] a démontré que le Ω^U-module de bordisme complexe $\Omega_*^U(X)$ est de type fini. L'affirmation analogue pour les modules de SU-bordisme est fausse : le Ω^{SU}-module $\tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C}))$ est de type infini (*cf.* 1.17 ci-dessous). Cet article a pour but d'expliquer ce phénomène. On verra, en particulier, que l'exemple de $P_2(\mathbb{C})$ est en un sens le plus mauvais possible.

L. Smith travaille dans la catégorie des modules cohérents. L'anneau Ω^{SU} n'étant pas cohérent, cette catégorie ne convient pas pour l'étude des modules de SU-bordisme. Nous lui substituerons donc une catégorie ∇ de « couples exacts cohérents ». Le § 1 est consacré aux propriétés de finitude de tels couples. Par exemple, si t est l'élément non-nul de Ω_1^{SU}, on montre que $t\Omega_*^{SU}(X)$ est un sous-module de type fini de $\Omega_*^{SU}(X)$. Dans le cas où $H_*(X\,;\mathbb{Z})$ n'a pas de torsion, cela nous renseigne sur le module de torsion de $\Omega_*^{SU}(X)$.

(*) Texte reçu le 16 février 1984, révisé le 12 septembre 1984.

S. OCHANINE, L.P. 13 du C.N.R.S., Université de Paris-Sud, Mathématique, bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.

Dans le § 2, on détermine les objets projectifs de ∇. Le rôle spécifique du module $\tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C}))$ apparaît à ce stade. On démontre également que ∇ a assez d'objets projectifs. Il en découle, par exemple, l'existence d'une surjection $D \to \Omega_*^{SU}(X)$, où D est une somme directe finie de modules isomorphes à Ω^{SU} ou $\tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C}))$.

Dans une prochaine publication, ces propriétés de ∇ seront appliquées à la construction de résolutions topologiques de modules de SU-bordisme, analogues à celles de [2], et à l'étude de leur dimension homologique.

Les résultats de cet article ont été en partie obtenus lors d'un séjour à l'Institut des Hautes Études de Princeton (N. J.). Je présente mes vifs remerciements à P. S. Landweber, L. Smith et R. E. Stong pour les entretiens stimulants que j'ai eus avec eux à cette occasion. Je remercie également Michèle Audin qui a lu le manuscrit et a fait de nombreuses suggestions utiles.

1. Couples exacts cohérents

(1.1) L'outil principal de la SU-théorie est un couple exact qui relie le groupe de bordisme Ω_*^{SU} à un groupe de bordisme plus maniable $W_*(X)$ construit à partir des variétés faiblement complexes à déterminants sphériques. Nous supposerons que le lecteur est familier avec ces objets et qu'il connaît, par exemple, les faits suivants (*cf.* [1], [6] chap. X) :

Les groupes $W_*(X)$ forment une théorie homologique multiplicative : il existe un produit naturel

$$W_*(X) \otimes W_*(Y) \to W_*(X \times Y)$$

qui définit, en particulier, une structure d'anneau commutatif gradué dans $W = W_*(pt)$ et, pour tout X, une structure de W-module gradué dans $W_*(X)$.

Il existe une transformation naturelle d'oubli

$$j : \Omega_*^{SU}(X) \to W_*(X)$$

de degré 0, compatible avec les structures multiplicatives.

Il existe une transformation naturelle

$$\partial : W_*(X) \to \Omega_*^{SU}(X)$$

de degré -2 correspondant à la dualisation de la première classe de Chern.

Pour tout X, il existe un couple exact $\mathscr{S}(X)$:

$$\begin{tikzcd} \Omega_*^{SU}(X) \arrow[rr, "t"] & & \Omega_*^{SU}(X) \arrow[dl, "j"] \\ & W_*(X) \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

dans lequel t est la multiplication par l'élément non-nul de $\Omega_*^{SU} = \mathbb{F}_2$, noté également t.

L'homomorphisme ∂ est lié à j par les relations suivantes :

a) $\partial(j(s).e) = s.\partial e$, pour $s \in \Omega^{SU}$, $e \in W_*(X)$;

b) $\partial(w.j(m)) = \partial w.m$, pour $w \in W$, $m \in \Omega_*^{SU}(X)$.

Enfin, la différentielle $d = j\partial$ du couple $\mathscr{S}(X)$ vérifie la relation

c) $d(w.e) = dw.e + w.de - x_1.dw.de$, où $w \in W$, $e \in W_*(X)$, et où $x_1 \in W_2$ est la classe de l'espace projectif $P_1(\mathbb{C})$. On a $dx_1 = 2$.

(1.2) La formule (*c*) rappelle la formule de Leibnitz pour la différentielle d'une algèbre différentielle graduée. Pour mettre cette ressemblance en relief, posons :

$$\bar{e} = e - x_1.de \qquad (e \in W_*(X)).$$

Par un calcul direct, on obtient :

PROPOSITION. — *L'endomorphisme $e \mapsto \bar{e}$ est une involution du W-module $W_*(X)$, i.e. :*

$$\bar{\bar{e}} = e, \quad \overline{w.e} = \bar{w}.\bar{e} \quad (w \in W, e \in W_*(X)).$$

De plus, $d\bar{e} = -\overline{de}$. □

La formule (*c*) de 1.1 devient maintenant :

$$d(w.e) = dw.e + \bar{w}.de \qquad \text{(formule de Leibnitz)}.$$

(1.3) La structure de l'anneau W est bien connue :

PROPOSITION (*cf.* [6], *chap. X*). — *L'anneau W est isomorphe à un anneau de polynômes $\mathbb{Z}[x_1, x_3, x_4, \ldots]$, $x_i \in W_{2i}$ $(i \neq 2)$. Les générateurs x_i peuvent être choisis de manière à ce que l'on ait :*

$$x_1 = [P_1(\mathbb{C})], \quad dx_1 = 2,$$
$$dx_{2i} = x_{2i-1} \quad (i \geq 2). \qquad \square$$

On fixera une fois pour toutes un ensemble de générateurs x_i ayant les propriétés énoncées. Notons que la formule de Leibnitz détermine alors entièrement l'action de d dans W.

Notons $W(n)$ $(1 \leq n \leq \infty)$ le sous-anneau de W engendré par les éléments de degré $\leq 4n$. On a :

$$\begin{aligned} W(1) &= \mathbb{Z}[x_1] \\ W(n) &= \mathbb{Z}[x_1, x_3, \ldots, x_{2n}] \quad (2 \leq n < \infty) \\ W(\infty) &= W. \end{aligned}$$

La formule de Leibnitz montre que $W(n)$ est stable par d.

(1.4) Par la suite, « module gradué M » signifiera « module $\mathbb{Z}$-gradué M pour lequel $M_n = 0$, si $n < 0$ ».

Soit M un $W(n)$-module gradué. On dira que M est un $W(n)$-module différentiel, s'il est muni d'un endomorphisme d de degré -2 tel que $d^2 = 0$ et $d(w.m) = dw.m + \bar{w}.dm$ $(w \in W(n),\ m \in M)$. Par exemple, pour tout X, $W_*(X)$ est un W-module différentiel.

La formule de Leibnitz montre que le produit de $W(n)$ induit un produit dans le groupe dérivé $H_*(W(n))$ qui devient ainsi un anneau commutatif. De même, si M est un $W(n)$-module différentiel, le groupe dérivé $H_*(M)$ est canoniquement un $H_*(W(n))$-module gradué.

Prenons par exemple $n = 1$. On a dans $W(1)$:

$$d(x_1^2) = dx_1 . x_1 + \bar{x}_1 . dx_1 = 0, \qquad \text{car} \quad \bar{x}_1 = -x_1 .$$

Soit $c_2 \in H_4(W(1))$ la classe d'homologie de x_1^2. Comme $d(x_1^{2k}) = 0$ et $d(x_1^{2k+1}) = 2x_1^{2k}$, on obtient $H_*(W(1)) = \mathbb{F}_2[c_2]$. Donc, pour tout $W(1)$-module différentiel M, $H_*(M)$ est un $\mathbb{F}_2[c_2]$-module gradué. C'est, en particulier, un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel.

(1.5) Soit N un $W(n)$-module différentiel. Pour tout k tel que $n \leq k \leq \infty$, considérons le $W(k)$-module $M = W(k) \otimes_{W(n)} N$. Comme $W(n)$ est un facteur direct dans le $W(n)$-module $W(k)$, on a une injection canonique $m \longmapsto 1 \otimes m$ $(m \in N)$ de N dans M. La formule

$$d(w \otimes m) = dw \otimes m + \bar{w} \otimes dm$$

définit dans M une structure de $W(k)$-module différentiel. Nous allons calculer le module dérivé de M en fonction du module dérivé de N.

(1.6) Considérons d'abord le cas où $k = n + 1 < \infty$. On pose donc

$$M = W(k) \otimes_{W(k-1)} N \quad (k \geq 2).$$

On a dans $W(k)$:

$$d(x_{2k}\bar{x}_{2k})=dx_{2k}.\bar{x}_{2k}+\bar{x}_{2k}.d\bar{x}_{2k}=0:$$

donc $c=x_{2k}\bar{x}_{2k}$ est un cycle de $W(k)$. Il résulte que $H_*(M)$ est canoniquement un $\mathbb{Z}[c]$-module gradué.

PROPOSITION. — *L'injection canonique $N \hookrightarrow M$ induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}[c]$-modules gradués :*

$$F:\mathbb{Z}[c]\otimes_{\mathbb{Z}}H_*(N) \xrightarrow{\cong} H_*(M).$$

Démonstration. — Posons, pour simplifier les notations, $u=x_{2k}$, $v=x_{2k-1}$. Comme $W(k)=\mathbb{Z}[u, v]\otimes_{\mathbb{Z}}W(k-1)$, on a :

$$M=\mathbb{Z}[u, v]\otimes_{\mathbb{Z}}N.$$

Donc, la multiplication par v dans M est injective. D'autre part, $dv=0$. Il en résulte une suite exacte de $W(k)$-modules différentiels

$$0 \to M \xrightarrow{v} M \xrightarrow{\pi} M/vM \to 0.$$

Le module dérivé de M/vM est facile à calculer : comme $du=v$, on a : $d(u.m)=u.dm$ $(m\in M/vM)$, d'où : $H_*(M/vM)\cong\mathbb{Z}[u]\otimes_{\mathbb{Z}}H_*(N)$.

On a : $c=u\bar{u}=u^2-x_1uv=u^2 \bmod v.W(k)$. Donc l'application composée :

$$\mathbb{Z}[c]\otimes_{\mathbb{Z}}H_*(N) \xrightarrow{F} H_*(M) \xrightarrow{\pi_*} H_*(M/vM)\cong\mathbb{Z}[u]\otimes_{\mathbb{Z}}H_*(N)$$

envoie $c^p\otimes h$ $(h\in H_*(N))$ sur $u^{2p}\otimes h$. Elle est donc injective, ce qui entraîne l'injectivité de F.

Comme $H_*(N)$ et $H_*(M)$ sont des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels (*cf.* 1.4), il suffira alors de comparer les séries de Poincaré de

$$V_1=\mathbb{Z}[c]\otimes_{\mathbb{Z}}H_*(N)=\mathbb{F}_2[c]\otimes_{\mathbb{F}_2}H_*(N)$$

et de $V_2=H_*(M)$. Pour la première, on a :

$$P(V_1, \alpha)=(1-\alpha^{8k})^{-1}.P(H_*(N), \alpha),$$

car c est de degré $8k$. Pour calculer la seconde, considérons le triangle exact

$$\begin{tikzcd} H_*(M) \arrow[rr, "v_*"] & & H_*(M) \arrow[dl, "\pi_*"] \\ & H_*(M/vM) \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

Si $m \in M$ et $dm=0$, on a : $v.m=d(u.m)$. Donc $v_*=0$ et le triangle se réduit à une suite exacte courte. Comme δ est de degré $-4k$, on a :

$$\begin{aligned} P(V_2, \alpha) &= (1+\alpha^{4k})^{-1}.P(H_*(M/vM), \alpha) \\ &= (1-\alpha^{4k})^{-1}.(1+\alpha^{4k})^{-1}.P(H_*(N), \alpha) \\ &= P(V_1, \alpha). \qquad \square \end{aligned}$$

(1.7) Prenons maintenant $n \leq k \leq \infty$ arbitraires. On notera c_{4m} la classe de $x_{2m}\bar{x}_{2m}$ dans $H_*(W(k))$, $2 \leq m \leq k$. Pour tout $W(k)$-module différentiel M, $H_*(M)$ est un $\mathbb{Z}[c_2, c_8, c_{12}, \ldots, c_{4k}]$-module gradué. De même, pour tout W-module différentiel M, $H_*(M)$ est un $\mathbb{Z}[c_2, c_8, c_{12}, \ldots, c_{4k}, \ldots]$-module gradué.

PROPOSITION. — *Si $M = W(k) \otimes_{W(n)} N$ $(n \leq k \leq \infty)$, l'injection canonique $N \hookrightarrow M$ induit un isomorphisme*

$$\mathbb{Z}[c_{4(n+1)}, \ldots, c_{4k}] \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(N) \cong H_*(M), \qquad \textit{pour} \quad k < \infty,$$

et

$$\mathbb{Z}[c_{4(n+1)}, \ldots, c_{4l}, \ldots] \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(N) \cong H_*(M), \quad \textit{si} \quad k = \infty.$$

Démonstration. — Le cas où $k < \infty$ est obtenu par récurrence à l'aide de la proposition 1.6. Pour $k = \infty$, on utilise le fait que M est la limite inductive de ses sous-groupes différentiels $M_p = W(p) \otimes_{W(n)} N$ $(p \geq n)$. $\square$

COROLLAIRE. — *On a* : $H_*(W(k)) = \mathbb{F}_2[c_2, c_8, \ldots, c_{4k}]$
$H_*(W) = \mathbb{F}_2[c_2, c_8, \ldots, c_{4k}, \ldots]$.

Démonstration. — Il suffit de poser $N = W(1)$ et d'utiliser 1.4. $\square$

Notons que le calcul de $H_*(W)$ est fait également dans [1].

Remarque. — L'isomorphisme de la proposition peut maintenant s'écrire :

$$H_*(M) \cong H_*(W(k)) \otimes_{H_*(W(n))} H_*(N),$$

où la structure de $H_*(W(n))$-module dans $H_*(W(k))$ est donnée par l'inclusion canonique $W(n) \hookrightarrow W(k)$.

(1.8) Rappelons qu'un A-module est dit *cohérent* s'il est de type fini et si tout sous-module de type fini est de présentation finie (*cf.* [4], [5]). L'anneau A est dit cohérent si le A-module à gauche A est cohérent.

Par exemple, tout anneau noethérien est cohérent.

PROPOSITION (*cf.* [5]). — *Soit k un anneau commutatif noethérien. Alors, l'anneau de polynômes $k[Z_1, \ldots, Z_l, \ldots]$ est cohérent.* $\square$

Soit M un A-module cohérent. Il est clair que tout sous-module de type fini de M est cohérent. Le quotient de M par un sous-module de type fini est encore cohérent. Plus généralement, on a :

LEMME (*cf.* [4], [5]). — *Si dans un triangle exact*
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] & N \arrow[dl] \\ P \arrow[u] & \end{tikzcd}$$
deux des modules sont cohérents, le troisième l'est aussi.

Si l'anneau A est cohérent, un A-module est cohérent si et seulement s'il est de présentation finie. En particulier, un A-module libre de rang fini est cohérent.

(1.9) Il découle de 1.3 et 1.8 que l'anneau W est cohérent. Plus généralement, on a :

PROPOSITION. — *Si X est un complexe cellulaire fini, $W_*(X)$ est un W-module cohérent.*

Démonstration (*cf.* [5]). — Le module $W_*(S^k)$ est libre de rang 2, donc cohérent. Si Y est tel que le module $W_*(Y)$ est cohérent, et si X est le cône d'une application $f: S^k \to Y$, le triangle exact

$$\begin{tikzcd} W_*(S^k) \arrow[rr, "f^*"] & & W_*(Y) \arrow[dl] \\ & \tilde{W}_*(X) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

et le lemme 1.8 montrent que $\tilde{W}_*(X)$, et donc $W_*(X)$, sont cohérents. On obtient ainsi une preuve par récurrence. □

(1.10) Les principaux résultats de cet article sont purement algébriques et sont valables pour tout « couple exact cohérent ».

DÉFINITION 1. — *On appellera* couple exact *un triangle exact $\mathscr{D}=(D, E, j, \partial)$:*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "t"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

dans lequel :

a) D est un Ω^{SU}-module gradué ;

b) E est un W-module gradué ;

c) t est la multiplication par l'élément non-nul de Ω_1^{SU};

d) ∂ et j sont respectivement de degré -2 et 0 et satisfont aux relations suivantes : $j(s.m)=j(s)j(m)$, $\partial(j(s).e)=s.\partial e$, $\partial(w.j(m))=\partial w.m$, où $s\in\Omega^{SU}$, $w\in W$, $m\in D$, $e\in E$;

e) la différentielle $d=j\partial$ est telle que $d^2=0$ et $d(w.e)=dw.e+\bar{w}.de$ pour $w\in W$, $e\in E$ (formule de Leibnitz).

Remarque. — Les deux premières relations (*d*) montrent que si l'on considère E comme Ω^{SU}-module via $j: \Omega^{SU} \to W$, les morphismes du couple exact sont des morphismes de Ω^{SU}-modules.

DÉFINITION 2. — *On dira que le couple exact $\mathscr{D}=(D, E, j, \partial)$ est* cohérent, *si le W-module E est cohérent.*

Par exemple, si X est un complexe cellulaire fini, le couple $\mathscr{S}(X)$ de 1.1 est cohérent, en vertu de 1.9.

(1.11) Soit $\mathscr{D}=(D, E, j, \partial)$ un couple exact. Considérons le couple dérivé $\mathscr{D}'$:

$$\begin{tikzcd} tD \arrow[rr, "t"] & & tD \arrow[dl, "j'"] \\ & H_*(E) \arrow[ul, "\partial'"] & \end{tikzcd}$$

Comme E est un W-module différentiel, $H_*(E)$ est canoniquement un $H_*(W)$-module gradué (*cf.* 1.4).

Le sous-groupe $\partial W \subset \Omega^{SU}$ est un idéal, car si $s\in\Omega^{SU}$ et $w\in W$, on a : $s.\partial w=\partial(j(s).w)$. Posons $\Lambda=\Omega^{SU}/\partial W$. Comme $t\partial=0$, le groupe tD est canoniquement un Λ-module gradué. Par ailleurs, $j(\partial w)=dw$, donc ∂w opère trivialement sur $H_*(E)$, et par suite $H_*(E)$ est également un Λ-module. Nous allons étudier les propriétés de cohérence des Λ-modules qui composent $\mathscr{D}'$.

(1.12) Comme on vient de voir, $H_*(E)$ est à la fois un $H_*(W)$-module et un Λ-module. Les deux structures sont liées par l'homomorphisme j_1 : $\Lambda \to H_*(W)$ induit par $j: \Omega^{SU} \to W$. Soit $\overline{H}_*(W)$ l'image de j_1. C'est l'ensemble des classes de $H_*(W)$ qu'on peut représenter par une classe de SU-bordisme.

PROPOSITION ([1], *cf.* [6], chap. X).

$$H_*(W)=\oplus_{k\geq 0} H_{8k}(W).$$

Démonstration. — Considérons le couple $\mathscr{S}'$ dérivé de $\mathscr{S}$:

$$\begin{tikzcd} t\Omega^{SU} \arrow[rr, "t"] & & t\Omega^{SU} \arrow[dl, "j'"] \\ & H_*(W) \arrow[ul, "\partial'"] & \end{tikzcd}$$

Sa différentielle $d' = j'\partial'$ est de degré -3. Elle est donc nulle en vertu de 1.7. Donc $H_*(H_*(W), d') = H_*(W)$. Par ailleurs, $t^3 = 0$ ([1], [6], chap. X). Donc, d'une part, le couple $\mathscr{S}''$ dérivé de $\mathscr{S}'$ se réduit à une suite de suites exactes courtes

$$0 \to t^2\Omega_{4n}^{SU} \xrightarrow{j''} H_{4n}(W) \xrightarrow{\partial''} t^2\Omega_{4n-4}^{SU} \to 0,$$

et, d'autre part, le couple $\mathscr{S}'''$ dérivé de $\mathscr{S}''$ est nul, donc $H_*(H_*(W), d'') = 0$, et, comme $d'' = j''\partial''$ est de degré -4, on a une suite exacte infinie :

$$\cdots \to H_{12}(W) \xrightarrow{d''} H_8(W) \xrightarrow{d''} H_4(W) \xrightarrow{d''} H_0(W) \to 0.$$

Par ailleurs, le corollaire 1.7 montre que $H_{8k+4}(W)$ et $H_{8k}(W)$ $(k \geq 0)$ sont des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de même dimension. Par récurrence, on obtient alors que $d'' : H_{4n}(W) \to H_{4n-4}(W)$ est nul pour n pair, et bijectif pour n impair. Comme $j'' : t^2\Omega_{4n}^{SU} \to H_{4n}(W)$ est injectif et $d'' = j''\partial''$, il s'ensuit que j'' est bijectif pour n pair et nul pour n impair.

Pour terminer la preuve, il reste à remarquer que, par définition de j'', $\operatorname{im} j'' = \operatorname{im} j_1$. □

COROLLAIRE. — $\bar{H}_*(W) = \mathbb{F}_2[c_2^2, c_8, c_{12}, \ldots]$.

(1.13) Nous pouvons maintenant déterminer Λ.

PROPOSITION. — *Il existe un isomorphisme d'anneaux gradués*

$$\Lambda \cong \bar{H}_*(W)[t_0]/(t_0^2),$$

où t_0 est l'image de t dans Λ.

Démonstration. — Comme $t^3 = 0$, on a $t^2 \in \partial W$, donc $t_0^2 = 0$. Il suffira alors de prouver qu'il existe dans Λ un sous-anneau gradué $\bar{\Lambda}$ isomorphe à $\bar{H}_*(W)$ et tel que $\Lambda = \bar{\Lambda} \oplus t_0\bar{\Lambda}$.

Posons $\bar{\Lambda} = \oplus_{k \geq 0} \Lambda_{8k}$. Comme $\bar{H}_*(W) = \oplus H_{8k}(W)$, et comme l'homomorphisme $j_1 : \Lambda \to H_*(W)$ est surjectif, la restriction de j_1 à $\bar{\Lambda}$ est surjective.

Considérons alors $\ker j_1$. La multiplication par t induit un isomorphisme $T : \Lambda \xrightarrow{\sim} t\Omega^{SU}$ de degré $+1$, et le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "j_1"'] & & t\Omega^{SU} \arrow[dl, "j'"] \\ & H_*(W) & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Le noyau de j' est $t^2\Omega^{SU}$. Or, d'après 1.12, on a un isomorphisme $j'' : t^2\Omega^{SU} \xrightarrow{\sim} H_*(W) = \oplus H_{8k}(W)$, qui montre que $t^2\Omega^{SU} = \oplus t^2\Omega_{8k}^{SU}$.

Donc

$$\ker j_1 = T^{-1}(t^2\Omega^{SU}) = \oplus t_0\Lambda_{8k} = t_0\overline{\Lambda}.$$

En particulier, la restriction de j_1 à $\overline{\Lambda}$ est injective, donc bijective, et on a : $\Lambda = \overline{\Lambda} \oplus t_0\overline{\Lambda}$. □

COROLLAIRE. — *a) L'anneau Λ est cohérent ;*
b) Le Λ-module $H_*(W)$ est cohérent.

Démonstration. — *a)* découle de la proposition 1.8, car

$$\Lambda \cong \overline{H}_*(W)[t_0]/(t_0^2) \cong k[c_2^2, c_8, c_{12}, \ldots],$$

où $k = \mathbb{F}_2[t_0]/(t_0^2)$ est noethérien.

Pour prouver (*b*), notons que $\overline{H}_*(W)$ est le quotient de Λ par un idéal de type fini. C'est donc un Λ-module cohérent. D'autre part,

$$H_*(W) \cong \overline{H}_*(W) \oplus c_2\overline{H}(W)$$

comme Λ-modules. Donc $H_*(W)$ est un Λ-module cohérent. □

(1.14) La proposition suivante permet de réduire l'étude des W-modules différentiels cohérents à celle des $W(n)$-modules différentiels noethériens ($n < \infty$).

PROPOSITION. — *Soit E un W-module différentiel cohérent. Alors, il existe un $n < \infty$ et un $W(n)$-sous-module différentiel noethérien E_0 de E tel que l'application canonique $W \otimes_{W(n)} E_0 \to E$ soit un isomorphisme de W-modules différentiels.*

Démonstration. — Comme E est de type fini sur W, on peut trouver une famille finie de générateurs homogènes $e_1, \ldots, e_k \in E$. Prenons un W-module gradué libre F engendré par une base $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$, où $\deg u_i = \deg e_i$, $\deg v_i = \deg u_i - 2$ $(1 \leq i \leq k)$. Les formules

$$d(w.u_i) = dw.u_i + \overline{w}.v_i$$
$$d(w.v_i) = dw.v_i$$

transforment F en un W-module différentiel. Soit $\pi : F \to E$ l'unique morphisme de W-modules tel que $\pi(u_i) = e_i$, $\pi(v_i) = de_i$ $(1 \leq i \leq k)$. Il est clair que π est un morphisme de modules différentiels, i. e. $d\pi = \pi d$.

Comme E est de présentation finie, on a une suite exacte

$$0 \to R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} E \to 0.$$

où R est un sous-module différentiel de F de type fini. Soit $S \subset R$ un ensemble fini de générateurs de R. Écrivons, pour tout $s \in S$:

$$s = \sum w_i(s)u_i + \sum w_i'(s)v_i \qquad (w_i,\ w_i' \in W).$$

Alors pour un $n < \infty$, on a : $w_i(s)$, $w_i'(s) \in W(n)$ pour tous i et s. Soit R_0 le $W(n)$-sous-module de R engendré par l'ensemble fini $S \cup dS$, et soit $F_0 \subset F$ le $W(n)$-module libre engendré par $u_1, \ldots, u_k$, $v_1, \ldots, v_k$. Il est clair que R_0 et F_0 sont des $W(n)$-modules différentiels, et comme $S \cup dS \subset F_0$, on a $R_0 \subset F_0$. Il existe donc une suite exacte

$$0 \to R_0 \xrightarrow{i_0} F_0 \to E_0 \to 0,$$

où E_0 est un $W(n)$-module différentiel de type fini, donc noethérien, puisque l'anneau $W(n)$ est noethérien.

On a ensuite un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W \otimes_{W(n)} R_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_R"] & W \otimes_{W(n)} F_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_F"] & W \otimes_{W(n)} E_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_E"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r] & F \arrow[r] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les deux lignes horizontales sont exactes (car W est un $W(n)$-module libre), et où le morphisme φ_R est surjectif, alors que φ_F est bijectif. Il en découle que φ_E est bijectif. Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que E_0 est canoniquement plongé dans $W \otimes_{W(n)} E_0$, donc aussi dans E.

(1.15) Passons au module dérivé.

PROPOSITION. — *Soit E un W-module différentiel cohérent. Alors, $H_*(E)$ est un $H_*(W)$-module cohérent.*

Démonstration. — Écrivons, comme dans 1.14, $E = W \otimes_{W(n)} E_0$, où E_0 est un $W(n)$-module différentiel noethérien. Soit $C(n) \subset W(n)$ le sous-anneau engendré par les cycles x_1^2, et x_{2k-1}, $x_{2k}\bar{x}_{2k}(2 \le k \le n)$ (*cf.* 1.4, 1.6). La formule de Leibnitz montre que tout élément de $C(n)$ est un cycle et que la différentielle $d : E_0 \to E_0$ est un morphisme de $C(n)$-modules.

Par ailleurs, on a : $x_{2k}\bar{x}_{2k} = x_{2k}^2 - x_1 x_{2k-1} x_{2k}$. On en déduit facilement que $C(n) = \mathbb{Z}[x_1^2, x_3, x_4\bar{x}_4, x_5, \ldots, x_{2n}\bar{x}_{2n}]$. C'est donc un anneau noethérien. De plus, $W(n)$ est un $C(n)$-module libre de rang fini (avec pour base les monômes $x_1^{i_1} x_4^{i_4} \ldots x_{2n}^{i_{2n}}$, où $0 \le i_s \le 1$). Donc, E_0 est de type fini sur $C(n)$, donc un $C(n)$-module noethérien. Comme la projection $C(n) \to H_*(W(n))$

est surjective (*cf.* 1.7), $H_*(E_0)$ est de type fini sur l'anneau noethérien $H_*(W(n))$, donc aussi de présentation finie sur $H_*(W(n))$. Le $H_*(W(n))$-module $H_*(W)$ est libre. Il résulte que $H_*(W)\otimes_{H_*(W(n))}H_*(E_0)$ est de présentation finie sur l'anneau cohérent $H_*(W)$. C'est donc un $H_*(W)$-module cohérent (*cf.* 1.8). Il reste à remarquer que ce module est isomorphe à $H_*(E)$ (*cf.* 1.7). □

(1.16) Voici maintenant le résultat principal de ce paragraphe.

THÉORÈME. — *Soit $\mathscr{D}=(D, E, j, \partial)$ un couple exact cohérent. Alors, dans le couple dérivé $\mathscr{D}'$, tD et $H_*(E)$ sont des Λ-modules cohérents.*

Démonstration. — Commençons par $H_*(E)$. Nous venons de voir que c'est un $H_*(W)$-module cohérent. Soit $0 \to R \to F \to H_*(E) \to 0$ une présentation finie sur $H_*(W)$. Comme F est un $H_*(W)$-module libre, il est un Λ-module cohérent, en vertu du corollaire 1.13 (*b*). Le module R est de type fini, il est donc aussi de type fini sur Λ, puisque $H_*(W)$ est de type fini sur Λ (engendré par 1 et c_2). D'après 1.7, cela entraîne que $H_*(E)$ est un Λ-module cohérent.

Dans le couple $\mathscr{D}''$ dérivé de $\mathscr{D}'$, on a :

$$E''=H_*(E', d')=H_*(H_*(E), d').$$

Comme d' commute avec l'action de Λ (*cf.* 1.11), E'' est aussi un Λ-module cohérent.

Le couple $\mathscr{D}''$ se réduit à la suite exacte :

$$0 \to t^2D \xrightarrow{j''} E'' \xrightarrow{\partial''} t^2D \to 0.$$

Comme E'' est cohérent, t^2D est de type fini, donc, puisque j'' est injectif, t^2D est un Λ-module cohérent.

Considérons alors la suite exacte de Λ-modules :

$$tD \xrightarrow{j'} H_*(E) \xrightarrow{\partial'} tD \xrightarrow{t} t^2D \to 0$$

extraite du couple $\mathscr{D}'$. Comme t^2D et $H_*(E)$ sont de type fini, il en est de même pour tD. Donc coker j' est cohérent (*cf.* 1.8). La suite exacte

$$0 \to \operatorname{coker} j'' \to tD \xrightarrow{t} t^2D \to 0$$

montre alors que tD est un Λ-module cohérent. □

COROLLAIRE. — *Si X est un complexe cellulaire fini, le Ω^{SU}-module $t\Omega_*^{SU}(X)$ est de type fini.* □

Par exemple, si $H_*(X\,;\mathbb{Z})$ n'a pas de torsion, on démontre, à l'aide de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch, que $W_*(X)$ n'a pas de torsion. Il découle que Tor $\Omega_*^{SU}(X)=t\Omega_*^{SU}(X)$ est de type fini sur Ω^{SU}.

(1.17) Voici, pour terminer ce paragraphe, une démonstration de la proposition citée dans l'introduction :

PROPOSITION. — *Le Ω^{SU}-module $\tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C}))$ est de type infini.*

Démonstration. — On sait (*cf.* [6], chap. X) qu'il existe un isomorphisme de Ω^{SU}-modules $W\cong\tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C}))$ de degré $+2$. Si W était de type fini, il en serait de même pour l'idéal $\partial W\subset\Omega^{SU}$. Si $s_{2n}:\Omega_{2n}^{SU}\to\mathbb{Z}$ est le nombre de Chern correspondant au polynôme Σt_i^n, on aurait alors $s_{2n}((\partial W)_{2n})=0$ pour n suffisamment grand. Comme tous les éléments de $\Lambda=\Omega^{SU}/\partial W$ sont d'ordre 2, on aurait aussi $s_{2n}(\Omega_{2n}^{SU})=0$ pour n suffisamment grand, ce qui est faux (*cf.* [6], chap. X). $\square$

2. Couples exacts projectifs

(2.1) Soient $\mathscr{D}_\alpha=(D_\alpha, E_\alpha, j_\alpha, \partial_\alpha)$ $(\alpha=1,2)$ des couples exacts. On appelle *morphisme* $\varphi:\mathscr{D}_1\to\mathscr{D}_2$ une paire (f,g), où $f:D_1\to D_2$ est un morphisme homogène de Ω^{SU}-modules gradués, $g:E_1\to E_2$ est un morphisme homogène de W-modules gradués, de même degré, et

$$g j_1=j_2 f,\qquad f\partial_1=\partial_2 g.$$

On notera ∇ la catégorie des couples exacts cohérents et leurs morphismes. Il est clair que ∇ est une catégorie additive, avec le couple $(0,0,0,0)$ pour objet nul. On verra plus loin que ce n'est pas une catégorie abélienne (*cf.* 2.6).

Si $\varphi:\mathscr{D}_1\to\mathscr{D}_2$ est un morphisme de ∇, notons ker φ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[rr, "i"] & & \ker f \arrow[dl, "j"] \\
& \ker g \arrow[ul, "\partial"] &
\end{tikzcd}$$

dont les morphismes sont induits par ceux de $\mathscr{D}_1$. Cet objet possède toutes les propriétés des couples exacts cohérents (*cf.* 1.10) à l'exception, peut-être, de l'exactitude. Notons $\tilde{\nabla}$ la catégorie de tels objets.

On dira que φ est un morphisme *injectif*, si ker $\varphi=0$. Il est clair que tout morphisme injectif de ∇ est un monomorphisme. La réciproque est également vraie (*cf.* 2.6).

De la même manière, on définit un objet coker φ de $\tilde{\nabla}$ et les morphismes surjectifs. Une vérification simple donne :

PROPOSITION. — *Si* φ *est un morphisme surjectif* (*resp. injectif*), ker φ (*resp.* coker φ) *est un couple exact cohérent.* $\square$

(2.2) Soit $\mathscr{P}$ un couple exact cohérent. On dira que $\mathscr{P}$ est *projectif*, si tout diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{D}_0 \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathscr{P} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\psi"'] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

de ∇, où φ est un morphisme surjectif, peut être complété par un morphisme $\bar{\psi} : \mathscr{P} \to \mathscr{D}_0$ tel que $\varphi\bar{\psi} = \psi$. Voici l'exemple le plus simple d'objet projectif :

PROPOSITION. — *Soit* $\mathscr{S} = \mathscr{S}(pt)$ *le couple-base de 1.1, et soit* $\mathscr{D}$ *un couple de* $\tilde{\nabla}$. *Pour tout morphisme homogène* $f : \Omega^{SU} \to D$ *de* Ω^{SU}*-modules gradués, il existe un unique morphisme* $(f, g) : \mathscr{S} \to \mathscr{D}$.

Démonstration. — Soit $m = f(1)$. C'est un élément homogène de D qui détermine entièrement f. Si $(f, g) : \mathscr{S} \to \mathscr{D}$ est un morphisme, on a, pour $w \in W$:

$$g(w) = w \, . \, g(1) = w \, . \, gj(1) = w \, . \, j(m) \, .$$

Donc g est également déterminé par m. Ceci prouve l'unicité.

Inversement, la formule $g(w) = w \, . \, j(m)$ définit un morphisme homogène $g : W \to E$, et il est facile de voir que (f, g) est un morphisme de $\tilde{\nabla}$. $\square$

COROLLAIRE. — $\mathscr{S}$ *est un couple exact projectif.* $\square$

(2.3) Le deuxième exemple de couple exact projectif est $\tilde{\mathscr{S}}(P_2(\mathbb{C}))$, noyau du morphisme $\mathscr{S}(P_2(\mathbb{C})) \to \mathscr{S}$ induit par la projection $P_2(\mathbb{C}) \to pt$. On va d'abord introduire de manière formelle un couple exact $\mathscr{I}$, en étudier les propriétés, puis démontrer qu'il est isomorphe à $\tilde{\mathscr{S}}(P_2(\mathbb{C}))$.

Soit $\mathscr{I}$ le diagramme :

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "0"] & & W \arrow[dl, "j"] \\ & L \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

où L est un W-module libre ayant deux générateurs p et q de degré 2 et 0 respectivement, et où j et ∂ sont définis par :

$$
\begin{aligned}
j(w) &= dw.p+\overline{w}.q \\
\partial(w.p+v.q) &= w+dv \qquad (w, v\in W).
\end{aligned}
$$

Proposition. — *$\mathcal{J}$ est un couple exact cohérent.*

Démonstration. — Calcul direct. □

(2.4) Comme $\mathscr{S}$, le couple $\mathcal{J}$ possède une propriété universelle :

Proposition. — *Soit $\mathcal{D}$ un couple de $\tilde{\nabla}$. Pour tout morphisme homogène $g : L \to E$ de W-modules différentiels, il existe un unique morphisme (f, g) : $\mathcal{J} \to \mathcal{D}$.*

Démonstration. — On a dans $\mathcal{J}$: $\partial(w.p)=w$. Donc, si $(f, g) : \mathcal{J} \to \mathcal{D}$ est un morphisme de $\tilde{\nabla}$, on doit avoir :

$$f(w)=f\partial(w.p)=\partial g(w.p),$$

ce qui prouve l'unicité. Inversement, la formule $f(w)=\partial g(w.p)$ définit un morphisme homogène $f: W \to D$ de Ω^{SU}-modules, et on vérifie, par un calcul direct, que (f, g) est un morphisme de $\tilde{\nabla}$. □

Remarque. — Si E est un W-module différentiel, tout morphisme g : $L \to E$ de modules différentiels est déterminé par sa valeur sur $p\in L$. De plus, quel que soit l'élément homogène $e\in E$, la formule

$$g(w.p+v.q)=w.e+v.de$$

définit un morphisme de modules différentiels tel que $g(p)=e$. Il en découle :

Corollaire. — *$\mathcal{J}$ est un couple exact projectif.* □

(2.5) Nous pouvons maintenant identifier les couples $\mathcal{J}$ et $\tilde{\mathscr{S}}(P_2(\mathbb{C}))$.

Proposition. — *Il existe un isomorphisme $\mathcal{J} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathscr{S}}(P_2(\mathbb{C}))$ de degré $+2$.*

Démonstration. — Le couple $\tilde{\mathscr{S}}(P_2(\mathbb{C}))$ est de la forme

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{\Omega}^{SU}_*(P_2(\mathbb{C})) \arrow[rr, "i"] & & \tilde{\Omega}^{SU}_*(P_2(\mathbb{C})) \arrow[dl, "j"] \\
& \tilde{W}_*(P_2(\mathbb{C})) \arrow[ul, "\partial"] &
\end{tikzcd}
$$

Le W-module $\tilde{W}_*(P_2(\mathbb{C}))$ est libre de rang 2 ayant une base (x, y), deg $x=4$, deg $y=2$. Pour le voir, on peut, par exemple, utiliser la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch.

Par ailleurs, $\tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C}))\cong W$. Donc $t=0$ dans $\tilde{\mathscr{S}}(P_2(\mathbb{C}))$, et par conséquent $H_*(\tilde{W}_*(P_2(\mathbb{C}))=0$. Pour des raisons de dimension, on a : $dy=0$. Il existe donc un $z\in \tilde{W}_4(P_2(\mathbb{C}))$ tel que $dz=y$. Écrivons $z=\lambda x_1.y+\mu x$ (λ, $\mu\in\mathbb{Z}$). Alors, $y=dz=2\lambda y+\mu dx$. Il en découle que dx est un multiple impair de y, mettons $dx=(2\nu+1)y$ ($\nu\in\mathbb{Z}$). Alors, si $x'=x-\nu x_1.y$, on a $dx'=y$, et d'autre part, (x', y) est encore une base du W-module $\tilde{W}_*(P_2(\mathbb{C}))$.

D'après 2.4, il existe un unique morphisme $(f, g) : \mathscr{I} \to \tilde{\mathscr{S}}(P_2(\mathbb{C}))$ de degré $+2$ tel que $g(p)=x'$, $g(q)=y$. Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{j} & \tilde{W}_*(P_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C})) & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f}\,\cong & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & L & \longrightarrow & W & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

montre alors que f est bijectif. □

(2.6) Soit $\mathscr{D}$ un couple exact cohérent. On dira que $\mathscr{D}$ est *libre* s'il est une somme finie de couples isomorphes à $\mathscr{S}$ ou $\mathscr{I}$. Il est clair que tout couple libre est projectif. La proposition suivante montre qu'il y a « à peine assez » d'objets libres dans $\tilde{\nabla}$.

PROPOSITION. — *Soit $\mathscr{D}$ un objet non-nul de $\tilde{\nabla}$. Alors, il existe un objet libre $\mathscr{D}_0$ et un morphisme non-nul $\varphi : \mathscr{D}_0 \to \mathscr{D}$.*

Démonstration. — Si $D\neq 0$, on peut prendre $\mathscr{D}_0=\mathscr{S}$ et utiliser la proposition 2.2. Si $E\neq 0$, on pose $\mathscr{D}_0=\mathscr{I}$ et on applique 2.4. □

COROLLAIRE 1. — *Tout monomorphisme de ∇ est injectif.*

Démonstration. — Soit $\psi : \mathscr{D}_1 \to \mathscr{D}_2$ un morphisme non-injectif de ∇, et soit $\mathscr{D}=\ker\psi\in\tilde{\nabla}$. D'après la proposition, il existe un morphisme non-nul $\varphi : \mathscr{D}_0 \to \mathscr{D}$ de $\tilde{\nabla}$, où $\mathscr{D}_0\in\nabla$. Alors, si $\varphi_1 : \mathscr{D}_0 \to \mathscr{D}_1$ est le morphisme composé de φ et du morphisme canonique $\mathscr{D} \to \mathscr{D}_1$, on a : $\psi\varphi_1=0$ et $\varphi_1\neq 0$. Donc, ψ n'est pas un monomorphisme. □

COROLLAIRE 2. — *La catégorie ∇ n'est pas abélienne.*

Démonstration. — Supposons ∇ abélienne. Alors, le morphisme $\varphi=(2, 2)$: $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$ a un noyau $i : \mathscr{D} \to \mathscr{S}$ dans ∇. On a $\varphi i=0$ et i est un monomorphisme, donc un morphisme injectif. Il en résulte que i est composé d'injections $D\subset\ker(2 : \Omega^{SU} \to \Omega^{SU})=t\Omega^{SU}$ et $E\subset\ker(2 : W \to W)=0$. Donc

$E=0$, d'où $\mathscr{D}=0$ (car $t^3=0$). Ainsi φ est un monomorphisme, donc injectif ; or, nous venons de voir que $\ker \varphi \neq 0$. □

(2.7) La proposition suivante montre que la catégorie ∇ a « assez d'objets libres » :

Proposition. — *Si $\mathscr{D}$ est un couple exact cohérent, il existe un couple cohérent libre $\mathscr{D}_0$ et un morphisme surjectif $\varphi : \mathscr{D}_0 \to \mathscr{D}$.*

Démonstration. — Comme $\mathscr{D}$ est cohérent, E est un W-module de type fini. A l'aide de la proposition 2.4 et de la remarque qui la suit, on trouve d'abord un couple exact libre $\mathscr{L}_1=(D_1, E_1, j_1, \partial_1)$ isomorphe à une somme directe de couples isomorphes à $\mathscr{I}$, et un morphisme $\psi_1=(f_1, g_1) : \mathscr{L}_1 \to \mathscr{D}$ de degré 0, où $g_1 : E_1 \to E$ est un morphisme surjectif.

De même, le théorème 1.16 dit que tD est un Λ-module cohérent. En particulier, tD est un Ω^{SU}-module de type fini. A l'aide de 2.2, on construit alors un couple exact libre $\mathscr{L}_2=(D_2, E_2, j_2, \partial_2)$ isomorphe à une somme directe de couples exacts isomorphes à $\mathscr{S}$, et un morphisme $\psi_2=(f_2, g_2)$: $\mathscr{L}_2 \to \mathscr{D}$ de degré 0, tel que $f_2 : tD_2 \to tD$ soit surjectif.

Posons $\mathscr{D}_0=\mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$ et $\varphi=\psi_1+\psi_2$. Par définition, $\mathscr{D}_0$ est un couple exact libre, et il reste à démontrer que φ est surjectif. Or, $g_1+g_2 : E_1 \oplus E_2 \to E$ est surjectif puisque g_1 l'est. Par ailleurs, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \partial(E_1 \oplus E_2) & \to & D_1 \oplus D_2 & \xrightarrow{t} & t(D_1 \oplus D_2) & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_1+f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_1+f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_1+f_2} & & \\
0 & \longrightarrow & \partial E & \longrightarrow & D & \xrightarrow{\quad t \quad} & tD & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dont les lignes horizontales sont exactes. Comme $\partial(g_1+g_2)=(f_1+f_2)\partial$, le morphisme $f_1+f_2 : \partial(E_1 \oplus E_2) \to \partial E$ est surjectif. De même, le morphisme $f_1+f_2 : t(D_1 \oplus D_2)=tD_2 \to tD$ est surjectif. Donc, $f_1+f_2 : D_1 \oplus D_2 \to D$ est surjectif. □

Remarque. — Pour le couple construit $\mathscr{D}_0$, on a : $tD_0=tD_2$. On peut donc préciser l'énoncé de la proposition comme suit : Pour tout morphisme surjectif $f: M \to tD$ de Λ-modules, où M est un Λ-module libre de rang fini, il existe un couple exact libre $\mathscr{D}_0$ et un morphisme surjectif $\varphi : \mathscr{D}_0 \to \mathscr{D}$ tels que $tD_0=M$ et que le morphisme correspondant $tD_0 \to tD$ coïncide avec f.

Corollaire. — *Si X est un complexe cellulaire fini, il existe une surjec-*

tion $D \to \Omega_*^{SU}(X)$, où D est une somme directe finie de modules isomorphes à Ω^{SU} ou W. □

(2.8) Nous verrons plus loin que tout couple exact projectif est libre. Ce résultat a un analogue dans la catégorie des modules gradués : Soit k un anneau principal, R une k-algèbre positivement graduée connexe et M un R-module gradué. On notera $Q^R(M)$ le k-module gradué $k \otimes_R M$, où k est considéré comme R-module via l'augmentation canonique $R \to k$.

LEMME (*cf.* [3], chap. VII ; [2]). — *Si le R-module M est projectif, alors :*

a) le k-module $Q^R(M)$ est libre ;

b) le R-module M est libre ; plus précisément, si a_i $(i \in I)$ sont des éléments de M tels que les éléments $1 \otimes a_i$ forment une base de $Q^R(M)$ sur k, les a_i $(i \in I)$ forment une base de M sur R. □

PROPOSITION. — *Soit $\mathscr{D}$ un couple exact cohérent, tel que :*

i) *tD est un Λ-module libre ;*

ii) *E est un W-module libre.*

Alors D est un couple exact libre.

Démonstration. — Nous allons procéder par récurrence sur

$$r(\mathscr{D}) = rg_\Lambda tD + rg_W E.$$

Si $r(\mathscr{D}) = 0$, on a $\mathscr{D} = 0$, et il n'y a rien à démontrer. Prenons donc un couple exact $\mathscr{D} \neq 0$ satisfaisant aux conditions (i) et (ii) et supposons la proposition vérifiée pour les couples $\mathscr{D}_1$, tels que $r(\mathscr{D}_1) < r(\mathscr{D})$.

Soit ν la première dimension telle que $E_\nu \neq 0$. Alors $t : D_{i-1} \to D_i$ est une surjection pour $i < \nu$, et, comme $t^3 = 0$, $D_i = 0$ pour $i < \nu$. De plus, la suite exacte

$$D_{\nu-1} \xrightarrow{t} D_\nu \xrightarrow{j} E_\nu \xrightarrow{\partial} D_{\nu-2}$$

montre que $j : D_\nu \to E_\nu$ est un isomorphisme.

Deux cas sont possibles :

(1) $tD_\nu \neq 0$. Alors $Q^\Lambda(tD)_{\nu+1} \cong tD_\nu$ est un espace vectoriel non-nul sur $\mathbb{F}_2$. D'autre part, $Q^W(E)_\nu \cong E_\nu \cong D_\nu$ est un groupe abélien libre, et on a une surjection :

$$Q^W(E)_\nu \xrightarrow{t} Q^\Lambda(tD)_{\nu+1}.$$

Il est alors facile de trouver un $a \in D_\nu$ tel que :

a) $0 \neq ta \in Q^\Lambda(tD)_{\nu+1}$;

b) $j(a) \in Q^W(E)_\nu$ engendre un facteur direct.

En incluant ta et $j(a)$ dans les bases de $Q^\Lambda(tD)$ et $Q^W(E)$ respectivement, on déduit du lemme que :

a) ta engendre un facteur direct libre du Λ-module libre tD ;

b) $j(a)$ engendre un facteur direct libre du W-module libre E.

Selon 2.2, il existe un unique morphisme $\varphi=(f, g) : \mathcal{S} \to \mathcal{D}$ tel que $f(1)=a$. Comme $g(1)=gj(1)=jf(1)=j(a)$, le morphisme $g : W \to E$ est injectif. Par ailleurs, si $\lambda \in \Omega^{SU}$ et $f(\lambda)=0$, on a : $0=jf(\lambda)=gj(\lambda)$. Donc $j(\lambda)=0$ et $\lambda=t\omega$, avec $\omega \in \Omega^{SU}$. Alors :

$$0=f(\lambda)=t\omega f(1)=t\omega a=\omega.(ta).$$

Il en découle que $\omega=0$ dans Λ, donc $\lambda=t\omega=0$. Ceci prouve l'injectivité de f, et par suite, de φ.

Soit $\mathcal{D}_1=\operatorname{coker} \varphi \in \nabla$. Il est clair que $\mathcal{D}_1$ satisfait aux conditions (i) et (ii) et que $r(\mathcal{D}_1)<r(\mathcal{D})$. Donc, par hypothèse, $\mathcal{D}_1$ est libre et *a fortiori* projectif. Il résulte que $\mathcal{D} \cong \operatorname{im} \varphi \oplus \mathcal{D}_1$ est un couple exact libre.

(2) $tD_\nu=0$. Alors $\partial : E_{\nu+2} \to D_\nu$ et, par suite, $d : E_{\nu+2} \to E_\nu$ sont surjectifs. Comme E est un W-module libre, $Q^W(E)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre. En particulier, il existe un scindage $E \cong W^+.E \oplus Q^W(E)$ de la projection canonique $E \to Q^W(E)$, où $W^+=\sum_{i>0} W_i$.

En dimension ν, on a : $Q^W(E)_\nu=E_\nu$.

En dimension $\nu+2$, on a : $E_{\nu+2}=x_1.E_\nu \oplus Q^W(E)_{\nu+2}$.

Notons que $d(x_1.E_\nu)=2E_\nu$. Comme d est surjectif, on a une surjection

$$d : Q^W(E)_{\nu+2} \to E_\nu \otimes \mathbb{F}_2$$

induite par d.

Prenons un $e_1 \neq 0$ dans $E_\nu \otimes \mathbb{F}_2$ et soit $e_2 \in E_{\nu+2}$ tel que $de_2 \otimes 1=e_1$ et tel que $1 \otimes e_2 \in Q^W(E)_{\nu+2}$ engendre un facteur direct. Prenons ensuite un $e_3 \in E_\nu$ tel que $e_3 \otimes 1=e_1$ dans $E_\nu \otimes \mathbb{F}_2$ et qui engendre un facteur direct. Alors $e_3-de_2 \in 2E_\nu$. Donc, on peut trouver un $e \in E_{\nu+2}$ de la forme $e_2+\lambda x_1.h$ ($h \in E_\nu$, $\lambda \in \mathbb{Z}$) tel que $de=e_3$. Comme $1 \otimes e=1 \otimes e_2$ dans $Q^W(E)$, e et de engendrent un facteur direct libre de rang 2 de E sur W.

D'après la proposition 2.4, il existe un unique morphisme $\varphi=(f, g)$: $\mathcal{J} \to \mathcal{D}$ tel que $g(p)=e$, $g(q)=de$.

Le morphisme $g : L \to E$ est manifestement injectif. Si $w \in W$ est tel que $f(w)=0$, on a aussi $jf(w)=0$. Or, par définition de f (*cf.* 2.4) :

$$jf(w)=j\partial(w.e)=dw.e+\overline{w}.de.$$

Donc $\overline{w}=0$, d'où $w=0$. En résumé, $\varphi : \mathscr{I} \to \mathscr{D}$ est injectif. On achève la démonstration comme dans le cas (1). □

(2.9) Voici maintenant le résultat principal de ce paragraphe :

THÉORÈME. — *Soit $\mathscr{D}$ un couple exact cohérent. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathscr{D}$ est un couple exact projectif;

b) $\mathscr{D}$ est un couple exact libre;

c) tD est un Λ-module libre et E est un W-module libre.

Démonstration. — Nous avons déjà vu que (b) $\Rightarrow$ (a) et (c) $\Rightarrow$ (b) (*cf.* 2.8). Pour prouver (a) $\Rightarrow$ (c), considérons un couple exact projectif $\mathscr{D}$. Il existe un couple exact libre $\mathscr{D}_0$ et un morphisme surjectif $\varphi : \mathscr{D}_0 \to \mathscr{D}$ (*cf.* 2.7). Comme $\mathscr{D}$ est projectif, $\mathscr{D}_0 = \mathscr{D} \oplus \mathscr{D}_1$, où $\mathscr{D}_1 \in \nabla$. En particulier, E est un facteur direct du W-module libre E_0, alors que tD est un facteur direct du Λ-module libre tD_0. Le lemme 2.8 montre alors que E est un W-module libre et que tD est un Λ-module libre. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] CONNER (P. E.), FLOYD (E. E.). — Torsion in *SU*-bordism, *Mem. A.M.S.*, vol. 60, 1966.

[2] CONNER (P. E.), SMITH (L.). — On the complex bordism of finite complexes, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 37, 1969, p. 117-212.

[3] MAC LANE (S.). — *Homology*, Springer-Verlag, 1963.

[4] SERRE (J.-P.). — Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. Math.*, vol. 61, 1955, p. 197-278.

[5] SMITH (L.). — On the finite generation of $\Omega^{St}(X)$, *J. Math. Mech.*, vol. 18, 1969, p. 1017-1023.

[6] STONG (R. E.). — *Notes on cobordism theory*, Princeton Univ. Press, 1968.