

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL MORALES

## **Polyèdre de Newton et genre géométrique d'une singularité intersection complète**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 112 (1984), p. 325-341

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1984\\_\\_112\\_\\_325\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__325_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

POLYÈDRE DE NEWTON  
ET GENRE GÉOMÉTRIQUE  
D'UNE SINGULARITÉ INTERSECTION COMPLÈTE

PAR

M. MORALES (\*)

RÉSUMÉ. — Nous donnons une condition suffisante sur une suite  $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$  ayant des polyèdres de Newton  $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$  pour que le germe  $H_k$  défini par  $f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0$  soit une intersection complète à singularité isolée. Nous calculons le genre géométrique de la singularité  $p_g(H_k)$  en fonction des polyèdres de Newton  $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$  par une formule élémentaire.

ABSTRACT. — Let  $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$  with Newton polyhedra  $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+, H_k$  the germ at the origin defined by the equations  $f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0$ . We give a condition in  $f_1, \dots, f_k$  in order to have an isolated singularity in  $H_k$  and we calculate the geometric genus of the singularity  $H_k$  in function of the Newton polyhedra  $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$  by an elementary formula.

### Introduction

Soit  $(X, m)$  un germe de variété algébrique Cohen-Macaulay de dimension  $d$  ayant une singularité isolée en  $m$ .  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  une résolution des singularités de  $X$ . Le faisceau  $R^{d-1} \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$  est concentré en  $m$  et l'on définit le genre géométrique de  $X$  par  $p_g(X) = (-1)^{d-1} \lg (R^{d-1} \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_m$ ; c'est un invariant analytique de la singularité. Par exemple, s'il est nul on dit que la singularité est rationnelle (cf. Artin) et divers auteurs ont étudié les propriétés des singularités de genre géométrique petit. Principalement H. Laufer, S. T. Yau.

Nous donnons ici une condition suffisante sur une suite  $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] = A$  ayant des polyèdres de Newton  $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$  pour que le germe  $H_k$  défini par  $f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0$  soit

(\*) Texte reçu le 10 mai 1983, révisé le 14 juin 1984.

M. MORALES, Institut Fourier, B. P. n° 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.

une intersection complète à singularité isolée et nous établissons une relation entre le genre géométrique  $p_g(H_k)$  du germe  $H_k$  et le polynôme

$$\lg(A/\overline{Q_1^{n_1} Q_2^{n_2} \dots Q_k^{n_k}}) \quad \text{où } Q_i = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_i^+ \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{C} x^\alpha.$$

Dans 2.4, nous utilisons les résultats combinatoires résumés dans 1.5 pour calculer le genre géométrique  $p_g(H_k)$  en fonction des polyèdres de Newton  $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$ . Ceci généralise le résultat obtenu pour  $k=1$  dans [14] et [6].

Lorsque  $\Gamma^+ = \Gamma_1^+ = \dots = \Gamma_{d-1}^+$  nous précisons davantage notre condition sur la suite  $f_1, \dots, f_k$ . D'après le théorème 2.7 [10] la suite des genres géométriques  $p_g(H_i)$ ,  $i=1, \dots, d-1$ , et la multiplicité de l'idéal  $Q$  déterminent le polynôme  $\lg(A/\overline{Q^n})$  où

$$Q = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma^+ \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{C} x^\alpha.$$

Ces résultats sont à comparer avec ceux de [5] dans la situation globale.

## 1. Notations et rappels

1.1. Considérons l'anneau  $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$  des polynômes à  $d$  variables sur le corps des nombres complexes. Soit  $m$  l'idéal maximal engendré par  $x_1, \dots, x_d$ .  $Q$  désignera un idéal  $m$ -primaire engendré par des monômes. On pose  $X = \mathbb{C}^d$ .

1.2. DÉFINITION. — Soit  $I$  un idéal de  $A$  engendré par des monômes, nous appellerons :

(1) support de l'idéal  $I$  :

$$\text{Supp}(I) = \{ \alpha \in \mathbb{Z}^d \mid x^\alpha \in I \},$$

où  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$ .

(2) polyèdre de Newton de  $I$  :

$$\Gamma^+(I) = \text{Enveloppe convexe dans } \mathbb{R}^d \text{ de l'ensemble } \bigcup_{\alpha \in \text{Supp}(I)} \{ \alpha \} + \mathbb{R}_+^d.$$

(3) Frontière de Newton de  $I$  :

$$\Gamma(I) \text{ la réunion des faces compactes de } \Gamma^+(I).$$

1.2.1. DÉFINITION. — Soit  $f(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$  :

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}.$$

Soit  $I(f)$  l'idéal engendré par les monômes  $x^\alpha$  tels que  $c_\alpha \neq 0$ . Alors, on appellera polyèdre de Newton de  $f$  (resp. frontière de Newton de  $f$ ) le polyèdre de Newton (resp. la frontière de Newton) de  $I(f)$ .

1.3. LEMME ([4], p. 28, [13], I-13). — Soit  $I$  un idéal engendré par des monômes, alors la clôture intégrale  $\bar{I}$  de l'idéal  $I$  est :

$$\bar{I} = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma^+(I) \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{C} x^\alpha.$$

Autrement dit  $\bar{I}$  est engendré par des monômes et

$$\text{Supp}(\bar{I}) = \Gamma^+(I) \cap \mathbb{Z}^d.$$

1.4. DÉFINITION. — Soit  $\Delta$  un polyèdre convexe compact dans  $\mathbb{R}^d$ , on notera  $n\Delta$  le polyèdre  $n$ -fois homothétique de  $\Delta$ ,  $l(\Delta)$  le nombre de points dans  $\Delta \cap \mathbb{Z}^d$  et  $l(\overset{\circ}{\Delta})$  le nombre des points à coordonnées entières se trouvant à l'intérieur de  $\Delta$ .

1.5. PROPOSITION ([2], p. 131, [5], [3], [1], [8]). — Soit  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  des polyèdres convexes compacts dont les sommets appartiennent à  $\mathbb{Z}^d$ , aucun n'étant contenu dans un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^d$  de dimension  $< d$ . Alors il existe un polynôme  $R[T_1, \dots, T_k] \in \mathbb{Q}[T_1, \dots, T_k]$  de degré  $d$  tel que :

$$l(n_1 \Delta_1 + \dots + n_k \Delta_k) = R(n_1, \dots, n_k), \quad \forall n_i \text{ entiers } \geq 0.$$

De plus,

Loi de réciprocité :

$$(-1)^d R(-n_1, \dots, -n_k) = \overset{0}{\overbrace{l(n_1 \Delta_1 + \dots + n_k \Delta_k)}}^{\circ}, \quad \forall n_i \text{ entiers positifs.}$$

La preuve de cette proposition est une conséquence de l'étude de la cohomologie sur les variétés toriques et de la dualité de Serre.

## 2. Intersections complètes non dégénérées par rapport à leurs polyèdres de Newton

2.1. DÉFINITION [5]. — Soit  $f_l \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ ,  $l=1, \dots, k$  une suite de polynômes,  $\Gamma^+$  leurs polyèdres de Newton. Soit  $Q_l = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_l^+ \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{C} x^\alpha$  de sorte que  $Q_l = \overline{I(f_l)}$ , nous supposons que  $Q_l$  est primaire pour  $m = (x_1, \dots, x_d)$ . Pour  $a \in (\mathbb{R}_+)^d$  on pose :

$$m^l(a) = \min \{ \langle a, \alpha \rangle \mid \alpha \in \Gamma_l^+ \}$$

et

$$f_i^a = \sum_{\alpha \in \Gamma_i^+, \langle a, \alpha \rangle = m^i(a)} A_{i, \alpha} x^\alpha.$$

Nous dirons que la suite  $f_1, \dots, f_k$  est non dégénérée par rapport à ses polyèdres de Newton si pour tout  $1 \leq j \leq k$  et tout  $a \in (\mathbb{R}_+ - \{0\})^d$  la condition suivante est vérifiée :

en tout point  $q \in (\mathbb{C} - \{0\})^d$  tel que  $f_1^a(q) = \dots = f_j^a(q) = 0$  les différentielles  $df_1^a(q), \dots, df_j^a(q)$  sont linéairement indépendantes dans l'espace tangent à  $\mathbb{C}^d$  en  $q$ .

Dans ce cas, nous dirons aussi que le germe  $H_k$  défini au voisinage de l'origine par

$$H_k = \{x \in \mathbb{C}^d \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\}$$

est non dégénéré par rapport à  $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$ . Pour des polyèdres de Newton donnés la notion de non-dégénérescence est générique, la démonstration de [5], th. 2, s'adapte à notre situation.

2.2. DÉFINITION [10]. — Soit  $Y$  une variété quasi projective sur le corps  $k$ , de dimension  $d$ , ayant une singularité normale au point fermé  $m$ ,  $\pi: \tilde{Y} \rightarrow Y$  un morphisme birationnel propre tel que la restriction  $\pi: \tilde{Y} - \pi^{-1}(m) \rightarrow Y - \{m\}$  soit un isomorphisme et  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ -module inversible. On pose :

$$-\chi_\pi(\mathcal{L}) = \dim_k (i_* i^* \pi_* \mathcal{L} / \pi_* \mathcal{L}) + \sum_{j=1}^{d-1} (-1)^{j+1} \lg(R^j \pi_* \mathcal{L})_m,$$

où  $i: Y - \{m\} \hookrightarrow Y$  est l'inclusion canonique.

2.3. DÉFINITION. — (1) Si  $Y$  est une variété à singularité isolée et Cohen-Macaulay de dimension  $d \geq 2$  et  $f: \tilde{Y} \rightarrow Y$  une résolution des singularités, nous noterons  $p_g(Y)$  le genre géométrique de la singularité

$$p_g(Y) = (-1)^{d-1} \lg R^{d-1} f_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}};$$

rappelons que cet invariant dépend uniquement de la singularité et non de  $f$  et que  $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}} = 0$  pour  $1 \leq i < d-2$  car  $Y$  est Cohen-Macaulay de sorte que  $p_g(Y) = \chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{Y}})$  (voir 2.2).

(2) Si  $Y$  est une courbe réduite en un point fermé  $m$  nous poserons

$$p_g(Y) = \delta(Y) = \lg(\overline{\mathcal{O}_{Y, m}} / \mathcal{O}_{Y, m}),$$

où  $\overline{\mathcal{O}_{Y, m}}$  est le normalisé de  $\mathcal{O}_{Y, m}$  et nous l'appellerons genre géométrique de la courbe  $Y$ .

2.4. THÉORÈME. — Soit  $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$  une suite non dégénérée par rapport à ses polyèdre de Newton  $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$ . Alors le germe  $H_k$  défini par

$$H_k = \{ x \in \mathbb{C}^d \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0 \}$$

est une intersection complète à singularité isolée et son genre géométrique  $p_g(H_k)$  est donné par :

$$p_g(H_k) = (-1)^{d-k-1} [R(\Gamma_1^+ + \Gamma_2^+ + \dots + \Gamma_k^+) - \sum_{i=1}^k R(\Gamma_1^+ + \dots + \Gamma_i^+ + \dots + \Gamma_k^+) + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^k R(\Gamma_i^+)]$$

où  $R(\Delta)$  désigne le nombre de points à coordonnées entières strictement positives se trouvant en dessous ou sur la frontière de  $\Delta$ , et le signe  $\hat{\phantom{x}}$  signifie que ce terme n'apparaît pas dans la somme.

2.4.1. La démonstration du théorème utilise d'une part les techniques développées dans [10] pour montrer le théorème 2.1 où l'on travaillait avec un seul idéal primaire; d'autre part la théorie des variétés toriques ([4], [2]) permet de préciser dans notre cas les conditions d'application de ces techniques.

Le théorème est une conséquence de la proposition et des lemmes suivants :

2.5. PROPOSITION (Résolution des singularités) (voir aussi [5]). — Soit  $f_1, \dots, f_k$  une suite non dégénérée par rapport à ses polyèdres de Newton  $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$ . Posons

$$H_j = \{ x \in \mathbb{C}^d \mid f_1(x) = \dots = f_j(x) = 0 \}.$$

Il existe un éventail  $\Sigma$  qui est une décomposition de  $(\mathbb{R}_+)^d$  tel que si on note  $X_\Sigma$  la variété torique définie par  $\Sigma$ , et  $\pi : X_\Sigma \rightarrow X = \mathbb{C}^d$  le morphisme induit par la décomposition de  $(\mathbb{R}_+)^d$  on ait :

(1)  $X_\Sigma$  est lisse et la restriction

$$\pi : X_\Sigma - \pi^{-1}(0) \rightarrow X - \{0\} \text{ est un isomorphisme.}$$

(2)  $\mathcal{O}_i \cdot \mathcal{O}_{X_\Sigma}$  est un faisceau inversible.  $\mathcal{O}_i \cdot \mathcal{O}_{X_\Sigma} = \mathcal{O}_{X_\Sigma}(-D^{(i)})$ ,  $D^{(i)}$  étant un diviseur exceptionnel effectif.

(3)  $\forall j=1, \dots, k$  la transformée stricte  $\tilde{H}_j$  de  $H_j$  est lisse au voisinage du diviseur exceptionnel et coupe transversalement le diviseur exceptionnel.

Plus précisément, soit  $\pi_j : \tilde{H}_j \rightarrow H_j$  la restriction de  $\pi$  à  $\tilde{H}_j$ , alors  $\text{div}(f_{j+1} \circ \pi_j) = D^{(j+1)} \cap \tilde{H}_j + \tilde{H}_j + \tilde{H}_{j+1}$ .

D'autre part, notons par  $\tilde{H}^{(j)}$  la transformée stricte par  $\pi$  de l'hyper-surface  $H^{(j)} = \{x \in \mathbb{C}^d \mid f_j(x) = 0\}$ . Alors

$$\tilde{H}_j = \tilde{H}^{(1)} \cap \tilde{H}^{(2)} \cap \dots \cap \tilde{H}^{(j)} \quad \text{et} \quad \text{div}(f_j \circ \pi) = D^{(j)} + \tilde{H}^{(j)}.$$

Cette proposition sera démontrée plus loin.

2.6. Considérons  $X = \mathbb{C}^d$  comme un ouvert dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^d$  et notons  $\tilde{X}$  la variété obtenue par la modification de l'origine  $\pi : X_{\Sigma} \rightarrow X = \mathbb{C}^d$ . Nous noterons encore par  $\pi$  le morphisme  $\pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^d$ .

Considérons les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
 D^{(t+1)} & \xrightarrow{c_0} & \tilde{X} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^d \\
 \uparrow \wr_{d_0} & & \uparrow \wr_{l_0} & & \uparrow \\
 D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_1 & \xrightarrow{c_1} & \tilde{H}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & H_1 \\
 \uparrow \wr_{d_1} & & \uparrow \wr_{l_1} & & \uparrow \\
 D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_2 & \xrightarrow{c_2} & \tilde{H}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & H_2 \\
 & & \dots & & \\
 \uparrow \wr_{d_{t-1}} & & \uparrow \wr_{l_{t-1}} & & \uparrow \\
 D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t & \xrightarrow{c_t} & \tilde{H}_t & \xrightarrow{\pi_t} & H_t
 \end{array}$$

Avec les notations ci-dessus, nous avons :

2.6.1. LEMME 1 :

$$P_{\theta}(H_{t+1}) = -\chi(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t, (l_0 \circ \dots \circ l_{t-1} \circ c_t)^* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^-(D^{(t+1)})).$$

2.6.2. LEMME 2 :

$$\begin{aligned}
 -\chi(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_p(l_0 \circ \dots \circ l_{t-1} \circ c_t)^* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D^{(t+1)})) \\
 = \varepsilon [ \prod_{j=1}^{t+1} (1 - e^{D^{(j)}}) \cap Td(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) ].
 \end{aligned}$$

2.6.3. LEMME 3 :

$$\lg(A/\overline{Q_1^{n_1} Q_2^{n_2} \dots Q_k^{n_k}}) = \varepsilon [ (1 - e^{-\sum_{i=1}^k n_i D^{(i)}}) \cap Td(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) ].$$

2.6.4. LEMME 4. — (1) Pour  $n_1, \dots, n_k$  entiers positifs ou nuls la fonction  $\tilde{I}(n_1 \Gamma_1^+ + \dots + n_k \Gamma_k^+) =$  nombre de points à coordonnées entières positives ou nulles se trouvant en dessous de  $n_1 \Gamma_1^+ + \dots + n_k \Gamma_k^+$  coïncide avec les valeurs d'un polynôme  $F(n_1, \dots, n_k)$  de degré  $d$  en  $n_1, \dots, n_k$ .

(2) Soit  $J \subset \{1, \dots, k\}$  et  $e_1, \dots, e_k$  la base canonique de  $\mathbb{R}^k$ , la valeur  $(-1)^d F(-\sum_{j \in J} e_j)$  est le nombre des points à coordonnées entières strictement positives se trouvant en dessous ou sur les faces compactes de  $\sum_{j \in J} \Gamma_j^+$ .

Nous poserons

$$R(\sum_{j \in J} \Gamma_j^+) = (-1)^d F(-\sum_{j \in J} e_j).$$

2.6.5. LEMME 5 [6]. — Soit  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ . On pose  $F_0 = F$  et pour  $1 \leq j \leq k$  :

$$F_j(n_1, \dots, n_k) = F_{j-1}(n_1, \dots, n_k) - F_{j-1}(n_1, \dots, n_j - 1, \dots, n_k).$$

Alors

$$\begin{aligned}
 F_k(0, 0, \dots, 0) &= F(0) - \sum_{i=1}^k F(-e_i) \\
 &+ \sum_{1 \leq i < j \leq k} F(-e_i - e_j) + \dots + (-1)^k F(-e_1 - e_2 - \dots - e_k),
 \end{aligned}$$

où  $e_1, \dots, e_k$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^k$ .

2.6.6. LEMME 6. — Avec les notations des lemmes 3, 4 et 5 on a :

$$F(n_1, \dots, n_k) = \lg(A/\overline{Q_1^{n_1} \dots Q_k^{n_k}})$$

et

$$F_k(0, \dots, 0) = -\varepsilon [ \prod_{j=1}^k (1 - e^{D^{(j)}}) \cap Td(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) ].$$

2.7. Démonstration des lemmes 3 à 6.

2.7.1. Les lemmes 5 et 6 sont obtenus par un calcul direct.



2.7.2. *Preuve du lemme 4.* — Soit  $\Gamma^+ = n_1 \Gamma_1^+ + \dots + n_k \Gamma_k^+$  et  $\Gamma$  la réunion des faces compactes de  $\Gamma^+$ . Posons  $\Delta_1$  l'enveloppe convexe de  $\Gamma$  et  $\Delta_2$  l'enveloppe convexe de  $\Gamma \cup \{0\}$ , il suffira de remarquer que

$$I(\Gamma^+) = I(\Delta_2) - I(\Delta_1)$$

et d'appliquer la proposition 1.5.

2.7.3. *Preuve du lemme 3.* — Nous appliquons le théorème 1.4 de [10] à  $\pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^d$ ,  $L = \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ ,  $D = \sum_{i=1}^k n_i D^{(i)}$  et obtenons

$$\chi_\pi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) - \chi_\pi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\sum_{i=1}^k n_i D^{(i)})) = \varepsilon [(1 - e^{-\sum_{i=1}^k n_i D^{(i)}}) \cap Td(\mathcal{O}_{\tilde{X}})]$$

et nous avons ([4], Cor. 1, page 44) :

$$\begin{aligned} \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} &= \mathcal{O}_X, & R^i \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} &= 0 \text{ pour } i > 0, \\ \pi_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\sum_{i=1}^k n_i D^{(i)})) (C^d) &= \overline{Q_1^{n_1} Q_2^{n_2} \dots Q_k^{n_k}} \end{aligned}$$

et

$$R^i \pi_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\sum_{i=1}^k n_i D^{(i)})) = 0 \text{ pour } i > 0,$$

ce qui implique vu la définition de  $\chi_\pi$  (voir 2.2) que :

$$\lg(A/\overline{Q_1^{n_1} \dots Q_k^{n_k}}) = \varepsilon [(1 - e^{-\sum_{i=1}^k n_i D^{(i)}}) \cap Td(\mathcal{O}_{\tilde{X}})]$$

et finit la preuve du lemme 3.

2.8. *Preuve du lemme 1.* — Remarquons que

$$\operatorname{div}(f_{i+1} \circ \pi_i) = D^{(i+1)} \cap \tilde{H}_i + \tilde{H}_{i+1},$$

$\tilde{H}_i$  et les composantes de  $D^{(i+1)}$  sont non singulières, et l'intersection  $\tilde{H}_i \cap D^{(i+1)}$  est transverse et est un diviseur dans  $\tilde{H}_i$ . Dans l'anneau de Chow de  $\tilde{H}_i$ , on aura

$$D^{(i+1)} \cap \tilde{H}_i = (l_0 \circ \dots \circ l_{i-1})^* D^{(i+1)}.$$

Les diviseurs  $D^{(i+1)} \cap \tilde{H}_i$  et  $-\tilde{H}_{i+1}$  sont linéairement équivalents au voisinage de  $D^{(i+1)} \cap \tilde{H}_i$  et par conséquent les faisceaux  $\mathcal{O}_{\tilde{H}_i}(D^{(i+1)} \cap \tilde{H}_i)$  et  $\mathcal{O}_{\tilde{H}_i}(-\tilde{H}_{i+1})$  sont isomorphes au voisinage du diviseur exceptionnel.

Par ailleurs, les suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(-\tilde{H}_{t+1}) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{H}_t} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{H}_{t+1}} \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{H}_t} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t) \rightarrow c_t^*(\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t)) \rightarrow 0$$

donnent les égalités :

$$\chi_{\pi_t}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}) - \chi_{\pi_t}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(-\tilde{H}_{t+1})) = \chi_{\pi_t}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_{t+1}}),$$

$$\chi_{\pi_t}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}) - \chi_{\pi_t}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t))$$

$$= -\chi(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t, c_t^*(\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t)))$$

et on en déduit que :

$$\chi_{\pi_t}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_{t+1}}) = -\chi(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t, c_t^*(\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t)))$$

or  $\pi_t|_{\tilde{H}_{t+1}} = \pi_{t+1} : \tilde{H}_{t+1} \rightarrow H_{t+1}$  est une résolution des singularités et  $H_{t+1}$  est normale donc :

$$\chi_{\pi_{t+1}}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_{t+1}}) = p_g(H_{t+1})$$

ce qui finit la preuve du lemme 1 (voir aussi [10], lemme 2. 2).

Avant de passer à la démonstration du lemme 2, voici un lemme préliminaire.

2. 9. 1. LEMME. — Pour  $0 \leq j \leq t$  nous avons

$$(c_0 \circ d_0 \circ \dots \circ d_{j-1})_* Td(\mathcal{O}_{D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_j})$$

$$= \prod_{i=1}^j (1 - e^{D^{(i)}}) \cap (1 - e^{-D^{(t+1)}}) \cap Td(\mathcal{O}_{\tilde{X}}).$$

*Preuve.* — La preuve se fait par récurrence sur  $j$ . Pour  $j=0$  c'est la formule d'adjonction. Supposons le lemme vrai pour  $j-1$  et prouvons-le pour  $j$ .

$$(c_0 \circ d_0 \circ \dots \circ d_{j-1})_* Td(\mathcal{O}_{D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_j})$$

$$= (c_0 \circ d_0 \circ \dots \circ d_{j-2})_* \circ (d_{j-1})_* Td(\mathcal{O}_{D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_j})$$

$$= c_0 \circ d_0 \circ \dots \circ d_{j-2})_* [(1 - e^{-(c_0 \circ d_0 \circ \dots \circ d_{j-2})_* \tilde{H}^{(j)}}) \cap Td(\mathcal{O}_{D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_{j-1}})]$$

(par la formule d'adjonction et le fait que  $D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_j$  est un diviseur dans  $D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_{j-1}$  et en fait  $D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_j = (c_0 \circ d_0 \circ \dots \circ d_{j-2})_* H^{(j)}$  dans l'an-

neau de Chow de  $D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_{j-1}$ )

$$\begin{aligned} &= (1 - e^{-\tilde{H}^{(j)}}) \cap (c_0 \circ d_0 \circ \dots \circ d_{j-2})_* (Td(\mathcal{O}_{D^{(t+1)}} \cap \tilde{H}_{j-1})) \\ &= (1 - e^{-\tilde{H}^{(j)}}) \left( \prod_{i=1}^{j-1} (1 - e^{D^{(i)}}) \cap (1 - e^{-D^{(t+1)}}) \cap Td(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \right) \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. Or,

$$\operatorname{div}(f_j \circ \pi) = D^{(j)} + \tilde{H}^{(j)}$$

au voisinage du diviseur exceptionnel donc  $D^{(j)}$  est linéairement équivalent à  $-\tilde{H}^{(j)}$ . Nous remplaçons dans la formule précédente et finissons la preuve du lemme.

2.9.2. *Preuve du lemme 2.* — Les notations sont celles de 2.6 :

$$\begin{aligned} &\chi(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t, (l_0 \circ l_1 \circ \dots \circ l_{t-1} \circ c_t)_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}^{-1} D^{(t+1)}) \\ &= \varepsilon [\operatorname{ch}(l_0 \circ \dots \circ l_{t-1} \circ c_t)_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}}^{-1}(D^{(t+1)})) \cap Td(\mathcal{O}_{D^{(t+1)}} \cap \tilde{H}_t)] \end{aligned}$$

(théorème de Riemann-Roch)

$$= \varepsilon [\operatorname{ch} \mathcal{O}_{\tilde{X}}^{-1}(D^{(t+1)}) \cap (l_0 \circ \dots \circ l_{t-1} \circ c_t)_* Td(\mathcal{O}_{D^{(t+1)}} \cap \tilde{H}_t)]$$

(formule de projection)

$$= \varepsilon [e^{D^{(t+1)}} \cap (c_0 \circ d_0 \circ \dots \circ d_{t-1})_* Td(\mathcal{O}_{D^{(t+1)}} \cap \tilde{H}_t)]$$

(par 2.9.1)

$$\begin{aligned} &= \varepsilon [e^{D^{(t+1)}} \cap \left( \prod_{j=1}^t (1 - e^{D^{(j)}}) \right) \cap (1 - e^{-D^{(t+1)}}) \cap Td(\mathcal{O}_{\tilde{X}})] \\ &= -\varepsilon \left[ \left( \prod_{j=1}^{t+1} (1 - e^{D^{(j)}}) \right) \cap Td(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \right]. \end{aligned}$$

2.10. *Preuves des assertions 1 et 2 de la proposition 2.5.* — Soit  $z \in (\mathbb{R}_+)^d$ . On pose  $m^i(a) = \min_{\alpha \in \Gamma_i^+} \langle a, \alpha \rangle$ . Dans  $(\mathbb{R}_+)^d$  nous définissons la relation d'équivalence :

$$\begin{aligned} a \sim a' &\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, k, \\ \{ \alpha \in \Gamma_i^+ \mid \langle a, \alpha \rangle = m^i(a) \} &= \{ \alpha \in \Gamma_i^+ \mid \langle a', \alpha \rangle = m^i(a') \}. \end{aligned}$$

L'ensemble des clôtures de classes d'équivalence des éléments  $a \in (\mathbb{R}_+)^d$  forment un éventail  $\Sigma^1$  qui est une décomposition de  $(\mathbb{R}_+)^d$ . Le morphisme induit  $\eta : X_{\Sigma^1} \rightarrow \mathbb{C}^d$  est l'éclatement normalisé de l'idéal  $Q_1 Q_2 \dots Q_k$ , où  $Q_i = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_i^+} z^\alpha \mathbb{C} x^\alpha$ .

D'autre part, soit  $\Sigma_i$  l'éventail correspondant à l'éclatement normalisé de l'idéal  $Q_i$ ,  $\Sigma^1$  est une décomposition de  $\Sigma_i$  pour  $i=1, \dots, k$ . Nous savons ([4], p. 35) qu'il existe un éventail  $\Sigma$  plus fin que  $\Sigma^1$  tel que la variété torique  $X_\Sigma$  est non singulière et le morphisme  $\pi : X_\Sigma \rightarrow X = \mathbb{C}^d$  est un isomorphisme en dehors de  $\pi^{-1}(0)$ .

Les assertions de la proposition étant locales, soit  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\sigma$  engendré par les vecteurs  $a^1, a^2, \dots, a^d$ , alors  $X_\sigma = \text{Spec } \mathbb{C}[y_1, \dots, y_d]$  et le morphisme  $\pi : X_\sigma \rightarrow X$  est décrit par

$$x_i = y_1^{a_i^1} y_2^{a_i^2} \dots y_d^{a_i^d}$$

pour  $i=1, \dots, d$ .

Il est clair puisque l'éventail  $\Sigma$  est une subdivision de l'éventail  $\Sigma_i$  pour  $i=1, \dots, k$  que l'idéal  $Q_i \cdot \mathcal{O}_{X_\sigma}$  est inversible et en fait

$$Q_i \cdot \mathbb{C}[y_1, \dots, y_d] = y_1^{m^i(a^1)} y_2^{m^i(a^2)} \dots y_d^{m^i(a^d)}$$

et pour  $f_i \in Q_i$  ayant le polyèdre de Newton  $\Gamma_i^+$  on aura

$$f_i \circ \pi = y_1^{m^i(a^1)} \dots y_d^{m^i(a^d)} \tilde{f}_i(y) \quad \text{avec} \quad \tilde{f}_i(0) \neq 0.$$

Nous noterons par  $\tilde{H}^{(i)}$  l'hypersurface dans  $X_\sigma$  définie par  $\tilde{f}_i(y) = 0$ . C'est bien entendu la transformée stricte de  $H^{(i)}$  définie par  $f_i(x) = 0$ .

2. 11. Preuve de l'assertion 3 de la proposition 2. 5.

2. 11. 0. DÉFINITION. —  $X_\sigma$  et le diviseur exceptionnel qui est une réunion d'hyperplans de coordonnées admettent une stratification par des tores  $T_I$ . Soit  $I \subset \{1, \dots, d\}$  et

$$T_I = \{y \in \mathbb{C}^d \mid y_i = 0 \text{ si } i \in I, y_i \neq 0 \text{ si } i \notin I\}.$$

2. 11. 1. LEMME ([15], [9]). —  $T_I$  est contenu dans le diviseur exceptionnel si et seulement si le cône  $\sigma^I$  engendré par les vecteurs  $a^j, j \in I$  n'est pas contenu dans un hyperplan de coordonnées et dans ce cas l'ensemble

$$\gamma_{l, I} = \{ \alpha \in \Gamma_l \mid \langle \alpha, a^j \rangle = m^l(a^j), \quad \forall j \in I \}$$

est une face compacte de  $\Gamma_l$  pour  $l=1, \dots, k$ .

2. 11. 2. LEMME [15]. — Si  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$  on notera par  $\tilde{f} \in \mathbb{C}[y_1, y_2, \dots, y_d]$  l'élément tel que  $f \circ \pi = y_1^{b_1} y_2^{b_2} \dots y_d^{b_d} \tilde{f}(y)$ , avec  $\tilde{f}(0) \neq 0$ . Soit  $f_i = \sum_{\alpha} A_{i, \alpha} x^\alpha$ , posons  $f_{i, \gamma_{l, I}} = \sum_{\alpha \in \gamma_{l, I}} A_{i, \alpha} x^\alpha$ . La restriction de  $\tilde{f}_i$  au tore  $T_I$

est un polynôme en les variables  $y_i$ ,  $i \in I$  et en fait

$$\tilde{f}_I|_{T_I} = \tilde{f}_{I, \gamma_{I, t}}$$

2. 11. 3. *Remarque.* — Soit  $a_I = (1/\text{card}(I)) (\sum_{i \in I} a^i)$ , où  $\text{card}(i) = \text{cardinal de l'ensemble } I$ , alors  $a_I \in (\mathbb{R}_+ - 0)^d$  et pour tout  $l = 1, \dots, k$ ,

$$\gamma_{I, l} = \{ \alpha \in \Gamma_I \mid \langle \alpha, a_I \rangle = m^l(a_I) \}.$$

Si la suite  $f_1, \dots, f_k$  est non dégénérée par rapport à leurs polyèdres de Newton  $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$  alors en tout point  $q \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^d$  tel que  $f_{i, \gamma_{I, l}}(q) = 0$   $\forall l = 1, \dots, t$ , la matrice

$$\left( \frac{\partial f_{i, \gamma_{I, l}}(q)}{\partial x_j} \right)_{1 \leq l \leq t, 1 \leq j \leq d}$$

est de rang  $t$ .

La preuve de la proposition découlera du lemme suivant :

2. 11. 4. **LEMME.** — Soit  $f_1, \dots, f_k$  une suite de polynômes non dégénérée par rapport à leurs polyèdres de Newton  $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$ . Soit  $t \leq k$ ,  $p \in T_I \subset \pi^{-1}(0) \cap \tilde{H}_I$  et  $\gamma_{I, l}$  la face compacte de  $\Gamma_I^+$  associée à  $T_I$ ,  $l = 1, \dots, t$ . Alors

(1) la matrice

$$\left( \frac{\partial \tilde{f}_{i, \gamma_{I, l}}(p)}{\partial y_j} \right)_{1 \leq l \leq t, 1 \leq j \leq d}$$

est de rang  $t$ .

(2) Nous avons l'égalité

$$\left( \frac{\partial \tilde{f}_I(p)}{\partial y_j} \right)_{j \notin I, l=1, \dots, t} = \left( \frac{\partial \tilde{f}_{i, \gamma_{I, l}}(p)}{\partial y_j} \right)_{j \notin I, l=1, \dots, t}$$

En particulier,  $\tilde{H}_I$  est lisse au point  $p$  et l'espace tangent  $T_p \tilde{H}_I$  n'est contenu dans aucune composante du diviseur exceptionnel passant par  $p$ .

(3) Remarquons que les seules composantes de  $\pi^{-1}(0)$  qui puissent passer par  $p$  ont pour équation  $y_i = 0$  avec  $i \in I$ .  $\forall i \in I$  nous aurons

$$\tilde{f}_i \not\equiv y_i Q_i \pmod{(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{i-1})}.$$

2. 11. 5. *Preuve du lemme.* — (1) Soit  $p = (p_j)_{j=1, \dots, d}$ . Posons :

$$p'' = (p''_j)_{j=1, \dots, d}$$

où

$$p''_j = 1 \text{ si } j \in I \quad \text{et} \quad p''_j = p_j \text{ si } j \notin I.$$

Nous savons que  $\forall l = 1, \dots, t$  :

$$f_{l, \gamma_{l, l}} \circ \pi = M_l(y) \tilde{f}_{l, \gamma_{l, l}}$$

où  $M_l(y)$  est un monôme. Appliquons cette égalité à  $y = p''$ , cela entraîne que  $f_{l, \gamma_{l, l}}(\pi(p'')) = 0$  car  $\tilde{f}_{l, \gamma_{l, l}}(p'') = 0, \forall l = 1, \dots, t$ . D'autre part, par simple dérivation, on obtient :

$$\forall j \in I, \frac{\partial (f_{l, \gamma_{l, l}} \circ \pi)(p'')}{\partial y_j} = \frac{\partial M_l(p'')}{\partial y_j} \tilde{f}_{l, \gamma_{l, l}}(p'') = 0$$

et

$$\forall j \notin I, \frac{\partial (f_{l, \gamma_{l, l}} \circ \pi)(p'')}{\partial y_j} = M_l(p'') \frac{\partial \tilde{f}_{l, \gamma_{l, l}}(p'')}{\partial y_j},$$

où  $M_l(p'') \neq 0$  et pour montrer (1), il suffira donc d'établir que la matrice

$$\left( \frac{\partial (f_{l, \gamma_{l, l}} \circ \pi)(p'')}{\partial y_j} \right)_{1 \leq l \leq t, 1 \leq j \leq d}$$

est de rang  $t$ . Ceci sera une conséquence de l'hypothèse et de l'égalité suivante obtenue en appliquant la règle de dérivation d'une fonction composée :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{y_i \partial (f_{l, \gamma_{l, l}} \circ \pi)(p'')}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq l \leq t} \\ &= (a^i)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d} \left( \frac{x_i \partial f_{l, \gamma_{l, l}}(\pi(p''))}{\partial x_i} \right)_{1 \leq l \leq t, 1 \leq i \leq t} \end{aligned}$$

car les points  $p''$  et  $\pi(p'')$  sont à coordonnées non nulles et la matrice  $(a^i)_{i, j}$  est inversible. Ceci finit la preuve de (1).

2. 11. 6. La *preuve de (2)* est immédiate à partir de 2. 11. 2.

2. 11. 7. *Preuve de (3).* — Supposons qu'il existe  $i \in I$  tel que

$$\tilde{f}_i = y_i Q_i + \sum_{l < i} \tilde{f}_l R_l,$$

alors  $\forall j \notin I$  :

$$\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial y_j} = y_i \frac{\partial Q_i}{\partial y_j} + \sum_{l < i} \vec{f}_l \frac{\partial R_l}{\partial y_j} + \sum_{l < i} \frac{\partial \vec{f}_l}{\partial y_j} R_l$$

et

$$\frac{\partial \vec{f}_i(p)}{\partial y_j} = \sum_{l < i} R_l(p) \frac{\partial \vec{f}_l(p)}{\partial y_j}, \quad \forall j \notin I,$$

ou encore, car  $p \in T_j$ , d'après (2) :

$$\forall j \in I, \quad \frac{\partial \vec{f}_{i, \gamma_{l,i}}(p)}{\partial y_j} = \sum_{l < i} R_l(p) \frac{\partial \vec{f}_{l, \gamma_{l,i}}(p)}{\partial y_j}$$

autrement dit, le vecteur

$$\left( \frac{\partial \vec{f}_{l, \gamma_{l,i}}(p)}{\partial y_j} \right)_{j=1, \dots, d}$$

serait une combinaison linéaire des vecteurs

$$\left( \frac{\partial \vec{f}_{l, \gamma_{l,i}}(p)}{\partial y_j} \right)_{j=1, \dots, d}$$

pour  $l=1, \dots, t-1$ . Ce qui est absurde d'après (1) et (2) et finit la preuve de (3).

2. 12. DÉFINITION. — Nous dirons qu'une suite  $f_1, \dots, f_s \in Q$  de polynômes ayant tous le même polyèdre de Newton  $\Gamma^+(Q)$  est non dégénérée si elle vérifie les conditions suivantes :

(1) pour tout  $t \leq s$  et toute face compacte  $\gamma$  de  $\Gamma^+(Q)$  de dimension  $k \geq t$  la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1, \gamma}}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial f_{t, \gamma}}{\partial x_1} \\ & \dots & \\ \frac{\partial f_{1, \gamma}}{\partial x_d}, & \dots, & \frac{\partial f_{t, \gamma}}{\partial x_d} \end{bmatrix}$$

est de rang  $t$  en tout point de  $(\mathbb{C} - \{0\})^d$ .

(2) Pour toute face compacte  $\gamma$  de  $\Gamma^+(Q)$  de dimension  $k < s$ , les polynômes  $f_{1, \gamma} \dots, f_{k+1, \gamma}$  n'ont pas de zéro commun dans  $(\mathbb{C}\{0\})^d$ .

2. 12. 1. Remarque. —  $\forall t \leq s$  la suite  $(f_1, \dots, f_t)$  est non dégénérée (par rapport à  $\Gamma^+(Q)$ ).

2. 13. Exemple. — Soit  $\Gamma^+$  un polyèdre de Newton dont toutes ses faces compactes sont des simplexes. Autrement dit, toute face compacte de dimension  $k$  a  $k + 1$ -sommets. Une condition suffisante pour que la suite  $(f_1, \dots, f_d)$  soit non dégénérée par rapport à leur polyèdre de Newton  $\Gamma^+$  est que tout déterminant d'ordre  $r \leq d$  de la matrice suivante soit non nul :

$$\begin{bmatrix} A_{1, 1} & \dots & A_{1, k} \\ A_{2, 1} & \dots & A_{2, k} \\ & \dots & \\ A_{d, 1} & \dots & A_{d, k} \end{bmatrix}$$

où  $f_l = \sum_{i=1}^k A_{l, i} x^{a_i}$ ,  $l = 1, \dots, d$ . Nous voyons en particulier dans cet exemple que la condition de non dégénérescence est générique.

Preuve. — Soit  $t \geq 1$  et  $\gamma$  une face compacte de  $\Gamma^+$  de dimension  $r - 1 \geq t$ . Notons  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  les sommets de  $\gamma$ . Alors  $\forall j = 1, \dots, d$  et  $l = 1, \dots, t$  :

$$\frac{x_j \partial f_{l, \gamma}}{\partial x_j} = \sum_{\alpha \in \gamma} x_j A_{l, \alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^r \alpha_j^i A_{l, i} x^{\alpha^i}$$

où  $\alpha^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_d^i)$ .

Par conséquent, on aura l'égalité de matrices

$$\left( \frac{x_j \partial f_{l, \gamma}(x)}{\partial x_j} \right)_{l, j} = (A_{l, i})_{1 \leq l \leq t, 1 \leq i \leq r} (x^{\alpha^i} \alpha_j^i)_{1 \leq j \leq d, 1 \leq i \leq r}$$

Or, la matrice  $(\alpha_j^i)_{1 \leq j \leq d, 1 \leq i \leq r}$  est de rang  $r$  par hypothèse et la matrice  $(A_{l, i})_{1 \leq l \leq t, 1 \leq i \leq r}$  est de rang  $t$ , par conséquent pour un point  $x \in (\mathbb{C}\{0\})^d$  la matrice  $(x_j \partial f_{l, \gamma}(x) / \partial x_j)_{l, j}$  est de rang  $t$ . La condition (1) est donc vérifiée.

Vérifions la condition 2 : pour toute face compacte  $\gamma$  de  $\Gamma^+$  de dimension  $k < s$ , alors  $f_{1, \gamma} \dots, f_{k+1, \gamma}$  n'ont pas de zéro commun dans  $(\mathbb{C}\{0\})^d$ .



Soit

$$f_{i, \gamma} = \sum_{\alpha \in \gamma} A_{i, \alpha} x^\alpha = \sum_{i=1}^{k+1} A_{i, i} x^{\alpha^i} = x^{\alpha^1} \left( \sum_{i=1}^{k+1} A_{i, i} x^{(\alpha^i - \alpha^1)} \right)$$

et posons  $z_i = x^{\alpha^i - \alpha^1}$ ,  $i = 2, \dots, k+1$ .

Considérons les polynômes

$$P_{i, \gamma} = A_{i, 1} + \sum_{i=2}^{k+1} A_{i, i} z_i$$

Les  $k+1$  polynômes  $P_{i, \gamma}$  en  $k$  variables n'ont pas de zéro commun car leur résultant est non nul par hypothèse. D'autre part, si l'on avait un point  $q \in (\mathbb{C} - \{0\})^d$  tel que  $f_{i, \gamma}(q) = 0$  pour  $i = 1, \dots, k+1$ , on aurait  $P_{i, \gamma}(z) = 0$  pour un certain  $z$  ce qui est absurde.

2. 14. *Exemple 2.* — Soient  $\beta_1, \dots, \beta_d$  des entiers strictement positifs et

$$f_i = \sum_{j=1}^d A_{j, i} x_j^{\beta_j}, \quad A_{j, i} \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Alors la suite  $f_1, \dots, f_d$  est non dégénérée si tous les déterminants d'ordre  $t$  avec  $t \leq d$  de la matrice  $(A_{i, j})$  sont non nuls.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERNSTEIN (D. I.). — The number of integral points in integral polyhedra, *Funct. An. and its appl.*, vol. 10, 1976, p. 72-73.
- [2] DANILOV (V. I.). — Geometry of Toral Varieties, *Usp. Mat. Nauk*, n° 2, 1973, p. 85-135.
- [3] EHRHART (E.). — Thèse : « Sur un problème de géométrie diophantienne ». *J. für die Reine...*, n° 226, 1967, p. 1-29.
- [4] KEMPF-MUMFORD et coll. — Toroidal Embeddings, *Lect. Not. in Math.*, n° 339.
- [5] KHOVANSKII (A. G.). — Newton polyedral and toral varieties, *Funct. Anal. and its appl.*, vol. 11, n° 4, 1977, p. 56-67.
- [6] KHOVANSKII (A. G.). — Newton polyedra and the genus of complete intersections, *Funct. Anal. and its appl.*, vol. 12, n° 1, 1978, p. 51-61.
- [7] LEJEUNE-TEISSIER. — Clôture intégrale d'idéaux et équisingularité, *Séminaire au Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique*, 1974.
- [8] MCMULLEN (P.). — Metrical and combinatorial properties of convex polytopes, *Proc. Int. Cong. Math. Vancouver*, 1974, p. 491-495.
- [9] MERLE (M.). — Dans *Séminaire Demazure-Pinkham-Teissier*, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1976-1977.
- [10] MORALES (M.). — Polynôme d'Hilbert-Samuel des clôtures intégrales des puissances d'un idéal  $m$ -primaire, *Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 112, 1984, p. 343-358.

- [11] MORALES (M.). — Calcul de quelques invariants de surface normale. Dans *Nœuds, tresses et singularités. Les Plans sur Bex*, 1982, monographie n° 31 de l'Enseignement Mathématique, Genève, 1983.
- [12] MORALES (M.). — Polynôme d'Hilbert-Samuel des clôtures intégrales des puissances de l'idéal maximal pour une courbe plane, *C. R. Acad. Sc.*, t. 289, série A, 1979, p. 401-404.
- [13] TEISSIER (B.). — *Variétés polaires II*, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1982.
- [14] TEISSIER (B.) et MERLE (M.). — Dans *Séminaire Demazure-Pinkham-Teissier*, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1976-1977.
- [15] VARCHENKO (A. N.). — Zeta-function of monodromy and Newton's diagram, *Inv. Math.*, vol. 37, 1976, p. 235-262.
- [16] WATANABE (K.). — On plurigenera of normal isolated singularities I, *Math. Ann.*, vol. 250, 1980, p. 65-94.