BULLETIN DE LA S. M. F.

ED. LUCAS

Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern, concernant les nombres de Bernoulli

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 169-172
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__169_0>

Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern, concernant les nombres de Bernoulli; par M. Édouard Lucas.

(Séance du 16 avril 1880.)

M. Seidel a donné, le premier, des nouvelles formules fort remarquables sur les nombres de Bernoulli (¹). Ces relations se distinguent de celles que l'on connaissait jusqu'à présent en ce qu'elles ne contiennent qu'un certain nombre de coefficients au lieu de les contenir tous. M. Stern a généralisé les résultats de M. Seidel en donnant des relations qui ne renferment que les nombres B_{2r}, B_{2r-2}, ... jusqu'à B_{r-s} ou B_{r-s+1}, s étant un nombre positif ou nul, inférieur à r; on retrouve les formules de M. Seidel pour $s = 0$.

En s'appuyant sur le calcul symbolique et sur les formules que j'en ai déduites, M. Radicke, professeur à Bromberg, a trouvé une démonstration très simple, qu'il vient de m'adresser, des formules de M. Stern. Considérons la série des quantités

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots;$$

formons une seconde série de quantités

$$S^1 u_0,\ S^1 u_1,\ S^1 u_2,\ S^1 u_3,\ \ldots,\ S^1 u_n,\ \ldots$$

au moyen de la relation

$$S^1 u_n = u_n + u_{n+1};$$

formons ensuite la série

$$S^2 u_0,\ S^2 u_1,\ S^2 u_2,\ S^2 u_3,\ \ldots,\ S^2 u_n,\ \ldots$$

au moyen de la relation

$$S^2 u_n = S^1 u_n + S^1 u_{n+1} = u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n,$$

et ainsi de suite, de telle sorte que l'on a, en général,

$$S^p u_n = S^{p-1} u_n + S^{p-1} u_{n+1},$$

(¹) *Sitzungsberichte der math.-phys. Classe der könig. böhm. Academie der Wissenschaften.* Prag, 1877.

et aussi la relation

$$S^p u_n = u_{n+p} + p_1 u_{n+p-1} + p_2 u_{n+p-2} + \ldots + p_p u_n,$$

dans laquelle $p_1, p_2, \ldots, p_p$ désignent les coefficients de la puissance p du binôme. On peut donc écrire la formule précédente sous la forme symbolique

$$(1) \qquad S^p u_n = u^n (u+1)^p,$$

dans laquelle on remplacera les exposants de u par des indices.

D'autre part, on tire successivement

$$S^p u_n = S^{p+1} u_{n-1} - S^p u_{n-1},$$
$$S^p u_n = S^{p+2} u_{n-2} - 2S^{p+1} u_{n-2} + S^p u_{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$S^p u_n = S^{p+n} u_0 - n_1 S^{p+n+1} u_0 + \ldots + (-1)^n n_n S^p u_0$$

ou, symboliquement,

$$(2) \qquad S^p u_n = S^p (S+1)^n u_0,$$

dans laquelle on remplacera les exposants de p par des indices. Mais on tire de la formule (1)

$$S^p u_0 = (u+1)^p,$$

et, en transportant dans l'équation (2),

$$(3) \qquad S^p u_n = (u+1)^p (\overline{u+1} - 1)^n;$$

on tire encore de la formule (1)

$$(4) \qquad S^n u_p = u^p (u+1)^n.$$

Les formules (3) et (4) subsistent pour des valeurs quelconques des quantités $u_0, u_1, u_2, \ldots$. Posons, en général, $u_n = B_n$, en désignant par B_n le nombre de Bernoulli défini par la relation

$$\frac{z}{e^z - 1} = e^{Bz} = B_0 + B_1 \frac{z}{1} + B_2 \frac{z^2}{1.2} + \cdots + B_n \frac{z^n}{1.2\ldots n} + \cdots;$$

on sait que l'on a, symboliquement,

$$B_{2p+1} = 0, \quad (B+1)^{2p+1} = 0,$$

et, pour $p \overline{\gtrless} 2$,

$$(B+1)^p - B^p = 0.$$

Cela posé, nous distinguerons deux cas suivant que $p+n$ sera pair ou impair; dans le premier cas, on tire de (3) et (4)

$$S^p B_n - S^n B_p = 0,$$

et dans le second cas

$$S^p B_n + S^n B_p = 0.$$

Par conséquent, en se servant de la formule (1), on obtient

$$(5) \qquad B^p(B+1)^n = (-1)^{p+n} B^n (B+1)^p.$$

Cette relation importante contient toute la première classe des formules données par M. Stern; en supposant, plus particulièrement, $p = n+1$, on a

$$(6) \qquad B^{n+1}(B+1)^n + B^n(B+1)^{n+1} = 0;$$

on retrouve, pour les diverses valeurs de n, les formules de M. Seidel. Ainsi, pour $n = 6$ et pour $n = 7$, on a

$$13B_{12} + 55B_{10} + 27B_8 + B_6 = 0,$$
$$15B_{14} + 91B_{12} + 77B_{10} + 9B_8 = 0.$$

Posons maintenant

$$u_p = (2^p - 1)B_p;$$

on a, symboliquement,

$$S^p u_0 = (2B+1)^p - (B+1)^p;$$

l'équation (3) devient alors

$$S^p u_n = (2B+1)^p(\overline{2B+1} - 1)^n - (B+1)^p(\overline{B+1} - 1)^n.$$

D'autre part, on tire de l'équation (4)

$$S^n u_p = 2^p B^p (2B+1)^n - B^p (B+1)^n,$$

et l'on a la relation

$$(2B+1)^p + (2^p - 2)B^p = 0.$$

On a donc, pour $p+n$ pair, la formule

$$S^p u_n + S^n u_p = 0,$$

et, pour $p+n$ impair,

$$S^p u_n - S^n u_p = 0;$$

par conséquent, il en résulte

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} 2^p B^p(2B+1)^n - B^p(B+1)^n \\ \quad + (-1)^{p+n}[2^n B^n(2B+1)^p - B^n(B+1)^p] = 0. \end{array}\right.$$

Cette relation correspond au second groupe de formules données par M. Stern, et, pour $p = n+1$, on retrouve les formules de M. Seidel. Au moyen de l'identité

$$(n+1)_q - n_q = n_{q-1},$$

on déduit la formule

$$(8)\quad (2^{2n}-1)B_{2n} + n_2(2^{2n-2}-1)B_{2n-2} + n_4(2^{2n-4}-1)B_{2n-4} + \ldots = 0,$$

et, pour $n = 6$ et $n = 7$,

$$455B_{12} + 1705B_{10} + 425B_8 + 7B_6 = 0,$$
$$5461B_{14} + 28665B_{12} + 11935B_{10} + 595B_8 = 0.$$

Posons encore

$$P_n = 2(2^n - 1)B_n;$$

la formule (7) peut s'écrire

$$(9)\quad P^p(P+1)^n + (-1)^{p+n}P^n(P+1)^p = 0,$$

et, pour $p = n+1$, la formule devient, pour $n > 1$,

$$(10)\quad P^n(P+1)^n = 0.$$

Les nombres P sont donnés, comme on sait, par le développement

$$\frac{-2z}{1+e^z} = P_0 + P_1\frac{z}{1} + P_2\frac{z^2}{1.2} + \ldots + P_n\frac{z^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

il résulte immédiatement de la formule (10) que ces nombres sont entiers et impairs. Ce résultat important est dû à M. Genocchi [1].

---

[1] *Annales de Tortolini*, t. III, p. 395-405. Rome, 1852.