

# BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANZ PAUER

## **Sur les espaces homogènes de complication nulle**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 112 (1984), p. 377-385

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1984\\_\\_112\\_\\_377\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__377_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LES ESPACES HOMOGÈNES DE COMPLICATION NULLE

PAR

FRANZ PAUER (\*)

**RÉSUMÉ.** — Soient  $G$  un groupe algébrique réductif connexe,  $H$  un sous-groupe algébrique de  $G$ , le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle.

Supposons qu'il existe un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$  tel que  $BH$  soit ouvert dans  $G$ . Notons  $U$  le radical unipotent de  $B$ . Alors le normalisateur de  $U \cap H$  dans  $B$  contient un tore maximal de  $G$ .

**ABSTRACT.** — Let  $G$  be a connected algebraic reductive group over an algebraic closed field of characteristic zero. Let  $H$  be an algebraic subgroup of  $G$  and  $B$  a Borel-subgroup such that  $BH$  is open in  $G$ . We note  $U$  the unipotent radical of  $B$ .

Then the normalizer of  $U \cap H$  in  $B$  contains a maximal torus of  $G$ .

Soient  $G$  un groupe algébrique réductif connexe,  $H$  un sous-groupe algébrique (non nécessairement connexe) de  $G$ , le corps de base  $k$  étant algébriquement clos et de caractéristique nulle. On dit que l'espace homogène  $G/H$  est de complication nulle si un (et par conséquent tout) sous-groupe de Borel de  $G$  possède une orbite ouverte dans  $G/H$ .

La théorie des plongements toriques se généralise particulièrement bien aux espaces homogènes de complication nulle (voir [6; 7.5 et 8.10] et [7]). Les exemples les plus connus de tels espaces sont les espaces homogènes symétriques (voir [9]) et les  $G/H$ , où  $H$  contient un sous-groupe unipotent maximal de  $G$ . Lorsque  $H$  est réductif, pour que  $G/H$  soit de complication nulle il faut et il suffit que  $H$  soit un sous-groupe sphérique, c'est-à-dire tel que toute composante isotypique du  $G$ -module  $k[G]^H$  soit de multiplicité égale à 1 (voir [8]). Dans [5] sont classifiés tous les sous-groupes sphériques des groupes simples.

---

(\*) Texte reçu le 27 septembre 1983, révisé le 26 janvier 1984.

F. PAUER, Institut für Mathematik, Universität Innsbruck, Innrain 52, A-6020 Innsbruck, (Autriche).

Soit  $G/H$  un espace homogène de complication nulle, et soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  tel que  $BH$  soit ouvert dans  $G$ . Notons  $U$  le radical unipotent de  $B$ . Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant.

**THÉORÈME.** — *Le groupe  $N_B(U \cap H)$  (le normalisateur de  $U \cap H$  dans  $B$ ) contient un tore maximal de  $G$ .*

On en déduit le résultat suivant sur la structure de  $B/B \cap H$  (résultat qui n'est pas vrai pour n'importe quel espace homogène sous  $B$ !).

**COROLLAIRE.** — *Il existe un tore maximal  $T$  de  $B$ , qui normalise  $B \cap H$  et qui est tel que l'isomorphisme  $U \times T \xrightarrow{\sim} B$  bien connu donné par la multiplication, induit des isomorphismes*

$$(U \cap H) \times (T \cap H) \xrightarrow{\sim} B \cap H$$

et

$$(U/U \cap H) \times (T/T \cap H) \xrightarrow{\sim} B/B \cap H.$$

Lorsque  $G/H$  est un espace homogène symétrique, le théorème se déduit facilement de [2; 1.3].

## 1. Notations et rappels

Désignons par  $\mathfrak{G}$  (resp.  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{U}$ ) l'algèbre de Lie de  $G$  (resp.  $H$ ,  $B$ ,  $U$ ) et par  $R$  (resp.  $R_+$ ,  $R_-$ ) l'ensemble des racines (resp. racines positives, racines négatives) de  $G$  par rapport à  $B$ . Je regarde les racines comme des fonctions linéaires sur  $\mathfrak{B}$ , qui s'annulent sur  $\mathfrak{U}$ .

Soit  $S$  un tore maximal de  $B$  tel que  $(B \cap H)_0$ , la composante neutre de  $B \cap H$ , est le produit semi-direct de  $U \cap H$  avec le tore  $(S \cap H)_0$ .

Alors l'algèbre de Lie  $\mathfrak{S}$  de  $S$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}) \oplus (\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H})$  (cf. [4; 12.5]).

Soient  $\mathfrak{G}^\alpha$  l'espace propre du poids  $\alpha \in R \cup \{0\}$  pour l'opération de  $\mathfrak{S}$  sur  $\mathfrak{G}$  et  $h_\alpha \in \mathfrak{S}$  l'unique élément de  $[\mathfrak{G}^\alpha, \mathfrak{G}^{-\alpha}]$  qui vérifie  $\alpha(h_\alpha) = 2$ .

Pour  $g \in \mathfrak{G}$  notons  $g^\alpha$  la composante de  $g$  dans  $\mathfrak{G}^\alpha$  et  $\text{supp}(g) := \{\alpha \in R \cup \{0\} / g^\alpha \neq 0\}$ . Alors  $\mathfrak{U} = \bigoplus_{\alpha \in R_+} \mathfrak{G}^\alpha$ , donc  $g \in \mathfrak{U}$  équivaut à  $\text{supp}(g) \subseteq R_+$ .

Nous dirons qu'un élément  $g \in \mathfrak{H}$  est décomposable s'il existe  $g_1, g_2 \in \mathfrak{H} - \{0\}$  tels que  $\text{supp}(g_1) \cap \text{supp}(g_2) = \emptyset$  et  $g = g_1 + g_2$ ; et qu'un élément  $g \in \mathfrak{H}$  est indécomposable si  $g \neq 0$  et si  $g$  n'est pas décomposable.

Si  $g \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$  est décomposable, alors  $g = g_1 + g_2$  où  $g_1, g_2 \in (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}) - \{0\}$ . L'algèbre  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H}$  opère sur  $\mathfrak{H}$ , donc tout élément indécomposable est vecteur propre pour l'opération de  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H}$ .

Enfin, choisissons un produit scalaire  $(-|-)$  sur l'espace vectoriel engendré par  $R$ , invariant par le groupe de Weyl, tel que  $\min\{(\alpha|\alpha)/\alpha \in R'\} = 1$  pour toute composante irréductible  $R'$  de  $R$ .

Rappelons deux résultats qui nous seront utiles. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux racines. Alors  $\alpha(h_\beta) = 2(\alpha|\beta)/(\beta|\beta)$  (cf. [1; VI, 1.1, (7)]).

Si  $(\alpha|\beta) > 0$ ,  $\alpha - \beta$  est une racine sauf si  $\alpha = \beta$ .

Si  $(\alpha|\beta) < 0$ ,  $\alpha + \beta$  est une racine sauf si  $\alpha = -\beta$ , (cf. [1; VI, 1.3, Théorème 1, Corollaire]).

**2. LEMME.** — Soient  $g \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H} - \{0\}$  et  $\beta$  un élément minimal (par rapport à l'ordre induit par  $R_+$ ) dans  $\text{supp}(g)$ . Alors  $h_\beta \in \mathfrak{H}$ .

*Preuve.* — Puisque  $\mathfrak{B} + \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ , il existe  $b \in \mathfrak{B}$  et  $c \in \mathfrak{H} - \{0\}$  tels que  $b + c \in \mathfrak{G}^{-\beta} - \{0\}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \text{supp}([g, b + c]) &\subset \{ \alpha - \beta / \alpha \in \text{supp}(g) \} = \\ &= \{ 0 \} \cup \{ \alpha - \beta / \alpha \in \text{supp}(g), \alpha \neq \beta \}. \end{aligned}$$

Grâce à la minimalité de  $\beta$ , on a :

$$\alpha - \beta \notin R_-, \text{ quel que soit } \alpha \in \text{supp}(g),$$

donc

$$[g - g^\beta, b + c] \in \mathfrak{U} \quad \text{et} \quad [g, b + c] \in \mathfrak{B}.$$

Puisque  $[g, c] \in \mathfrak{H}$ ,  $[g, b] \in \mathfrak{U}$  et

$$[g, c] = [g, b + c] - [g, b] = [g^\beta, b + c] + ([g - g^\beta, b + c] - [g, b]),$$

on a  $[g, c] \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$ ,

$$[g - g^\beta, b + c] - [g, b] \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H} \quad \text{et} \quad [g^\beta, b + c] \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} - \{0\}.$$

D'où  $h_\beta \in \mathfrak{H}$ . ■

3. LEMME. — Soit  $R'$  un système de racines tel que  $\{(\alpha|\alpha)/\alpha \in R'\} = \{1, 2\}$ .

Soient  $\rho, \sigma, \tau \in R'$  tels que :

$$(\rho|\rho) = (\sigma|\sigma) = (\tau|\tau) = 1;$$

$$(\rho|\sigma) = (\rho|\tau) = 0;$$

$\rho + \sigma \in R$ ,  $\rho + \tau \in R$  et  $\sigma \neq \pm \tau$ .

Alors  $\sigma + \tau$  est une racine et  $(\sigma|\tau) = 0$ .

Preuve. — De  $\rho + \sigma \in R$  et  $(\rho|\sigma) = 0$  résulte que  $\rho - \sigma \in R$  (cf. [1; VI, 1.3, Proposition 9]). De même  $\rho - \tau \in R$ .

Puisque  $\sigma \neq \pm \tau$  et  $(\sigma|\sigma) = (\tau|\tau) = 1$ , on a  $-1 < (\sigma|\tau) < 1$ .

Alors,

$$(\rho + \sigma|\rho + \tau) = 1 + (\sigma|\tau) > 0,$$

et

$$(\rho + \sigma|\rho - \tau) = 1 - (\sigma|\tau) > 0,$$

d'où

$$\sigma - \tau = (\rho + \sigma) - (\rho + \tau) \in R$$

et

$$\sigma + \tau = (\rho + \sigma) - (\rho - \tau) \in R.$$

De plus,

$$(\sigma - \tau|\sigma - \tau) = 2 - 2(\sigma|\tau) \leq 2,$$

et

$$(\sigma + \tau|\sigma + \tau) = 2 + 2(\sigma|\tau) \leq 2,$$

d'où  $(\sigma|\tau) = 0$ . ■

4. LEMME. — Soit  $g \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{H}$  indécomposable tel que  $|\text{supp}(g)| > 1$ .

Alors il existe  $\beta \in \text{supp}(g)$  et  $\Gamma \subseteq R_+$  tels que

$$\text{supp}(g) = \{\beta\} \cup \{\beta + \gamma | \gamma \in \Gamma\}.$$

De plus, l'ensemble  $\{\beta\} \cup \Gamma$  est une famille orthonormale (par rapport à  $(-|-)$ ).

Preuve. — Soient  $\beta$  un élément minimal dans  $\text{supp}(g)$  et  $\Gamma := \{\gamma \in R_+ | \beta + \gamma \in \text{supp}(g)\}$ .

Puisque  $h_p \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{H}$  (cf. 2),  $g$  est vecteur propre pour l'opération de  $h_p$ . Par conséquent,  $[h_p, g] = 2g^p + \sum_{\alpha \neq p} \alpha(h_p)g^\alpha$  implique  $\alpha(h_p) = 2$ , quel que soit  $\alpha \in \text{supp}(g)$ . En particulier  $(\alpha|\beta) > 0$ , donc  $\alpha - \beta \in R$ . La minimalité de  $\beta$  implique  $\alpha - \beta \in R_+$ , alors  $\alpha - \beta \in \Gamma$  et  $\text{supp}(g) = \{\beta\} \cup \{\beta + \gamma/\gamma \in \Gamma\}$ .

De plus,  $(\alpha - \beta)(h_p) = 2 - 2 = 0$ , d'où  $(\beta|\gamma) = 0$ , quel que soit  $\gamma \in \Gamma$ .

Pour tout  $\gamma \in \Gamma$  on a  $\beta + \gamma \in R$ , alors  $\Gamma$  fait partie de la composante irréductible  $R'$  de  $R$  qui contient  $\beta$ .

D'après [1; VI, 1.4, Prop. 12] l'ensemble  $\{(\alpha|\alpha)/\alpha \in R'\}$  est  $\{1\}$  ou  $\{1, 2\}$  ou  $\{1, 3\}$ . Soit  $\gamma \in \Gamma$ . Alors :

$$(\beta + \gamma|\beta + \gamma) = (\beta|\beta) + (\gamma|\gamma),$$

d'où

$$(\beta|\beta) = (\gamma|\gamma) = 1 \quad \text{et} \quad (\beta + \gamma|\beta + \gamma) = 2.$$

De 3 (avec  $\rho = \beta$  et  $\sigma, \tau \in \Gamma$ ) résulte que  $\{\beta\} \cup \Gamma$  est une famille orthogonale. ■

### 5. Remarques

Soient  $g, \beta, \Gamma$  comme ci-dessus. Les trois assertions suivantes sont des conséquences immédiates de la preuve du lemme précédent.

L'ensemble  $\{\beta\} \cup \Gamma$  est contenu dans une composante irréductible  $R'$  de  $R$  avec  $\{(\alpha|\alpha)/\alpha \in R'\} = \{1, 2\}$ . La racine  $\beta$  est l'unique élément de  $\text{supp}(g)$  tel que  $(\beta|\beta) = 1$ .

Si  $f \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{H}$  tel que  $\{1, 2\} \not\subseteq \{(\alpha|\alpha)/\alpha \in \text{supp}(f)\}$ , alors

$$\bigoplus_{\alpha \in \text{supp}(f)} \mathbb{G}^\alpha \subseteq \mathcal{U} \cap \mathfrak{H}.$$

6. LEMME. — Soient  $g_i \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{H}$  indécomposable et  $\beta_i \in \text{supp}(g_i)$  tel que

$$(\beta_i|\beta_i) = \min \{(\alpha|\alpha)/\alpha \in \text{supp}(g_i)\}, \quad i = 1, 2.$$

Si  $\beta_1 = \beta_2$ , alors  $g_1$  et  $g_2$  sont linéairement dépendants.

Preuve. — Soit  $\lambda \in k$  tel que  $g_1^{p_1} = \lambda g_2^{p_1}$ . Alors  $\beta_1 \notin \text{supp}(g_1 - \lambda g_2)$ .

Si  $\text{supp}(g_1 - \lambda g_2)$  n'était pas vide, tous ses éléments  $\alpha$  vérifieraient  $(\alpha|\alpha) = 2$ , donc  $\mathbb{G}^\alpha \subseteq \mathcal{U} \cap \mathfrak{H}$  (cf. 4 et 5). Mais alors soit  $g_1$ , soit  $g_2$  ne serait pas indécomposable.

Par conséquent,  $\text{supp}(g_1 - \lambda g_2)$  est vide, donc  $g_1 = \lambda g_2$ . ■

7. LEMME. — Soit  $g$  un élément indécomposable de  $\mathcal{U} \cap \mathfrak{H}$  et soient  $\beta \in R_+$ ,  $\Gamma \subseteq R_+$  tels que  $\text{supp}(g) = \{\beta\} \cup \{\beta + \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$  (cf. 4). Soit  $\Gamma \neq \emptyset$ .

Si  $\varphi$  est une racine positive telle que  $\mathfrak{G}^\varphi \subseteq \mathfrak{H}$ , alors  $(\gamma \mid \varphi) = 0$  et  $\varphi + \gamma \notin R$ , quel que soit  $\gamma \in \Gamma$ .

Preuve. — On a  $h_\varphi \in \mathfrak{H}$  (cf. 2) et  $\beta \neq \varphi$  (cf. 6). L'élément indécomposable  $g$  est vecteur propre du poids  $\beta(h_\varphi)$  pour l'action de  $h_\varphi$ , alors  $\gamma(h_\varphi) = 0$  et  $(\gamma \mid \varphi) = 0$ , quel que soit  $\gamma \in \Gamma$ .

D'après 5, l'ensemble  $\{\beta\} \cup \Gamma$  est contenu dans une composante irréductible  $R'$  de  $R$  avec  $\{(\alpha \mid \alpha) \mid \alpha \in R'\} = \{1, 2\}$ . Lorsque  $\varphi \notin R'$ ,  $\varphi + \gamma \notin R$  quel que soit  $\gamma \in \Gamma$ . Lorsque  $\varphi \in R'$  et  $(\varphi \mid \varphi) = 2$ ,  $(\gamma + \varphi \mid \gamma + \varphi) = 3$ , alors  $\varphi + \gamma \notin R$  quel que soit  $\gamma \in \Gamma$ .

Soit  $\varphi \in R'$ ,  $(\varphi \mid \varphi) = 1$  et supposons qu'il existe  $\delta \in \Gamma$  tel que  $\varphi + \delta \in R$ . On déduit de 3. (avec  $\rho = \delta$ ,  $\sigma = \beta$ ,  $\tau = \varphi$ ) que  $\beta + \varphi \in R$  et  $(\beta \mid \varphi) = 0$ .

En particulier,  $\{\beta, \varphi\} \cup \Gamma$  est une famille orthonormale et  $(\varphi + \beta + \gamma \mid \varphi + \beta + \gamma) = 3$ , quel que soit  $\gamma \in \Gamma$ . Alors  $\varphi + \beta + \gamma \notin R$ , d'où  $[\mathfrak{G}^\varphi, g] = [\mathfrak{G}^\varphi, g^\beta] = \mathfrak{G}^{\varphi+\beta}$ . Donc

$$\mathfrak{G}^{\varphi+\beta} \subseteq \mathfrak{H} \quad \text{et} \quad h_{\varphi+\beta} \in \mathfrak{H} \quad (\text{cf. 2}).$$

Montrons que  $\mathfrak{G}^{-\varphi-\beta} \subseteq \mathfrak{H}$ .

Soient  $b \in \mathfrak{B}$ ,  $c \in \mathfrak{H}$  tels que  $b + c \in \mathfrak{G}^{-\varphi-\beta} - \{0\}$ . Alors

$$\text{supp}(c) \subseteq \{\varphi\beta\} \cup R_+ \cup \{0\} \quad \text{et} \quad -\varphi - \beta \in \text{supp}(c).$$

On peut choisir  $c$  tel qu'il est vecteur propre du poids  $-2$  pour l'action de  $h_{\varphi+\beta}$ .

Si  $\alpha \in \text{supp}(c) - \{-\varphi - \beta\}$ ,  $\alpha(h_{\varphi+\beta}) = -2$ . Alors  $\alpha \neq 0$ ,

$$\frac{2(\alpha \mid \varphi + \beta)}{(\varphi + \beta \mid \varphi + \beta)} = -2 \quad \text{et} \quad (\alpha \mid \varphi + \beta) = -2.$$

Cela implique que  $\varepsilon := \alpha + \varphi + \beta$  est une racine et

$$(\varphi + \beta \mid \varepsilon) = (\varphi + \beta \mid \alpha) + (\varphi + \beta \mid \varphi + \beta) = 0.$$

Mais alors on aurait :

$$(\alpha \mid \alpha) = (\varepsilon - (\varphi + \beta) \mid \varepsilon - (\varphi + \beta)) = (\varepsilon \mid \varepsilon) + 2 \geq 3.$$

D'où

$$\text{supp}(c) = \{-\varphi - \beta\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{G}^{-\varphi-\beta} \subseteq \mathfrak{H}.$$

En plus,  $[\mathfrak{G}^\varphi, \mathfrak{G}^{-\varphi-\beta}] = \mathfrak{G}^{-\beta} \subseteq \mathfrak{H}$ .

Soit  $f \in \mathfrak{G}^{-\beta} - \{0\}$ . Alors  $[f, g] \in \mathfrak{H}$  et  $\text{supp}([f, g]) = \{0\} \cup \Gamma$ . Plus précisément, la composante de  $[f, g]$  dans  $\mathfrak{G}^0$  est un multiple scalaire  $\lambda h_\beta$  de  $h_\beta$ . Alors  $f' := [f, g] - \lambda h_\beta \in \mathfrak{H}$ ,

$$[f', g] \in \mathfrak{H} \quad \text{et} \quad \text{supp}(f') = \Gamma.$$

Puisque  $\beta + \gamma + \delta \notin R$ , quel que soient  $\gamma, \delta \in \Gamma$  (cf. 4, 5), on a

$$[f', g] = [f', g^\beta].$$

Donc  $\text{supp}([f', g]) = \{\beta + \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ . Puisque

$$\{(\beta + \gamma \mid \beta + \gamma) / \gamma \in \Gamma\} = \{2\},$$

cela implique  $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{G}^{\beta+\gamma} \subseteq \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$  (cf. 5).

Mais cela contredit le fait que  $g$  est indécomposable.

## 8. Preuve du théorème

Il suffit de montrer qu'il existe une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{B}$  qui normalise  $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$  (cf. [4; 13, Exercice 1]).

Soient  $L := \dim_k(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}) - |\{\alpha \in R_+ / \mathfrak{G}^\alpha \subseteq \mathfrak{H}\}| + 1$  et  $M$  le minimum de l'ensemble  $\{|\text{supp}(f)| \mid f \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H} \text{ indécomposable et } |\text{supp}(f)| \neq 1\}$  lorsque cet ensemble n'est pas vide, autrement on pose  $M := 1$ . Alors  $(L, M) = (1, 1)$  si et seulement si  $\mathfrak{S}$  normalise  $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$ .

Les expressions  $\text{supp}(f)$ ,  $\mathfrak{G}^\alpha$ ,  $L$ ,  $M$  dépendent du tore  $\mathfrak{S}$ . Écrivons donc  $L = L(\mathfrak{S})$ ,  $M = M(\mathfrak{S})$ .

Supposons  $(L(\mathfrak{S}), M(\mathfrak{S})) \neq (1, 1)$ . Alors  $M(\mathfrak{S}) > 1$ . Soit  $g \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$  indécomposable tel que  $|\text{supp}(g)| = M(\mathfrak{S})$ . Soient  $\beta \in \text{supp}(g)$  et  $\Gamma \subseteq R_+$  tels que  $\text{supp}(g) = \{\beta\} \cup \{\beta + \gamma / \gamma \in \Gamma\}$  (cf. 4).

Choisissons  $\delta \in \Gamma$  et  $x = x^\delta \in \mathfrak{G}^\delta$  tel que  $[x, g^\beta] = -2g^{\beta+\delta}$ . L'élément  $h_\delta + x$  est semi-simple et commute avec tout élément de  $\text{Ker}(\delta) \cap \mathfrak{S}$ . Par conséquent  $\mathfrak{E} := (\text{Ker}(\delta) \cap \mathfrak{S}) \oplus k(h_\delta + x)$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{B}$ .

Puisque  $g$  est vecteur propre pour l'action de  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H}$  (cf. 1), on a  $(\beta + \delta)(h) = \beta(h)$ , donc  $\beta(h) = 0$ , quel que soit  $h \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{H}$ . Alors  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{E}$ .

En 8.1, je montrerai qu'un vecteur propre pour  $\mathfrak{S}$  dans  $\mathcal{U} \cap \mathfrak{H}$  est aussi vecteur propre pour  $\mathfrak{E}$  (alors  $L(\mathfrak{E}) \leq L(\mathfrak{S})$ ).

En 8.2, je montrerai que le nombre d'éléments du support de  $g$  par rapport à  $\mathfrak{E}$  est plus petit que  $M(\mathfrak{S})$  (alors soit  $M(\mathfrak{E}) < M(\mathfrak{S})$ , soit  $L(\mathfrak{E}) < L(\mathfrak{S})$ ).

Ainsi  $(L(\mathfrak{E}), M(\mathfrak{E}))$  est plus petit (dans l'ordre lexicographique) que  $(L(\mathfrak{S}), M(\mathfrak{S}))$ .

Après un nombre fini de répétitions de la construction  $(\sim)$  on trouve une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{I}$  avec  $(L(\mathfrak{I}), M(\mathfrak{I})) = (1, 1)$ .

8.1. Soient  $\varphi \in R_+$  et  $f \in \mathfrak{H}$  tels que  $\text{supp}(f) = \{\varphi\}$ . Alors  $\varphi + \delta \notin R$  et  $(\varphi | \delta) = 0$  (cf. 7) d'où  $[x, f] = 0$  et  $[h_\delta, f] = 0$ . Par conséquent  $f$  est vecteur propre pour l'action de  $\mathfrak{E}$ .

8.2. Soient  $s \in \text{Ker}(\delta) \cap \mathfrak{S}$ ,  $\lambda \in k$  et  $\gamma \in \Gamma$ . Puisque  $\delta + \beta + \gamma \notin R$  (cf. 4, 5) on a  $[x, g^{\beta+\gamma}] = 0$ .

Si  $\gamma \neq \delta$ ,  $[s + \lambda(h_\delta + x), g^{\beta+\gamma}] = (\beta + \gamma)(s + \lambda(h_\delta + x))g^{\beta+\gamma}$ , alors  $g^{\beta+\gamma}$  est vecteur du poids  $\beta + \gamma$  pour l'action de  $\mathfrak{E}$ . (Rappelons que  $\beta + \gamma$  est une fonction linéaire sur  $\mathfrak{B}$  qui s'annule sur  $\mathcal{U}$ ).

De plus,

$$[s + \lambda(h_\delta + x), g^\beta + g^{\beta+\delta}] = \beta(s)(g^\beta + g^{\beta+\delta}) + 2\lambda g^{\beta+\delta} + \\ + \lambda[x, g^\beta] = \beta(s + \lambda(h_\delta + x))(g^\beta + g^{\beta+\delta}) + 2\lambda g^{\beta+\delta} - 2\lambda g^{\beta+\delta},$$

alors  $g^\beta + g^{\beta+\delta}$  est vecteur propre du poids  $\beta$  pour l'action de  $\mathfrak{E}$ .

En conclusion : le nombre d'éléments du support de  $g$  par rapport à  $\mathfrak{E}$  est  $|\Gamma|$ . ■

## 9. Preuve du corollaire

D'après [3; p. 96] le groupe  $B \cap H$  est le produit semi-direct d'un sous-groupe réductif  $K$  avec  $U \cap H$ . Comme sous-groupe réductif d'un groupe résoluble,  $K$  ne contient que des éléments semi-simples.

Du théorème résulte que  $N_B(U \cap H)$  est connexe : en effet, tout sous-groupe de  $B$  contenant un tore maximal est connexe. Alors il existe un tore maximal  $T$  de  $N_B(U \cap H)$  qui contient  $K$  (cf. [4, 19.4]). Par conséquent  $B \cap H = (U \cap H)(T \cap H)$  et  $T$  normalise  $B \cap H$ . D'après le théorème  $T$  est un tore maximal de  $B$ . ■

## 10. Remarque

Soit  $T$  un tore maximal de  $B$  comme dans le corollaire. Soit  $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{G}^\alpha$  la décomposition de  $\mathfrak{G}$  dans des espaces propres de  $T$ . Alors  $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H} = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathfrak{G}^\alpha$ , où  $A$  est un sous-ensemble clos de  $R_+$ . Le lemme 2 implique que  $\sum_{\alpha \in A} [\mathfrak{G}^\alpha, \mathfrak{G}^{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{I} \cap \mathfrak{H}$ .

## REFERENCES

- [1] BOURBAKI (N.). — Groupes et algèbres de Lie. Chap. IV-VI, Paris : Hermann 1968.
- [2] DECONCINI (C.) et PROCESI (C.). — Complete Symmetric Varieties. Preprint 1983.
- [3] HOCHSCHILD (G.). — Introduction to Affine Algebraic Groups. San Francisco : Holden Day 1971.
- [4] HUMPHREYS (J.). — Linear Algebraic Groups. New York, Heidelberg, Berlin : Springer 1975.
- [5] KRÄMER (M.). — Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen. Compositio Math. 38, 129-153 (1979).
- [6] LUNA (D.) et VUST (Th.). — Plongements d'espaces homogènes. Comm. Math. Helv. 58, 186-245 (1983).
- [7] PAUER (F.). — Plongements normaux de l'espace homogène  $SL(3)/SL(2)$ . Actes du 108<sup>e</sup> Congrès National des Sociétés Savantes, Grenoble 1983. A paraître.
- [8] VINBERG (E. B.) et KIMELFELD (B. N.). — Homogeneous Domains on Flag Manifolds and Spherical Subgroups of Semisimple Lie Groups. Funct. Analysis and Appl. 12, 168-174 (1978).
- [9] VUST (Th.). — Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes. Bull. Soc. Math. France 102, 317-334 (1974).