

# BULLETIN DE LA S. M. F.

N. BOUDRIGA

S. ZARATI

## **Points quadruples d'immersions de variétés de dimension trois en codimension un**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 112 (1984), p. 407-421

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1984\\_\\_112\\_\\_407\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__407_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**POINTS QUADRUPLES  
D'IMMERSIONS DE VARIÉTÉS  
DE DIMENSION TROIS EN CODIMENSION UN (\*)**

PAR

N. BOUDRIGA et S. ZARATI (\*\*)

**RÉSUMÉ.** — Soient  $N$  et  $M$  deux variétés différentiables de dimension trois telles que  $N$  est fermée et  $M$  sans bord, et  $\alpha: N \rightarrow \mathbb{R} \times M$  une immersion générique dont le fibré normal est orienté (nous ne supposons pas que  $M$  est orientable). L'objet de cette note est de calculer le nombre modulo 2 des points quadruples de  $\alpha$ .

**ABSTRACT.** — Quadruple points of codimension one immersions of three dimensional manifolds.

Let  $N$  and  $M$  be two smooth 3-manifolds such that  $M$  is closed and  $M$  without boundary, and let  $\alpha: N \rightarrow \mathbb{R} \times M$  be a generic immersion with an oriented normal bundle (we do not suppose that  $M$  is orientable). The aim of this note is to compute the number modulo 2 of the 4-fold points of  $\alpha$ .

**Introduction**

Soient  $N$  et  $M$  deux variétés de dimension trois (dans cette note les variétés sont différentiables) respectivement fermée et sans bord, et  $\alpha: N \rightarrow \mathbb{R} \times M$  une immersion générique dont le fibré normal est orienté. Le groupe de cobordisme de telles immersions s'identifie au groupe  $[\hat{M}, QS^0]$  des classes d'homotopie d'applications de  $\hat{M}$  (compactifié d'Alexandroff de  $M$ ) dans  $QS^0$  la limite inductive  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega^n S^n$ , [15].

---

(\*) Les résultats de cette note sont annoncés dans [1].

(\*\*) Texte reçu le 12 décembre 1983, révisé le 12 septembre 1984.

N. BOUDRIGA et S. ZARATI, Université de Paris-XI, U.E.R. de Mathématiques, Bât. n° 425, 91405 Orsay Cedex France.

Chaque immersion  $\alpha$  à un nombre fini,  $\theta(\alpha)$ , de points quadruples qui, modulo 2, détermine un homomorphisme :

$$\theta: [\hat{M}, QS^0] \rightarrow \mathbb{Z}/2.$$

Quand  $M$  est l'espace  $\mathbb{R}^3$ , M. H. Freedman [4] montre que  $\theta$  est l'unique épimorphisme du troisième groupe d'homotopie stable des sphères  $\pi_3^S \simeq \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/2$ . L'homomorphisme  $\theta$  coïncide alors avec l'invariant de Hopf.

Le cas où  $M$  est orientable a été étudié par J. Lannes [9] qui montre que le nombre de points quadruples de l'immersion  $\alpha$  est égal modulo 2 à la somme de la caractéristique de la surface double de  $\alpha$  et de son intersection triple.

L'objet de cette note est de généraliser les résultats précédents au cas où la variété  $M$  n'est plus supposée orientable; elle se compose de trois paragraphes et un appendice. Dans le premier paragraphe, on construit l'invariant de Kervaire pour les immersions de surfaces orientées en codimension un. Dans le second paragraphe, on donne une autre expression de cet invariant en fonction d'une classifiante de l'immersion considérée et d'une classe dans  $H^2(QS^0; \mathbb{Z}/2)$ . Le troisième paragraphe est consacré à la démonstration du résultat principal de cette note et l'appendice à pour but de montrer que toute classe de cohomologie à support compact  $u \in H_c^n(A; \mathbb{Z}/2)$  où  $A$  est un CW-complexe, est représentée par une application de  $\hat{A}$  (compactifié d'Alexandroff de  $A$ ) dans  $K(\mathbb{Z}/2, n)$  (l'espace d'Eilenberg-MacLane).

On tient à remercier MM. les professeurs Jean Lannes et François Latour pour d'utiles conversations.

## 1. Invariant de Kervaire d'immersions de surfaces orientées en codimension un

Soient  $Y$  et  $X$  deux surfaces orientées sans bord telles que  $Y$  est compacte, et  $\beta: Y \rightarrow \mathbb{R} \times X$  une immersion générique. La surface  $X$  étant orientée, elle est stablement parallélisable et le choix d'une trivialisation stable  $t$  sur  $X$  détermine une trivialisation stable  $b^*t$  sur  $Y$  où  $b: \nu_Y \rightarrow \nu_X$  est un morphisme entre les fibrés normaux stables de  $Y$  et  $X$  induit par l'immersion  $\beta$ . On va construire à partir de la trivialisation  $t$  une forme quadratique  $q'$  dite de Kervaire définie sur le premier groupe de cohomologie à support compact  $H_c^1(X; \mathbb{Z}/2)$  dans  $\mathbb{Z}/2$ .

## 1. 1. DÉFINITION D'UNE FORME QUADRATIQUE

On suppose que la surface  $X$  est proprement plongée dans  $\mathbb{R}^{2+p}$ ,  $p$  assez grand, et on désigne par  $E(v_X)$  le voisinage tubulaire normal de  $X$  dans  $\mathbb{R}^{2+p}$  ([6], [11]).

On considère la composition suivante :

$$S^{2+p} \xrightarrow{\varphi} E(v_X) \xrightarrow{\Delta} E(v_X) \wedge \hat{X} \xrightarrow{\hat{t} \wedge \text{id}} S^p \wedge \hat{X}$$

où  $\varphi$  est l'application de Thom ( $S^{2+p}$  apparaît comme le compactifié d'Alexandroff de  $\mathbb{R}^{2+p}$ ),  $\Delta$  est l'application diagonale,  $\Delta$  correspond au niveau des compactifiés d'Alexandroff au morphisme de fibrés :  $v_X \rightarrow v_X \wedge X$  produit de l'identité et de la projection et  $\hat{t}$  est induit par la trivialisation stable  $t$  sur  $X$  qui est un isomorphisme de fibrés vectoriels de  $v_X$  sur  $\varepsilon^p$  (le fibré trivial sur le point).

On note  $\varphi' : S^2 \rightarrow Q\hat{X}$  où  $Q\hat{X}$  est la limite inductive  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \Omega^p S^p \hat{X}$ , l'adjointe de la composition précédente.

Soit  $u \in H_c^1(X; \mathbb{Z}/2)$  représenté par une application  $f : \hat{X} \rightarrow K(\mathbb{Z}/2, 1) = K$  (voir l'appendice) on note  $P_2 u$  l'élément  $(Qf)^* P_2 \iota$  où  $\iota$  est le générateur du  $H^1(K; \mathbb{Z}/2)$ ,  $P_2 \iota \in H^2(QK; \mathbb{Z}/2)$  et  $Qf : Q\hat{X} \rightarrow QK$  est l'application induite par  $f$ . (voir [7], [17]).

On pose :

$$q'(u) = \langle P_2 u, \varphi'_* [S^2] \rangle.$$

1. 1. 2. Description géométrique de la forme  $q'$ 

La formule des coefficients universels montre que la réduction modulo 2 de  $H_c^1(X; \mathbb{Z})$  vers  $H_c^1(X; \mathbb{Z}/2)$  est surjective. Étant donné un élément  $u$  de  $H_c^1(X; \mathbb{Z}/2)$ , on peut donc le représenter par une application  $f_u : \hat{X} \rightarrow S^1$  qu'on peut supposer transverse au point base de  $S^1$  (ici  $S^1$  est considéré comme l'espace de Thom du fibré trivial sur le point). L'image réciproque de ce point base par  $f_u$  est une sous-variété fermée  $V$  de  $X$  de dimension 1. La trivialisation stable  $t$  de  $X$  induit une trivialisation stable  $\tilde{t}$  sur  $V$ . On a donc défini une application de  $H_c^1(X; \mathbb{Z}/2)$  vers  $\Omega_1^{fr}$  (le groupe de cobordisme des variétés de dimension 1 fermées stablement parallélisées)  $u \mapsto [V, \tilde{t}]$ . On vérifie que cette application est bien définie et que l'isomorphisme entre  $\Omega_1^{fr}$  et  $\mathbb{Z}/2$  permet d'avoir :

LEMME 1. 1. 2. ([7], [9]). — Avec les notations précédentes :  $q'(u) = [V, \tilde{t}]$ .

LEMME 1.1.3. — Soient  $u, v \in H_c^1(X; \mathbb{Z}/2)$  et  $[X]$  la classe d'orientation de  $X$  dans le groupe d'homologie localement finie  $H_2^{lf}(X; \mathbb{Z}/2)$ , on a :

$$q'(u+v) = q'(u) + q'(v) + \langle u \cup v, [X] \rangle.$$

Démonstration. — Soit  $r: Q\hat{X} \rightarrow \hat{X}$  la rétraction stable universelle, on a [7] :

$$P_2(u+v) = P_2 u + P_2 v + r^*(u \cup v) + r^* u \cup r^* v.$$

Il en résulte :

$$q'(u+v) = q'(u) + q'(v) + \langle r^*(u \cup v), \varphi_*[S^2] \rangle.$$

D'après la définition de l'application  $\varphi'$  et l'isomorphisme entre  $H_2^{lf}(X; \mathbb{Z}/2)$  et  $H_2(\hat{X}; \mathbb{Z}/2)$  on vérifie que  $r_* \varphi_*[S^2] = [X]$ .

Remarque 1.1.4. — Lorsque la surface  $X$  est compacte, la forme quadratique  $q'$  à un invariant d'Arf appelé invariant de Kervaire du couple  $(X, t)$  et noté  $K(X, t)$ .

Définition 1.1.5. —  $q'$  est appelé forme quadratique de Kervaire.

## 1.2. DÉFINITION DE L'INVARIANT DE Kervaire DE L'IMMERSION $\beta$

Soit  $h_1 \in H_c^1(X; \mathbb{Z}/2)$  le dual de l'élément du  $H_1(X; \mathbb{Z}/2)$  représenté par la surface des points doubles au but de l'immersion  $\beta$ .

On pose :

$$\mathcal{K}(\beta, t) = K(Y, b^* t) + q'(h_1) + \sum_{X'} d(X') \cdot K(X', t')$$

où la somme est étendue à toutes les composantes connexes compactes de  $X$ ,  $t'$  est la restriction de  $t$  à  $X'$  et  $d(X')$  est le degré de l'application  $f = \pi \circ \beta$  de  $(\pi \circ \beta)^{-1}(X')$  dans  $X'$ ;  $\pi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  étant la projection naturelle.

Remarque 1.2.1. — La classe  $h_1 \in H_c^1(X; \mathbb{Z}/2)$  est calculée dans [9] en fonction d'une classifiante de l'immersion  $\beta$  et d'une classe dans  $H^1(QS^0; \mathbb{Z}/2)$ , précisément soit  $\sigma_n$  le groupe symétrique de degré  $n$ ,  $\Gamma_n$  la représentation obtenue en faisant agir  $\sigma_n$  sur  $\mathbb{R}^n$  par permutation et  $\sigma$  la limite inductive  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ . Il existe une unique classe  $w_j(\Gamma) \in H^j(\sigma; \mathbb{Z}/2)$ ,  $j \geq 0$ , dont la restriction à  $H^j(\sigma_n; \mathbb{Z}/2)$  pour tout  $n$ , est  $w_j(\Gamma_n)$  la  $j$ -ième classe de Stiefel-Whitney de la représentation  $\Gamma_n$ . Soit  $Q_0 S^0$  la composante connexe du lacet constant dans  $QS^0$ , il existe une application naturelle de

$B\sigma$  dans  $Q_0 S^0$  induisant un isomorphisme en cohomologie [12], on note  $\Delta$  le plongement diagonal de  $H^*(\sigma; \mathbb{Z}/2)$  dans  $H^*(QS^0; \mathbb{Z}/2) \simeq H^*(\sigma; \mathbb{Z}/2)^{\mathbb{Z}}$ .

On a, alors :  $h_1 = a_p^* \Delta w_1(\Gamma)$  où  $a_p: \hat{X} \rightarrow QS^0$  est une classifiante de l'immersion  $\beta$  [ $a_p$  est aussi une application à support compact de  $X$  dans  $QS^0$  (voir l'appendice)].

**PROPOSITION. DÉFINITION 1.2.2.** —  $\mathcal{K}(\beta, t)$  est indépendant du choix de la trivialisation stable  $t$ . On note  $\mathcal{K}(\beta, t)$  par  $\mathcal{K}(\beta)$  et on l'appelle invariant de Kervaire de l'immersion  $\beta$ .

**PROPOSITION 1.2.3.** — (i)  $\mathcal{K}(\beta)$  ne dépend que de la classe de cobordisme de l'immersion  $\beta$ .

(ii) Soient  $Y_i$  et  $X_i$ ,  $i=0, 1$  des surfaces fermées orientées,  $\beta_i: Y_i \rightarrow \mathbb{R} \times X_i$  deux immersions génériques,  $V$  (respectivement  $U$ ) un cobordisme compact orienté entre  $Y_0$  et  $Y_1$  (respectivement  $X_0$  et  $X_1$ ) et  $\gamma: V \rightarrow \mathbb{R} \times U$  une immersion telle que  $\gamma(Y_i) \subset \mathbb{R} \times X_i$ ; alors, si  $\beta_i = \gamma|_{Y_i}$ , on a :  $\mathcal{K}(\beta_0) = \mathcal{K}(\beta_1)$ .

**Remarque 1.2.4.** — Pour démontrer les deux propositions précédentes on peut supposer la surface  $X$  connexe quitte à se restreindre à chaque composante connexe et dans ce cas on peut aussi supposer  $X$  compacte en effet l'image par  $\beta$  de la surface compacte  $Y$  est incluse dans un compact à bord  $X_1$  de  $X$ , on désigne par  $DX_1$  le double de  $X_1$  ( $DX_1 = X_1 \cup_{\partial X_1} X_1$ )

et par  $\beta_1$  la composition :  $Y \xrightarrow{\beta} \mathbb{R} \times X_1 \subset \mathbb{R} \times DX_1$ . L'application  $\pi \circ \beta_1$  de  $Y$  dans  $DX_1$  est alors de degré 0 et on vérifie aisément que  $\mathcal{K}(\beta_1, \tilde{t}_1) = \mathcal{K}(\beta, t)$  où la trivialisation  $\tilde{t}_1$  est induite par  $t$  sur  $DX_1$ .

### 1.3. UN LEMME TECHNIQUE

Soient  $Y$  et  $X$  deux surfaces connexes, fermées et orientées,  $\beta: Y \rightarrow \mathbb{R} \times X$ , une immersion générique et  $\lambda: Y \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $p$  assez grand, un plongement. On considère le plongement  $\beta \times \lambda: Y \rightarrow \mathbb{R} \times X \times \mathbb{R}^p$  et on désigne par  $g: X_+ \rightarrow QY_+$  l'adjointe de la composition suivante :

$$S^{p+1} \wedge X_+ \rightarrow T(v_{\beta \times \lambda}) \xrightarrow{\Delta} T(v_{\beta \times \lambda}) \wedge Y_+ \xrightarrow{a \wedge 1} S^{p+1} \wedge Y_+$$

où la première flèche est la construction de Thom,  $\Delta$  est l'application « diagonale »,  $a$  est l'homéomorphisme induit au niveau des espaces de Thom par la trivialisation de  $v_{\beta}$  et  $X_+(Y_+)$  est la réunion disjointe de  $X(Y)$  et d'un point base.

LEMME 1.3.1. — Pour tout  $v \in H^1(Y, \mathbb{Z}/2)$  on a :

$$q^{b^*t}(v) + q^t(f!v) = \langle g^* P_2 v, [X] \rangle$$

où  $f!$  est le Gysin de  $f$ .

*Démonstration.* — Les surfaces  $X$  et  $Y$  étant stablement parallélisées, les mêmes constructions que dans le paragraphe 1.1 permettent d'avoir des applications  $\varphi^t: S^2 \rightarrow QX_+$  et  $\varphi^{b^*t}: S^2 \rightarrow QY_+$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\varphi^{b^*t}} & QY_+ \\ \varphi^t \downarrow & & \downarrow h \\ QX_+ & \xrightarrow{Qg} & QQY_+ \end{array}$$

où  $h$  est la limite des applications suivantes :

$$\Omega^k S^k \Omega^n S^n Y_+ = \Omega^k S^{k-n} S^n \Omega^n S^n Y_+ \rightarrow \Omega^k S^k Y_+$$

qui consiste à « écraser » le facteur  $S^n \Omega^n$ .

Pour tout  $v \in H^1(Y; \mathbb{Z}/2)$  on a par définition :

$$\begin{aligned} q^{b^*t}(v) &= \langle P_2(v), \varphi_*^{b^*t}[S^2] \rangle = \langle P_2(v), h_* \circ Qg_* \circ \varphi_*^t[S^2] \rangle \\ &= \langle h^* P_2(v), Qg_* \circ \varphi_*^t[S^2] \rangle. \end{aligned}$$

On a [7] :  $h^* P_2(v) = r^* P_2 v + P_2(r^* v)$  d'où on obtient :

$$q^{b^*t}(v) = \langle r^* \circ g^*(P_2(v)), \varphi_*^t[S^2] \rangle + \langle P_2(g^* r^*(v)), \varphi_*^t[S^2] \rangle.$$

Il est facile de vérifier que  $g^* r^*: H^*(Y; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}/2)$  coïncide avec  $f!$  le Gysin de  $f$  et que  $r_* \varphi_*^t[S^2] = [X]$ , ce qui donne :

$$q^{b^*t}(v) + q^t(f!v) = \langle g^* P_2(v), [X] \rangle$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1.3.2. — On suppose que l'application  $f: Y \rightarrow X$  induite par l'immersion  $\beta$  est de degré  $d$ . Pour tout  $u \in H^1(X; \mathbb{Z}/2)$  on a :

$$q^{b^*t}(f^* u) + dq^t(u) = \langle h_1 \cup u, [X] \rangle.$$

**Démonstration.** — Pour tout lacet  $l: S^p \rightarrow S^p$  et pour tout  $x \in X_+$  on définit une application pointée de  $S^p$  dans  $S^p \wedge X_+$  en faisant correspondre à tout  $s \in S^p$  la classe de  $(l(s), x)$  dans  $S^p \wedge X_+$ , on obtient ainsi une application  $\mu: X_+ \wedge QS^0 \rightarrow QX_+$  vérifiant [7].

(i) Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X_+ & \xrightarrow{g} & QY_+ & \xrightarrow{Qf} & QX_+ \\ & \searrow 1 \wedge a_\beta & & & \nearrow \mu \\ & & X_+ \wedge QS^0 & & \end{array}$$

où  $a_\beta: X_+ \rightarrow QS^0$  est une classifiante de l'immersion  $\beta$ .

(ii)  $\mu^*(P_2 u) = c \times u^2 + \Delta w_1(\Gamma) \times u$ ,

où  $c \in H^0(QS^0; \mathbb{Z}/2)$  et  $u \in H^1(X; \mathbb{Z}/2)$ .

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \langle g^* P_2(f^* u), [X] \rangle &= \langle g^* \circ Qf^*(P_2 u), [X] \rangle \\ &= \langle a_\beta^* \Delta w_1(\Gamma) \cup u, [X] \rangle + \langle a_\beta^* c \cup u^2, [X] \rangle. \end{aligned}$$

Comme  $X$  est orientée et  $h_1 = a_\beta^* \Delta w_1(\Gamma)$  (voir remarque 1.2.1), on a d'après le lemme 1.3.1 :

$$q^{b^*t}(f^* u) + q^t(f! f^* u) = \langle h_1 \cup u, [X] \rangle.$$

L'application  $f: Y \rightarrow X$  est de degré  $d$  donc  $f! f^* u = du$  et comme  $X$  est orientée  $q^t(du) = dq^t(u)$ , d'où le corollaire 1.3.2.

#### 1.4. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.2.2

D'après la remarque 1.2.4 on peut supposer la surface  $X$  connexe compacte. Soit  $c: X \rightarrow S^0$  un changement de trivialisations, la forme quadratique  $q^t$  et les invariants de Kervaire  $K(X, t)$  et  $K(Y, b^* t)$  vérifient [5].

$$q^{ct}(u) = q^t(u) + \langle u \cup c^* \sigma w_2, [X] \rangle$$

$$K(X, ct) = K(X, t) + q^t(c^* \sigma w_2)$$

$$K(Y, (c \circ f) b^* t) = K(Y, b^* t) + q^{b^*t}(f^* c^* \sigma w_2)$$

où  $\sigma: H^2(BS^0; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^1(S^0; \mathbb{Z}/2)$  est l'homomorphisme suspension et  $w_2 \in H^2(BS^0; \mathbb{Z}/2)$  est la deuxième classe universelle de Stiefel-Whitney.



Il en résulte que le « défaut d'invariance » de  $\mathcal{K}(\beta)$  par rapport au changement de la trivialisation stable  $t$  sur  $X$  est le terme :

$$q^{b^*t}(f^*c^*\sigma w_2) + dq^t(c^*\sigma w_2) + \langle h_1 \cup c^*\sigma w_2, [X] \rangle$$

qui est nul d'après le corollaire 1.3.2.

### 1.5. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.2.3

Lorsque la surface  $X$  est compacte l'assertion (i) est un cas particulier de l'assertion (ii) qui se démontre de la façon suivante. On choisit sur la variété  $U$  compacte orientée de dimension trois une trivialisation  $t$  qui induit une trivialisation stable  $b^*t$  sur  $V$  où  $b: \nu_V \rightarrow \nu_U$  est un morphisme entre les fibrés normaux stables de  $V$  et  $U$  induit par l'immersion  $\gamma$ . Soit  $a_\gamma: U_+ \rightarrow QS^0$  une classifiante pour  $\gamma$  on a :  $a_\gamma|_{X_{i+}} = a_{p_i}$   $i=0, 1$ .

On sait que si  $W$  est une  $(2n+1)$ -variété compacte dont le bord est muni d'une trivialisation stable  $\tau$  qui se prolonge à  $W$  on a [8] :

$$q^*(i^*u) = 0 \quad \text{pour tout } u \in H^n(W; \mathbb{Z}/2) \quad \text{où } i: \partial W \rightarrow W$$

est l'inclusion naturelle.

Il en résulte :

$$\begin{aligned} q^*(i^*a_\gamma^* \Delta w_1(\Gamma)) &= 0 = q^*(a_{p_0}^* \Delta w_1(\Gamma) + a_{p_1}^* \Delta w_1(\Gamma)) \\ &= q^{i^0}(a_{p_0}^* \Delta w_1(\Gamma)) + q^{i^1}(a_{p_1}^* \Delta w_1(\Gamma)) \end{aligned}$$

où  $i: X_0 \sqcup X_1 \rightarrow U$  est l'inclusion et  $t_i$  est la restriction de  $t$  à  $X_i$ ,  $i=0, 1$ .

$$K(X_0, t_0) = K(X_1, t_1) \quad \text{et} \quad K(Y_0, b_0^* t_0) = K(Y_1, b_1^* t_1)$$

où  $b_i: \nu_{Y_i} \rightarrow \nu_{X_i}$  est la restriction du morphisme  $b: \nu_Y \rightarrow \nu_U$ .

On en déduit :  $\mathcal{K}(\beta_0) = \mathcal{K}(\beta_1)$

C.Q.F.D.

L'appellation de  $\mathcal{K}(\beta)$  invariant de Kervaire est justifiée par le lemme suivant :

**LEMME 1.6.** — *Lorsque la surface  $X$  est compacte et l'application  $f: Y \rightarrow X$  est de degré 1, l'invariant de Kervaire de l'immersion  $\beta: Y \rightarrow \mathbb{R} \times X$  coïncide avec l'invariant de Kervaire de la donnée de chirurgie  $(f, b)$  où  $b: \nu_Y \rightarrow \nu_X$  est le morphisme induit par  $\beta$  au niveau des fibrés normaux stables de  $Y$  et  $X$ .*

*Démonstration.* — Rappelons que l'invariant de Kervaire de la donnée de chirurgie  $(f, b)$  [2] définie par l'immersion  $\beta$  peut être défini comme étant l'invariant d'Arf de la forme quadratique  $q$  définie sur le noyau  $K^1$  de l'homomorphisme  $f!$  le Gysin de  $f$  à valeur dans  $\mathbb{Z}/2$  [7] par :

$$q(v) = \langle g^* P_2 v, [X] \rangle, \quad v \in K^1.$$

où  $g: X_+ \rightarrow QY_+$  est l'application définie dans le paragraphe 1.3.

D'après le corollaire 1.3.2 on a :

$$q^{b^{*t}}(f^* u) + q^t(u) = \langle h_1 \cup u, [X] \rangle, \quad u \in H^1(X; \mathbb{Z}/2)$$

c'est-à-dire que la somme de la restriction  $q_1^{b^{*t}}$  de  $q^{b^{*t}}$  à  $f^* H^1(X; \mathbb{Z}/2) \approx H^1(X; \mathbb{Z}/2)$  et de  $q^t$  est linéaire donc on a :

$$\text{Arf}(q_1^{b^{*t}} + q^t) = q^t(h_1) = q^{b^{*t}}(f^* h_1).$$

L'application  $f$  est de degré 1 on a donc une décomposition orthogonale :

$$H^1(Y; \mathbb{Z}/2) \simeq f^* H^1(X; \mathbb{Z}/2) \oplus K^1.$$

ce qui montre d'après la définition de l'invariant de Kervaire de l'immersion  $\beta$  que  $\mathcal{K}(\beta)$  est aussi l'invariant de Kervaire de la restriction de la forme quadratique  $q^{b^{*t}}$  à  $K^1$ . Le lemme 1.3.1 montre que pour tout  $v \in K^1$  on a :

$$q^{b^{*t}}(v) = \langle g^* P_2 v, [X] \rangle = q(v).$$

On en déduit donc que  $\mathcal{K}(\beta)$  est égal à l'invariant de Kervaire de la donnée de Chirurgie  $(f, b)$  défini par l'immersion  $\beta$ .

C.Q.F.D.

## 2. Une autre expression de $\mathcal{K}$

L'espace  $QS^0$  est muni de deux structures de  $H$ -espace, la première, notée 0, est donnée par le produit de lacets et la deuxième, notée  $*$ , est donnée par la « somme ou joint » de lacets. Soient  $Q_i S^0$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , la composante connexe des lacets de degré  $i$  dans  $QS^0$  et  $T: Q_i S^0 \rightarrow Q_{i+1} S^0$  l'application qui à un lacet  $l: S^p \rightarrow S^p$ ,  $p$  assez grand, fait correspondre le lacet  $l * [1]$  où  $[1] \in Q_1 S^0$  est déterminé par l'identité de  $S^p$ . On définit une application, notée  $\mathcal{K}$ , de  $\Omega_2(QS^0)$  (le groupe de bordisme orienté de

l'espace  $QS^0$  dans  $\mathbb{Z}/2$  de la façon suivante. On représente un élément  $[X, a] \in \Omega_2(QS^0)$  par une immersion  $\beta$  et on pose  $\mathcal{X}([X, a]) = \mathcal{X}(\beta)$ . D'après la proposition 1.2.3,  $\mathcal{X}$  est bien défini et on vérifie aisément que c'est un homomorphisme. Le lemme 1.6 montre que  $\mathcal{X}$  est non trivial.

LEMME 2.1. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_2(Q_i S^*) & \xrightarrow{\mathcal{X}} & \mathbb{Z}/2 \\ \downarrow \tau & & \parallel (i \in \mathbb{Z}) \\ \Omega_2(Q_{i+1} S^*) & \xrightarrow{\mathcal{X}} & \mathbb{Z}/2 \end{array}$$

*Démonstration.* — Soit  $[X, a] \in \Omega_2(Q_i S^0)$  représenté par une immersion  $\beta: Y \rightarrow \mathbb{R} \times X$  où  $Y$  est une surface fermée orientée. Par définition de la loi  $*$ , l'élément  $T([X, a])$  est représenté par l'immersion  $\beta_1: Y \amalg X \rightarrow \mathbb{R} \times X$  égale à  $\beta$  sur  $Y$  et à l'identité sur  $X$ . Il est immédiat d'après la définition de l'invariant de Kervaire de l'immersion  $\beta$  que  $\mathcal{X}(\beta) = \mathcal{X}(\beta_1)$ .

L'isomorphisme entre  $\Omega_2(QS^0)$  et  $H_2(QS^0; \mathbb{Z})$  et la formule des coefficients universels :

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_1(QS^0; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\lambda} H^2(QS^0; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \text{Hom}(H_2(QS^0; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow 0$$

montrent que l'homomorphisme  $\mathcal{X}$  provient d'une unique classe  $w \in H^2(QS^0; \mathbb{Z}/2)$  modulo l'image de  $\lambda$ . D'après le lemme 2.1 la classe  $w$  est dans l'image du plongement diagonal

$$\Delta: H^*(\sigma; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(QS^0; \mathbb{Z}/2) \simeq H^*(\sigma; \mathbb{Z}/2)^{\mathbb{Z}}$$

défini dans la remarque 1.2.1, on a donc  $w = \Delta w'$  où  $w' \in H^2(\sigma; \mathbb{Z}/2)$  modulo l'image de  $\lambda: \text{Ext}(H_1(\sigma; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^2(\sigma; \mathbb{Z}/2)$  qui coïncide avec l'image de  $Sq^1: H^1(\sigma; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^2(\sigma; \mathbb{Z}/2)$  de la manière suivante.

Soient  $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{p} Q/Z \xrightarrow{x_2} Q/Z \rightarrow 0$  une résolution injective de  $\mathbb{Z}/2$  et  $\beta$  son Bockstein associé, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & H^2(\sigma; \mathbb{Z}/2) \\ & \nearrow Sq^1 & \uparrow \beta \\ 0 \longrightarrow H^1(\sigma; \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{p_*} & H^1(\sigma; Q/Z) \end{array}$$

Le  $\mathbb{Z}$ -module  $Q/\mathbb{Z}$  étant injectif et  $H_1(\sigma; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/2$ , on a :  $H^1(\sigma; Q/\mathbb{Z}) \approx \text{Hom}(\mathbb{Z}/2, Q/\mathbb{Z})$  et la multiplication par 2 de  $H^1(\sigma; Q/\mathbb{Z})$  dans lui-même est nulle donc  $\rho_*$  est un isomorphisme ce qui montre que l'image de  $Sq^1$  coïncide avec celle de  $\lambda: \text{Ext}(H_1(\sigma; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^2(\sigma; \mathbb{Z}/2)$ . Comme  $H^2(\sigma; \mathbb{Z}/2)/\text{Im } Sq^1$  est engendré par la classe  $w_2(\Gamma)$ , on en déduit que pour tout  $[X, a] \in \Omega_2(QS^0)$  on a :

$$\mathcal{K}([X, a]) = \langle a^* \Delta w_2(\Gamma), [X] \rangle.$$

On a donc démontré le résultat suivant :

**PROPOSITION 2.2.** — Soient  $Y$  une surface fermée,  $X$  une surface sans bord orientée et  $\beta: Y \rightarrow \mathbb{R} \times X$  une immersion générique dont le fibré normal est orienté, alors :

$$\mathcal{K}(\beta) = \langle a_\beta^* \Delta w_2(\Gamma), [X] \rangle$$

où  $a_\beta: \hat{X} \rightarrow QS^0$  est une classifiante de  $\beta$  et  $[X]$  est la classe d'orientation de  $X$  dans le groupe d'homologie localement finie  $H_2^{lf}(X; \mathbb{Z}/2)$ .

### 2.3. EXEMPLES DE CALCUL D'INVARIANT DE Kervaire

Soit  $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  le plongement canonique du cercle  $S^1$  dans  $\mathbb{R}^3$ , on identifie le fibré normal de  $S^1$  dans  $\mathbb{R}^3$ , en un point  $z \in S^1$ , avec  $\{z\} \times \mathbb{R}^2$ . On désigne par  $\eta: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'immersion de Whitney (la figure « 8 ») et on considère l'immersion générique  $\beta$  du tore  $T = S^1 \times S^1$  dans  $\mathbb{R}^3$  dont la restriction à  $\{z\} \times S^1$  est égale à  $1 \times \eta$ .

D'après la définition de l'invariant de Kervaire de l'immersion  $\beta$  (voir paragraphe 1.2) on a :  $\mathcal{K}(\beta) = K(T, b^*t)$  où  $t$  est la trivialisatation canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Le calcul de  $\mathcal{K}(\beta)$  se réduit au calcul de l'invariant d'Arf de la forme quadratique de Kervaire  $q^{b^*t}: H^1(T; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ .

On note  $e_1$  et  $e_2$  les générateurs de  $H^1(T; \mathbb{Z}/2)$ , on vérifie [2], p. 376 :

$$q^{b^*t}(e_1) = 0 \quad \text{et} \quad q^{b^*t}(e_2) = 1$$

donc  $\mathcal{K}(\beta) = 0$ .

Considérons maintenant l'immersion  $\eta^2: T \rightarrow \mathbb{R}^3$  dont la restriction à  $\{e^{i\theta}\} \times S^1$  est égale à  $1 \times r_\theta \circ \eta$  où  $r_\theta$  est la rotation d'angle  $\theta$  dans  $SO(2)$ .

De la même manière que précédemment on vérifie :

$$q^{b^*t}(e_1) = q^{b^*t}(e_2) = 1$$

donc  $\mathcal{K}(\eta^2) = 1$ .

### 3. Le résultat principal

Soient  $N$  et  $M$  deux variétés de dimension trois respectivement fermée et sans bord et  $\alpha: N \rightarrow \mathbb{R} \times M$  une immersion générique dont le fibré normal est orienté. D'après [14] soit  $X$  une surface proprement plongée dans  $M$ , duale à la première classe de Stiefel-Whitney  $w_1(M) \in H^1(M; \mathbb{Z}/2)$  par image réciproque on a une immersion  $\beta: Y \rightarrow \mathbb{R} \times X$  qu'on peut supposer générique [6]. Le fibré normal de  $\beta$  est alors orienté. On dit par la suite que  $\beta$  est le Bockstein de  $\alpha$  et on donne une interprétation géométrique de son invariant de Kervaire.

**THÉOREME 3.1.** — *Soit  $\alpha$  l'élément de  $H_2(M; \mathbb{Z}/2)$  représenté par la surface double de  $\alpha$ ; alors, le nombre des points quadruples de  $\alpha$  est égal modulo 2 à la somme de la caractéristique de la surface double de  $\alpha$ , de l'intersection triple  $x.x.x$  et de l'invariant de Kervaire du Bockstein de  $\alpha$ .*

*Démonstration.* — Soit  $a_\alpha: \hat{M} \rightarrow QS^0$  une classifiante de  $\alpha$ , d'après [9] la classe  $a_\alpha^* \Delta w_1(\Gamma)$  est duale de l'élément  $x \in H_2(M; \mathbb{Z}/2)$  représenté par la surface des points doubles de  $\alpha$  et il existe deux classes  $u$  et  $v$  dans  $H^3(\sigma; \mathbb{Z}/2)$  vérifiant :

- (i)  $\langle a_\alpha^* \Delta u, [M] \rangle \equiv$  nombre des points quadruples de  $\alpha$  (2);
- (ii)  $\langle a_\alpha^* \Delta v, [M] \rangle \equiv$  caractéristique de la surface double de  $\alpha$  (2);
- (iii)  $u = v + w_1^3(\Gamma) + Sq^1 w_2(\Gamma)$ .

La composition suivante  $a_\beta: \hat{X} \xrightarrow{i} \hat{M} \xrightarrow{a_\alpha} QS^0$ , où  $i$  est induite par l'inclusion de  $X$  dans  $M$ , est une classifiante de  $\beta$ ; comme  $X$  est duale à  $w_1(M)$ , on a :

$$\langle a_\alpha^* \Delta Sq^1 w_2(\Gamma), [M] \rangle = \langle a_\beta^* \Delta w_2(\Gamma), [X] \rangle.$$

Le théorème 3.1 résulte de la proposition 2.2.

C.Q.F.D.

Le théorème 3.1 donne la seule relation générale entre les quatre invariants de cobordisme considérés de l'immersion  $\alpha$ ; en effet, lorsque  $M$  est compacte, la caractéristique d'Euler de la surface des points doubles, l'intersection triple et le nombre modulo 2 des points quadruples définissent un homomorphisme surjectif de  $\mathcal{N}_3(QS^0)$  dans  $(\mathbb{Z}/2)^3$ .

## APPENDICE

Soient  $A$  et  $B$  deux espaces topologiques tels que  $B$  est pointé. On désigne par  $\hat{A}$  le compactifié d'Alexandroff de  $A$ , par  $[\hat{A}, B]$  l'ensemble des classes d'homotopie d'applications pointées de  $\hat{A}$  dans  $B$  ( $\hat{A}$  est pointé par le point à l'infini) et par  $[A, B]_c$  l'ensemble des classes d'homotopie à support compact d'applications à support compact de  $A$  dans  $B$ .

Le but de cet appendice est de montrer que lorsque le point-base de  $B$  est non dégénéré (au sens de Steenrod [13]) alors il existe une bijection entre  $[\hat{A}, B]$  et  $[A, B]_c$ .

### 1. Espaces bien basés

**DÉFINITION 1.1.** — [13]. Soit  $B$  un espace topologique muni d'un point base  $*$ . On dit que  $*$  est un bon point-base (où  $*$  est non dégénéré) s'il existe :

1° Un voisinage  $V$  de  $*$  dans  $B$ .

2° Une homotopie  $h_t: B \rightarrow B$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) vérifiant :

(i)  $h_0 = \text{id}_B$ .

(ii)  $h_t(*) = * (0 \leq t \leq 1)$ .

(iii)  $h_1(V) = *$ .

**Exemples 1.2.** — 1° Tout CW-complexe pointé est bien basé, en particulier pour tout groupe abélien  $\pi$ , l'espace d'Eilenberg-MacLane  $K(\pi, n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est bien basé.

2° Soit  $B$  un espace topologique connexe bien basé alors l'espace  $QB = \lim_{p \rightarrow +\infty} \Omega^p S^p B$  est bien basé, [10], p. 14.

3° Pour tout  $n \geq 0$ , l'espace  $\Omega^n S^n$  est bien basé et son point-base est le lacet constant (voir [10], p. 166).

## 2. Une bijection entre $[\hat{A}, B]$ et $[A, B]_c$

LEMME 2.1. — Soit  $B$  un espace topologique bien basé. Il existe une bijection entre les deux ensembles  $[\hat{A}, B]$  et  $[A, B]_c$ .

*Démonstration.* — Rappelons que  $\hat{A}$  est l'espace topologique réunion de  $A$  et d'un point à l'infini, noté  $\infty$ , tel que les voisinages du point  $\infty$  sont les complémentaires dans  $\hat{A}$  des compacts de  $A$ .

L'espace  $B$  est bien basé, on considère le voisinage  $V$  et l'homotopie  $h_t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) de la définition 1.1. Soit  $\hat{f}: \hat{A} \rightarrow B$  une application pointée ( $\hat{f}(\infty) = *$ ), le sous-espace  $\hat{f}^{-1}(V)$  de  $\hat{A}$  est un voisinage du point  $\infty$  donc c'est le complémentaire d'un compact  $K$  de  $A$ . On définit  $f: A \rightarrow B$  par :

$$f(x) = h_1 \circ \hat{f}(x); \quad x \in A$$

c'est une application à support compact ( $\subset K$ ).

Inversement soit  $g: A \rightarrow B$  une application à support compact ( $\subset K$ ) on définit  $\hat{g}: \hat{A} \rightarrow B$  par :

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in A, \\ *, & x = \infty. \end{cases}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier qu'en posant  $\psi[\hat{f}] = [f]$  on réalise une bijection  $\psi$  entre  $[\hat{A}, B]$  et  $[A, B]_c$ .

## 2.2. APPLICATIONS

2.2.1. Soient  $A$  un CW-complexe et  $\pi$  un groupe abélien, on a :  $H_c^n(A; \pi) \approx [A, K(\pi, n)]_c$ ,  $n \geq 0$ . D'après l'exemple 1.2, 1° et le lemme 2.1 on en déduit :

$$H_c^n(A; \pi) \approx [\hat{A}, K(\pi, n)].$$

2.2.2. L'espace  $QS^0 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \Omega^p S^p$  à le même type d'homotopie que le « mapping-télescope » de la suite  $(\Omega^n S^n, e_n)_{n \geq 0}$  où  $e_n$  est l'application naturelle de  $\Omega^n S^n$  dans  $\Omega^{n+1} S^{n+1}$ . D'après [16], p. 375 un compact de  $QS^0$  est un compact de  $\Omega^n S^n$ ,  $n$  assez grand et on a :

$$[K, QS^0] = \lim_{n \rightarrow \infty} [K, \Omega^n S^n] \quad \text{pour tout compact } K.$$

D'après l'exemple 1. 2, 3° et le lemme 2. 1 on en déduit que pour toute variété  $V$  de dimension finie sans bord, on a :

$$[\hat{V}, QS^0] \approx [V, QS^0].$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOUDRIGA (N.) et ZARATI (S.). — Points quadruples d'immersions de variétés de dimension trois en codimension un, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 292, 23 mars 1981, p. 591-593.
- [2] BROWDER (W.). — *Surgey on simply connected manifolds*, Springer-Verlag, 1972.
- [3] BROWN (E. H.). — Generalizations of the Kervaire invariant, *Ann. of Math.*, (2), 95, 1972, p. 368-383.
- [4] FREEDMAN (M. H.). — Quadruples points of 3-manifolds in  $S^4$ , *Comment. Math. Helv.*, vol. 53, 1978, p. 385-394.
- [5] JONES (J.) et REES (E.). — Kervaire's invariant for framed manifolds, *Proc. of Symp. in pure Math.*, vol. 32, 1978, p. 141-147.
- [6] HIRSCH (M. W.). — *Differential topology*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [7] LANNES (J.). — *Cours Peccot*, 1978 à paraître dans *Astérisque*.
- [8] LANNES (J.). — Sur l'invariant de Kervaire des variétés fermées stablement parallélisées, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, t. 14, 1981, p. 183-197.
- [9] LANNES (J.). — *Homomorphisme d'Hurewicz et immersions* (à paraître).
- [10] MAY (J. P.). — *The geometry of iterated loop-spaces*, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Math.*, n° 271.
- [11] MORLET (C.). — Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney, *Séminaire Cartan (Top. Diff.)*, 14<sup>e</sup> année, 1961-1962, n° 4.
- [12] PRIDY (S. B.). — On  $\Omega^\infty S^\infty$  and the infinite symmetric group, *Proc. of Symp. in pure Math.*, 22 A MS, 1971, p. 217-220.
- [13] STEENROD (N.). — A convenient category of topological spaces, *Michigan Math. J.*, vol. 14, 1967, p. 133-152.
- [14] THOM (R.). — Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comment. Helv.*, vol. 28, 1954, p. 17-86.
- [15] WELLS (R.). — Cobordism groups of immersions, *Topology*, vol. 5, 1966.
- [16] WOOD (R.). — Banach algebras and Bott periodicity, *Topology*, vol. 4, 1965-1966.
- [17] ZARATI (S.). — Défaut de stabilité d'opérations cohomologique, *Thèse 3<sup>e</sup> cycle*, publications mathématiques d'Orsay, n° 78-07, 1978.