

BULLETIN DE LA S. M. F.

PATRICK LE BARZ

Contribution des droites d'une surface à ses multisécantes

Bulletin de la S. M. F., tome 112 (1984), p. 303-324

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__303_0

© Bulletin de la S. M. F., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONTRIBUTION DES DROITES D'UNE SURFACE A SES MULTISÉCANTES

PAR

PATRICK LE BARZ (*)

RÉSUMÉ. — Soit S une surface de \mathbb{P}^N . On s'intéresse au nombre de droites k -sécantes à S , vérifiant certaines autres conditions par ailleurs. Pour obtenir de telles formules énumératives, il est utile d'identifier « k -uplet aligné situé sur S » avec « droite k -sécante à S ». Mais si S contient une droite L , alors apparaît dans le schéma des k -uplets alignés sur S , une composante parasite $\text{Hilb}^k L$ (de dimension trop grande), formée des ∞^k k -uplets situés sur L .

Le but de cet article est de calculer la contribution de cette composante dans les formules énumératives donnant les droites k -sécantes à S . Pour cela, on utilise le théorème de l'intersection résiduelle (FULTON-KLEIMAN-LAKSOV-MACPHERSON) qui permet de décrire le schéma résiduel de la composante $\text{Hilb}^k L$ (dans le schéma des k -uplets alignés sur S) grâce au calcul explicite des classes de Chern du fibré normal à $\text{Hilb}^k L$ dans $\text{Hilb}^k S$.

ABSTRACT. — Let S be a surface in \mathbb{P}^N . We are interested by the number of k -secant lines to S , which are submitted to other ad hoc conditions. In order to obtain such enumerative formulas, one identifies "aligned k -tuple lying on S " with " k -secant line to S ". If S contains a line L , then appears in the scheme of k -tuples on S , a parasitic component $\text{Hilb}^k L$ (of too big dimension), formed by those ∞^k k -tuples lying on L .

We want here to compute the contribution of this component in the enumerative formulas giving the numbers of lines k -secant to S . We use the residual intersection theorem (FULTON-KLEIMAN-LAKSOV-MACPHERSON) which allows us to describe the residual scheme of the component $\text{Hilb}^k L$, in the scheme of aligned k -tuples on S . For this purpose, we need to compute the Chern classes of the normal bundle $\nu(\text{Hilb}^k L, \text{Hilb}^k S)$.

Si X et Y sont deux sous-variétés de la variété algébrique V , on sait que l'intersection $X \cap Y$ peut contenir des composantes de dimension excédentaire. En particulier si X et Y sont de dimensions complémentaires, on peut avoir des composantes W de $X \cap Y$ avec $\dim W > 0$.

Le problème est dans ce cas d'évaluer le degré de l'intersection des cycles $[X] \cdot [Y]$ dans $A^*(V)$, l'anneau de Chow de V . La théorie de FULTON-KLEIMAN-LAKSOV-MACPHERSON ([2], [3], [4]) répond à cette question. Pour

(*) Texte reçu le 7 mai 1982, révisé le 24 mai 1984.

P. LE BARZ, C.N.R.S. L.A. 168, I.M.S.P., Parc Valrose, 06034 Nice Cedex, France.

cela, on définit un schéma résiduel R de la composante W de $X \cap Y$ dans V et le théorème de l'intersection résiduelle [4] donne une relation entre $\deg R$ et $\deg[X] \cdot [Y]$ au moyen de classes de Chern de certains fibrés normaux. Dans le cas où $R = \emptyset$, c'est la formule de FULTON-MACPHERSON [3].

Dans cet article, on se pose un problème où l'on rencontre de façon typique cette situation. Soit S une surface de \mathbb{P}^N ; on s'intéresse aux droites multisécantes à S . Dans [6], on a introduit la notion de formules k -sécantes à S ; résumons brièvement comment.

Dans le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^N$ des k -uplets de \mathbb{P}^N (sous-schémas de dimension 0 et longueur k), on a la sous-variété des k -uplets alignés, c'est-à-dire sous-schémas d'une droite de \mathbb{P}^N . Notons $\text{Al}^k \mathbb{P}^N$ cette sous-variété et soit $\text{Hilb}^k S$ le sous-schéma des k -uplets contenus dans S . Alors le cycle des droites k -sécantes à S est (*grosso modo*) l'intersection $[\text{Hilb}^k S] \cdot [\text{Al}^k \mathbb{P}^N]$ dans l'anneau de Chow de $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^N$. Si Z est un cycle de $\text{Al}^k \mathbb{P}^N$ de dimension complémentaire, le degré du 0-cycle $Z \cdot [\text{Hilb}^k S]$ donnera par définition une formule k -sécante pour S . Des exemples de formules k -sécantes sont : les tangentes d'inflexion d'une surface de \mathbb{P}^5 , les bitangentes, les sextisécantes d'une surface de \mathbb{P}^4 , etc.

Malheureusement pour le calcul, l'intersection $\text{Al}^k \mathbb{P}^N \cap \text{Hilb}^k S$ peut avoir des composantes de dimension supérieure à celle qu'on attend. L'exemple le plus simple où un tel phénomène se produit est celui d'une surface S contenant une droite L . Tous les k -uplets de L sont en effet alignés et l'intersection $\text{Al}^k \mathbb{P}^N \cap \text{Hilb}^k S$ contient $\text{Hilb}^k L$ (isomorphe à \mathbb{P}^k) qui a une dimension trop grande. Par exemple, pour une surface de \mathbb{P}^4 , $\text{Hilb}^6 S$ est de dimension 12 et $\text{Al}^6 \mathbb{P}^4$ aussi; on s'attend donc à ce que leur intersection dans $\text{Hilb}^6 \mathbb{P}^4$ (qui est de dimension 24) soit un schéma de dimension 0. Mais il y a $\text{Hilb}^6 L$, de dimension 6, dans l'intersection. Pour avoir l'intersection en tant que cycles de $\text{Hilb}^6 S$ et $\text{Al}^6 \mathbb{P}^4$, il faudra donc faire intervenir la sixième classe de Chern d'un certain fibré sur $\text{Hilb}^6 L$, donné par le théorème de l'intersection résiduelle.

Dans ce travail, après quelques rappels, on se place dans la situation précédente et on donne un calcul explicite des classes de Chern du fibré normal à $\text{Hilb}^k L$ dans $\text{Hilb}^k S$ (voir §2). Cela permet au paragraphe 3 de calculer le fibré normal à $\text{Hilb}^k L$ dans $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^N$ où L est une droite de \mathbb{P}^N . Enfin au paragraphe 4, on applique le théorème de l'intersection résiduelle à différents cas concernant les surfaces. L'application de ces

résultats s'effectue dans [5], où sont annoncées les formules k -sécantes pour une surface et dans [7], [8], où elles sont démontrées en détail.

Je tiens à remercier le referee pour m'avoir indiqué une amélioration substantielle.

I. Notations

Résumons tout d'abord quelques notions introduites en détail dans [6].

On dit qu'un k -uplet ξ de \mathbb{P}^N est *curviligne* si, au voisinage de chacun des points de son support, il est situé sur une courbe non singulière. Leur ensemble $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N$ forme un ouvert non singulier de $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^N$; on se placera toujours dans cet ouvert dans ce qui suit. En effet, $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^N$ peut non seulement être singulier, mais posséder des composantes irréductibles de dimension différente de Nk ; voir IARROBINO [1].

L'ensemble $\text{Al}^k \mathbb{P}^N$ des k -uplets *alignés* (c'est-à-dire sous-schémas d'une droite de \mathbb{P}^N) est une sous-variété non singulière de $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N$, de dimension $2N+k-2$. L'axe d'un k -uplet aligné est l'unique droite sur laquelle il est situé. L'application dans la grassmannienne des droites

$$\text{Axe} : \text{Al}^k \mathbb{P}^N \rightarrow G(1, N)$$

est une fibration de fibre-type $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{P}^k$.

Soit X une sous-variété de \mathbb{P}^N et soit $i : \text{Al}^k \mathbb{P}^N \hookrightarrow \text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N$ l'injection canonique. Notons $[\text{Hilb}_c^k X]$ le cycle, dans l'anneau de Chow de $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N$, associé au sous-schéma $\text{Hilb}_c^k X$ des k -uplets curvilignes contenus dans X . Par définition, $i^* [\text{Hilb}_c^k X]$ dans $A^*(\text{Al}^k \mathbb{P}^N)$ est le cycle des droites k -sécantes à X .

Soit enfin ξ_0 un k -uplet aligné dans \mathbb{P}^N , de support un seul point. Après choix de coordonnées inhomogènes (x_1, x_2, \dots, x_N) dans un ouvert de \mathbb{P}^N , l'idéal de ξ_0 est $I_0 = (x_1^k, x_2, \dots, x_N)$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N}$. Une carte de $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^N$ en ξ_0 correspond alors à l'idéal voisin

$$I = (x_1^k + p_1(x_1), x_2 + p_2(x_1), \dots, x_N + p_N(x_1)),$$

où les p_i sont les polynômes de degré au plus $k-1$.

Dans toute la suite $X=S$ est une surface de \mathbb{P}^N et $L \subset S$ une droite. On se propose de calculer la contribution dans $i^* [\text{Hilb}_c^k S]$ de la composante $\text{Hilb}^k L$ de l'intersection $\text{Al}^k \mathbb{P}^N \cap \text{Hilb}_c^k S$.

II. Le fibré normal à $\text{Hilb}^k L$ dans $\text{Hilb}_c^k S$

1° UNE SUITE EXACTE

Soit S une surface de \mathbb{P}^N et $L \subset S$ une droite. On suppose S non singulière au voisinage de L . Pour $k \in \mathbb{N}$, le schéma $\text{Hilb}_c^k S$ admet $\text{Hilb}^k L \simeq \mathbb{P}^k$ comme sous-variété. Notons v_k son fibré normal, de rang k . Pour $k=1$, on note v_1 par v . On a $c_1(v) = l$ où $l \in \mathbb{Z}$ est la self-intersection de L sur S .

(a) Introduisons la variété $X = \text{Hilb}^k L \times L$ et soit π le revêtement ramifié à $k+1$ feuillets

$$\pi : X \rightarrow \text{Hilb}^{k+1} L$$

défini par le produit des idéaux, ou si l'on préfère, l'application canonique

$$\mathbb{P} \Gamma(\mathcal{O}(k)) \times \mathbb{P} \Gamma(\mathcal{O}(1)) \rightarrow \mathbb{P} \Gamma(\mathcal{O}(k+1)).$$

Soit $T \subset X$ le revêtement tautologique de $\text{Hilb}^k L$ défini par $(\xi, m) \in T$ si et seulement si le point m est dans ξ ; le morphisme π est bien sûr étale en dehors de T .

Soient d'autre part p et q les projections

$$p : X \rightarrow \text{Hilb}^k L \quad \text{et} \quad q : X \rightarrow L.$$

Considérons alors les fibrés sur X :

$$\pi^* v_{k+1}, \quad p^* v_k \quad \text{et} \quad q^* v$$

de rangs respectivement $k+1$, k et 1 . Nous allons montrer la :

PROPOSITION 1. — *On a une suite exacte de faisceaux localement libres sur X :*

$$0 \rightarrow q^* v \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-T) \rightarrow \pi^* v_{k+1} \rightarrow p^* v_k \rightarrow 0.$$

(b) Pour cela, on remarque tout d'abord que sur l'ouvert $\Omega = X - T$, on a deux morphismes naturels de fibrés :

$$\begin{cases} \alpha : q^* v|_{\Omega} \rightarrow \pi^* v_{k+1}|_{\Omega}, \\ \beta : \pi^* v_{k+1}|_{\Omega} \rightarrow p^* v_k|_{\Omega}, \end{cases}$$

définis comme suit.

Soit (ξ, m) dans $X = \text{Hilb}^k L \times L$ avec $m \notin \xi$. Si N est un vecteur normal à L dans S (en m), on définit l'image par α de N comme le vecteur normal à $\text{Hilb}^{k+1} L$ dans $\text{Hilb}_c^{k+1} S$ (en $m \cup \xi$) dont la partie en m est N et dont la partie en ξ est 0. Si N' est un vecteur normal à $\text{Hilb}^{k+1} L$ dans $\text{Hilb}_c^{k+1} S$ (en $m \cup \xi$), on définit l'image par β de N' comme le vecteur normal à $\text{Hilb}^k L$ dans $\text{Hilb}_c^k S$ (en ξ) obtenu en supprimant la partie de N' en m .

On a alors une suite exacte de fibrés sur $\Omega = X - T$ (évidemment scindée) :

$$(1) \quad 0 \rightarrow q^* v | \Omega \xrightarrow{\alpha} \pi^* v_{k+1} | \Omega \xrightarrow{\beta} p^* v_k | \Omega \rightarrow 0.$$

A ce moment-là, de la suite exacte standard de faisceaux cohérents sur X :

$$0 \rightarrow q^* v \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-T) \xrightarrow{i} q^* v \rightarrow q^* v \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T \rightarrow 0,$$

on déduit la suite exacte (scindée) de faisceaux localement libres sur $\Omega = X - T$:

$$(2) \quad 0 \rightarrow q^* v \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-T) | \Omega \xrightarrow{\alpha'} \pi^* v_{k+1} | \Omega \xrightarrow{\beta} p^* v_k | \Omega \rightarrow 0,$$

où $\alpha' = \alpha_0 i$ (cela car bien sûr $i | \Omega$ est un isomorphisme).

(c) Essayons de voir comment se comporte la suite exacte (1) au voisinage de T , pour savoir si elle se prolonge à tout X .

Soit donc $(\xi_0, m_0) \in T$ dans $\text{Hilb}^k L \times L$. Comme $m_0 \in \xi_0$, supposons $\text{long}_{m_0} \xi_0 = r$ avec $1 \leq r \leq k$. Donc $\xi_0 = \xi'_0 \cup \xi''_0$ où ξ'_0 est de support $\{m_0\}$ et ξ''_0 est un $(k-r)$ -uplet de support disjoint de $\{m_0\}$. Bien sûr, la partie ξ''_0 de ξ_0 ne va pas intervenir. Plus précisément, soient V' et V'' des voisinages de ξ'_0 et ξ''_0 dans $\text{Hilb}^r L$ et $\text{Hilb}^{k-r} L$. Alors $V' \times V''$ constitue naturellement un voisinage de ξ_0 dans $\text{Hilb}^k L$ et

$$(V' \times V'') - T = (V' - T') \times V'',$$

où T' est la partie de $\text{Hilb}^r L$ formée des (ξ', m') avec $m' \in \xi'$. On se ramène donc ainsi à $r = k$ dans tout ce qui suit.

Pour un certain voisinage W de m_0 dans S , il existe une carte $(*)$ de la forme (x, y) où L est donné par $x = 0$.

Le k -uplet ξ_0 est donc donné par l'idéal $I_0 = (x^k, y)$ dans \mathcal{O}_W , puisqu'on s'est ramené plus haut à $\text{Supp } \xi_0 = \{m_0\}$ et $\text{long}_{m_0} \xi_0 = k$. Un idéal d'un k -uplet Ξ voisin de ξ_0 dans W est donc (voir § I) de la forme

$$(3) \quad I = (x^k + A(x), y + A'(x)),$$

où $A = a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$ et $A' = a'_1 x^{k-1} + \dots + a'_k$ sont deux polynômes de degrés au plus $k-1$.

Désignons par E_n l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n . Une carte de $\text{Hilb}_c^k S$ en ξ_0 est donc donnée, dans un ouvert de $E_{k-1} \times E_{k-1}$, par

$$(4) \quad (A, A').$$

Un k -uplet voisin de ξ_0 dans L est repéré par l'idéal $(x^k + A(x), y)$ de sorte que dans la carte (4), la sous-variété $\text{Hilb}^k L$ de $\text{Hilb}_c^k S$ est donnée par $A' = 0$. On pourra pour la commodité, identifier A et A' à leurs coefficients.

De même, le $(k+1)$ -uplet $\eta_0 = \pi(\xi_0, m_0) \in \text{Hilb}^{k+1} L$, par définition même de π , a pour support $\{m_0\}$ et longueur $k+1$. Son idéal J_0 dans \mathcal{O}_W est donc $J_0 = (x^{k+1}, y)$. Un idéal voisin est de la forme

$$(5) \quad J = (x^{k+1} + B(x), y + B'(x)),$$

où B et B' sont deux polynômes de degrés au plus k . Une carte de $\text{Hilb}_c^{k+1} S$ en $\eta_0 = \pi(\xi_0, m_0)$ est donc donnée (dans un ouvert de $E_k \times E_k$) par

$$(6) \quad (B, B').$$

Comme plus haut, la sous-variété $\text{Hilb}^{k+1} L$ de $\text{Hilb}_c^{k+1} S$ est donnée, dans la carte (6), par $B' = 0$.

Enfin, on repèrera dans W un point voisin de m_0 par ses coordonnées (u, u') , de sorte que L est donné par l'équation $u' = 0$.

Comment s'exprime alors le morphisme $\pi : \text{Hilb}^k L \times L \rightarrow \text{Hilb}^{k+1} L$ dans toutes ces cartes? On doit exprimer que le $(k+1)$ -uplet sur L , d'idéal $(x^{k+1} + B(x))$ dans \mathcal{O}_L est formé du k -uplet d'idéal $(x^k + A(x))$ et du point simple de coordonnée u . Cela donne l'identité

$$(7) \quad x^{k+1} + B(x) = (x^k + A(x))(x - u)$$

dont le développement exprime les b_i en fonction des a_j et de u . Grâce à (7), on obtient ainsi localement le morphisme π :

$$\begin{aligned}\pi : X = \text{Hilb}^k L \times L &\rightarrow \text{Hilb}^{k+1} L, \\ (A, u) &\mapsto B.\end{aligned}$$

(d) Maintenant, on a la remarque évidente :

Remarque 1. — Si E et E' sont deux espaces vectoriels, le produit $E \times E'$ s'identifie au fibré normal à E dans $E \times E'$, le point (X, X') s'identifiant au vecteur normal X' au point X de E . Ainsi, X' réalise une trivialisation du fibré normal $v(E, E \times E')$.

En application de cette remarque, on s'aperçoit que dans les cartes (4) et (6), des trivialisations des fibrés normaux $v_k = v(\text{Hilb}^k L, \text{Hilb}_c^k S)$ et $v_{k+1} = v(\text{Hilb}^{k+1} L, \text{Hilb}_c^{k+1} S)$ sont obtenues par A' et B' . De même, une trivialisation de $v = v(L, S)$ est donnée par u' .

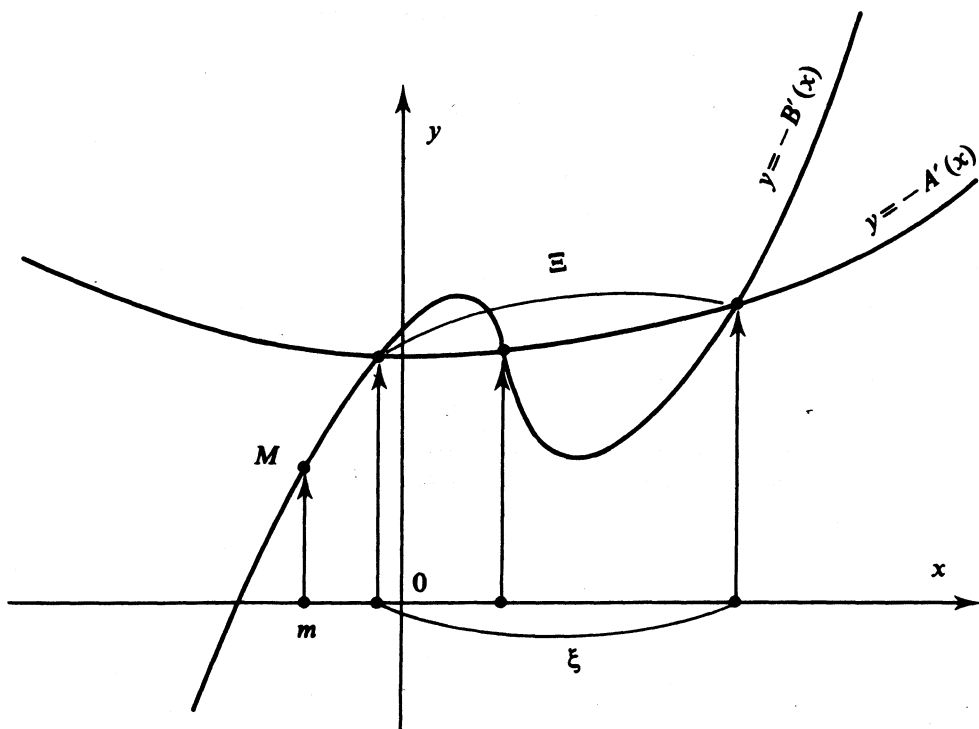
Exprimons alors les morphismes de faisceaux α et β définis en (b) et cela grâce aux trivialisations A' , B' et u' .

Commençons par $\beta : \pi^* v_{k+1}|_{\Omega} \rightarrow p^* v_k|_{\Omega}$: un point (ξ, m) dans $\Omega \subset X = \text{Hilb}^k L \times L$ est formé d'un k -uplet ξ et d'un point m avec $m \notin \xi$. Alors $\pi(\xi, m) = \xi \cup m \in \text{Hilb}^{k+1} L$. On a vu (remarque 1) qu'un vecteur normal à $\text{Hilb}^{k+1} L$ dans $\text{Hilb}_c^{k+1} S$ (en $m \cup \xi$) s'exprime comme un $(k+1)$ -uplet de S , que l'on peut noter $\Xi \cup M$ où Ξ est un k -uplet de S et M un point de S .

On a vu que de tels $(k+1)$ -uplets sont repérés par l'idéal $(x^{k+1} + B(x), y + B'(x))$, la trivialisation de v_{k+1} étant donnée par B' . Comme on regarde en fait le fibré relevé $\pi^* v_{k+1}$, le polynôme $x^{k+1} + B(x)$ est déjà décomposé (voir (7)) sous la forme $(x^k + A(x))(x - u)$. Le morphisme β consiste à supprimer la partie en m du $(k+1)$ -uplet, soit donner un polynôme A' , de degré au plus $k-1$, tel que $(x^k + A(x), y + A'(x))$ soit l'idéal de la partie restante dans \mathcal{O}_w . La question est donc : quel est le polynôme A' de degré au plus $k-1$, prenant les mêmes valeurs que B' sur ξ ? On doit avoir $A' - B'$ nul sur ξ , soit

$$(A' - B')(x) = \text{Cte}(x^k + A(x)).$$

De manière plus formelle : l'idéal $(x^k + A(x), y + A'(x))$ doit contenir l'idéal $((x^k + A(x))(x - u), y + B'(x))$. Si on pose $B'(x) = b'_1 x^k + \dots + b'_{k+1}$, on voit que la constante est nécessairement b'_1 .



D'où le morphisme β exprimé dans les trivialisations B' et A' :

$$(8) \quad \beta : \pi^* v_{k+1} | \Omega \rightarrow p^* v_k | \Omega, \\ B' \mapsto A',$$

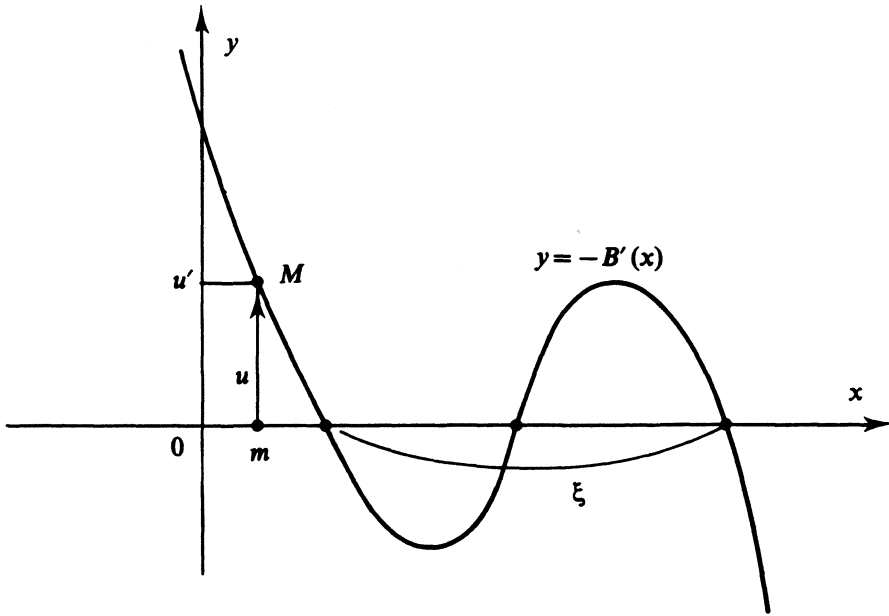
où $A'(x) = B'(x) - b'_1(x^k + A(x))$.

Exprimons alors le morphisme $\alpha : q^* v | \Omega \rightarrow \pi^* v_{k+1} | \Omega$ dans les trivialisations u' et B' .

On se donne un point M de S de coordonnées (u, u') et ξ un k -uplet de L , d'idéal $(x^k + A(x), y)$ dans \mathcal{O}_w . Quel est l'idéal de leur réunion? (Cela représentera un vecteur normal en $m \cup \xi$, dont la partie normale en ξ est nulle et dont la partie normale en $m = (u, 0)$ est M .)

L'idéal de cette réunion est de la forme $((x^k + A(x))(x - u), y + B'(x))$. On doit donc avoir

$$\begin{cases} B'(u) = -u' \text{ pour le point simple } M \text{ et} \\ B'(x) \text{ multiple de } x^k + A(x). \end{cases}$$



Ceci donne $B'(x) = \text{Cte}(x^k + A(x))$ d'où la valeur de la constante : $B'(u)/(u^k + A(u))$. (Bien remarquer que $u^k + A(u)$ est non nul car $m \notin \xi$: depuis le début on s'est placé sur l'ouvert $\Omega = X - T$.)

D'où le morphisme α exprimé dans les trivialisations u' et B' :

$$(9) \quad \begin{aligned} \alpha : q^* v|_{\Omega} &\rightarrow \pi^* v_{k+1}|_{\Omega}, \\ u' &\mapsto B', \end{aligned}$$

avec $B'(x) = -u'(x^k + A(x))/(u^k + A(u))$. Noter que la base Ω de tous ces fibrés est paramétrée par (A, u) , x étant une variable muette uniquement.

(e) Nous allons montrer maintenant que la suite exacte (2) définie sur Ω se prolonge à tout X en une suite exacte :

$$(\tilde{2}) \quad 0 \rightarrow q^* v \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-T) \rightarrow \pi^* v_{k+1} \rightarrow p^* v_k \rightarrow 0.$$

Soit en effet (ξ_0, m_0) dans T (on se ramène comme toujours à $\text{Supp } \xi_0 = \{m_0\}$) et soit V un voisinage de (ξ_0, m_0) dans X . On a vu en (d) que la suite exacte (1) sur $V - T$ s'exprime

$$(10) \quad 0 \rightarrow q^* v|_{V-T} \rightarrow \pi^* v_{k+1}|_{V-T} \rightarrow p^* v_k|_{V-T} \rightarrow 0,$$

où l'on a

$$\begin{aligned} \alpha : u' &\mapsto B' && \text{avec } B'(x) = \frac{-u'}{u^k + A(u)}(x^k + A(x)), \\ \beta : B' &\mapsto A' && \text{avec } A'(x) = B'(x) - b'_1(x^k + A(x)) \\ &&& (\text{si } b'_1 = \text{dom}(B')). \end{aligned}$$

Or une équation locale de T dans V (dans la carte (A, u) de $X = \text{Hilb}^k L \times L$) est

$$u^k + A(u) = 0$$

car le point (ξ, m) de $X = \text{Hilb}^k L \times L$ est dans T si et seulement si $m \in \xi$. Ou encore, si et seulement si u est racine du polynôme $x^k + A(x)$ qui définit ξ .

La suite exacte (10) donne donc une suite exacte de faisceaux sur V :

$$(11) \quad 0 \rightarrow q^* \nu \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{O}_V(-T) \rightarrow \pi^* \nu_{k+1}|_V \rightarrow p^* \nu_k|_V \rightarrow 0$$

qui prolonge à V la suite exacte (2) restreinte à $V - T$.

Ainsi la suite exacte (2) définie sur $X - T$ se prolonge au voisinage de tout point de T .

Or on a le :

LEMME 1. — Soient E, F et G trois fibrés vectoriels sur une variété irréductible non singulière X et soit T un fermé de X (distinct de X). Alors toute suite exacte de faisceaux localement libres

$$(*) \quad 0 \rightarrow E|_{X-T} \xrightarrow{a} F|_{X-T} \xrightarrow{b} G|_{X-T} \rightarrow 0$$

se prolongeant au voisinage de tout point de T , se prolonge à X tout entier.

Preuve du lemme. — Soit $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ un recouvrement de T par des ouverts où la suite $(*)$ se prolonge et soit \mathcal{U} le recouvrement de X formé de $X - T$ et des ouverts de \mathcal{V} . Soient a_i et b_i des prolongements de $a|_{V_i - T}$ et $b|_{V_i - T}$ à V_i tout entier. On a :

$$\begin{cases} a_i|_{V_{ij} - T} = a|_{V_{ij} - T} = a_j|_{V_{ij} - T}, \\ b_i|_{V_{ij} - T} = b|_{V_{ij} - T} = b_j|_{V_{ij} - T}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$a_i | V_{ij} = a_j | V_{ij} \quad \text{et} \quad b_i | V_{ij} = b_j | V_{ij}$$

parce que $V_{ij} - T$ est dense dans V_{ij} et que E , F et G sont localement libres.

On obtient ainsi deux données de recollement sur \mathcal{U} , d'où un élément \bar{a} de $\Gamma(X, \mathcal{H}om(E, F))$ et un élément \bar{b} de $\Gamma(X, \mathcal{H}om(F, G))$. Ils donnent la suite exacte de faisceaux localement libres sur X :

$$(*) \quad 0 \rightarrow E \xrightarrow{\bar{a}} F \xrightarrow{\bar{b}} G \rightarrow 0.$$

Ce lemme appliqué à la situation précédente donne la suite exacte de faisceaux localement libres sur X :

$$(\bar{2}) \quad 0 \rightarrow q^* v \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-T) \rightarrow \pi^* v_{k+1} \rightarrow p^* v_k \rightarrow 0$$

et la proposition 1 est donc démontrée.

Remarque 2. — La proposition 1 a été généralisée dans [9].

2° CLASSES DE CHERN

Nous déduisons de ce qui précède la :

PROPOSITION 2. — Soit h le générateur hyperplan de $A^1(\text{Hilb}^k L)$ correspondant à l'isomorphisme vu $\text{Hilb}^k L \simeq \mathbb{P}^k$.

Alors la classe de Chern totale de $v_k = v(\text{Hilb}^k L, \text{Hilb}_c^k S)$ est

$$c(v_k) = (1 - h)^{k-l-1},$$

où $l \in \mathbb{Z}$ est la self-intersection de L sur S .

Preuve. — Notons plus précisément h_k le générateur hyperplan de $A^1(\text{Hilb}^k L)$ et soient les deux cycles

$$P = p^* h_k \quad \text{et} \quad Q = q^* (\text{point}),$$

où p et q sont les projections définies en 1. Les cycles P et Q sont des générateurs de $A^1(X)$ où $X = \text{Hilb}^k L \times L$. On a $Q^2 = 0$. Une base de $A^i(X)$ est $\{P^i, QP^{i-1}\}$ pour $1 \leq i \leq k$. Enfin, on a $A^{k+1}(X) \simeq \mathbb{Z}$ et QP^k en est le générateur positif « point ».

Dans $A^1(X)$, il s'agit de déterminer les deux éléments $[T]$ et $\pi^* h_{k+1}$ où h_{k+1} est le générateur positif de $A^1(\text{Hilb}^{k+1} L)$.

(i) On voit, par définition même de la sous-variété T de X , que dans l'anneau de Chow $A^*(X)$, on a

$$[T] \cdot P^k = k \cdot \text{point} \quad \text{et} \quad [T] \cdot Q P^{k-1} = \text{point}.$$

On en déduit dans $A^1(X)$: $[T] = P + k Q$.

(ii) De même, on voit que

$$\pi^* h_{k+1} \cdot P^k = \text{point} \quad \text{et} \quad \pi^* h_{k+1} \cdot Q P^{k-1} = \text{point},$$

d'où dans $A^1(X)$: $\pi^* h_{k+1} = P + Q$.

Montrons alors par récurrence sur k que la classe de Chern totale $c(v_k)$ est $(1 - h_k)^{k-l-1}$.

Pour $k=1$, $\deg c_1(v) = l$, donc on a bien $c(v) = (1 - h_1)^{-l}$.

Supposons le résultat vrai pour k et montrons-le pour $k+1$. De la proposition 1 on déduit l'égalité des classes de Chern totales :

$$c(\pi^* v_{k+1}) = c(p^* v_k) \cdot c(q^* v \otimes \mathcal{O}_X(-T)).$$

Or $c(p^* v_k) = (1 - P)^{k-l-1}$ par hypothèse de récurrence et par ailleurs,

$$c(q^* v \otimes \mathcal{O}_X(-T)) = 1 + q^* c_1(v) - [T] = 1 + l Q - (P + k Q).$$

D'où

$$c(\pi^* v_{k+1}) = (1 - P)^{k-l-1} (1 - P + (l - k) Q) = (1 - (P + Q))^{k-l}$$

par la formule du binôme (se rappeler que $Q^2 = 0$). Mais c'est aussi $\pi^* (1 - h_{k+1})^{k-l}$. Comme π est un revêtement à $k+1$ feuillets, on a π^* injectif (car $\pi_* \pi^* = (k+1) \text{Id}$ dans l'anneau de Chow de $\text{Hilb}^{k+1} L$, qui n'a pas de torsion).

Il vient donc $c(v_{k+1}) = (1 - h_{k+1})^{k-l}$ et la proposition 2 est ainsi démontrée par récurrence.

III. Le fibré normal à $\text{Hilb}^k L$ dans $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^N$

Un cas particulier de ce qui précède est le cas où $S = \mathbb{P}^2$. Alors $l=1$ et $c(v(\text{Hilb}^k L, \text{Hilb}^k \mathbb{P}^2)) = (1 - h)^{k-2}$.

Remarque 3. — On pouvait effectivement prévoir ici que $c_{k-1} = c_k = 0$ à cause des inclusions

$$\mathrm{Hilb}^k L \subset A^k \mathbb{P}^2 \subset \mathrm{Hilb}^k \mathbb{P}^2;$$

en effet, le fibré normal à $\mathrm{Hilb}^k L$ dans $A^k \mathbb{P}^2$ est trivial de rang 2, puisque $\mathrm{Hilb}^k L$ est une fibre de

$$A^k : A^k \mathbb{P}^2 \rightarrow G(1, 2).$$

On se propose maintenant, pour une droite L de \mathbb{P}^N , de chercher la classe de Chern totale du fibré normal $v(\mathrm{Hilb}^k L, \mathrm{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N)$. Pour cela, on a la :

PROPOSITION 3. — *Pour une droite L de \mathbb{P}^N , si h est le générateur positif de $A^1(\mathrm{Hilb}^k L)$, on a*

$$c(v(\mathrm{Hilb}^k L, \mathrm{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N)) = (1 - h)^{(N-1)(k-2)}.$$

Pour démontrer cette proposition, on commence par le :

LEMME 2. — *Soit H un hyperplan de \mathbb{P}^N et P un plan tel que $L = P \cap H$. Alors le fibré normal $v(\mathrm{Hilb}^k L, \mathrm{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N)$ scinde en la somme directe*

$$v(\mathrm{Hilb}^k L, \mathrm{Hilb}_c^k H) \oplus v(\mathrm{Hilb}^k L, \mathrm{Hilb}_c^k P).$$

Preuve du lemme. — Soit $(x_1 : x_2 : \dots : x_{N+1})$ un système de coordonnées homogènes pour lequel H est $\{x_2 = 0\}$ et P est $\{x_3 = x_4 = \dots = x_N = 0\}$. Si

$$(p(x_1), x_2, x_3, \dots, x_N)$$

est l'idéal d'un k -uplet ξ de L (dans l'ouvert $\{x_{N+1} \neq 0\}$ de \mathbb{P}^N), p étant un polynôme de degré k , on a une carte de $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N$ en ξ correspondant à l'idéal

$$(p(x_1) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i^1 x_1^i, x_j + \sum_{i=0}^{k-1} a_i^j x_1^i), \quad 2 \leq j \leq N.$$

La sous-variété $\mathrm{Hilb}_c^k H$ est donnée dans cette carte par $a_i^2 = 0$ ($0 \leq i \leq k-1$) et $\mathrm{Hilb}_c^k P$ par $a_i^j = 0$ ($3 \leq j \leq N$ et $0 \leq i \leq k-1$).

Ceci prouve qu'on a l'intersection *transverse*

$$\mathrm{Hilb}^k L = \mathrm{Hilb}_c^k P \cap \mathrm{Hilb}_c^k H$$

dans $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N$, d'où le résultat.

Pour montrer la proposition 3, une récurrence prouve que $v(\text{Hilb}^k L, \text{Hilb}^k \mathbb{P}^N)$ est isomorphe à la somme directe de $N-1$ copies de $v(\text{Hilb}^k L, \text{Hilb}^k \mathbb{P}^2)$, ce qui termine la démonstration, vu la proposition 2.

IV. Applications

(a) Pour fixer les idées, nous allons donner tout de suite un exemple : l'application de ce qui précède à la formule des sextiséchantes d'une surface de \mathbb{P}^4 . Considérons une surface S de \mathbb{P}^4 , ne contenant qu'un nombre fini p de droites L_j , de self-intersection $l_j \in \mathbb{Z}$. On suppose S non singulière au voisinage de chaque L_j .

On supposera également qu'en dehors des sextuplets situés sur ces droites, la surface ne possède qu'un nombre fini de sextuplets alignés. On se propose de chercher ce nombre en fonction des l_j et de $s(S)$ où $s(S)$ est défini par le degré du 0-cycle $i^*[\text{Hilb}_c^6 S]$ où $i : \text{Al}^6 \mathbb{P}^4 \hookrightarrow \text{Hilb}_c^6 \mathbb{P}^4$ est l'injection canonique. (La formule donnant $s(S)$ pour une surface lisse quelconque de \mathbb{P}^4 a été annoncée dans [5], formule (5) et démontrée dans [8].)

La nécessité de l'hypothèse faite de finitude vient de ce que, même si S ne contient pas de droite, elle peut très bien contenir une infinité de sextuplets alignés et la formule donnant $s(S)$ n'a alors plus grande signification. Tel est par exemple le cas de la surface $S(4, 6)$ intersection complète de deux hypersurfaces de degré 4 et 6, la dernière ayant été choisie ne contenant pas de droite. L'hypersurface quartique contient une infinité de droites et ainsi S possède une infinité de sextuplets alignés, cela bien que S ne contienne pas de droite.

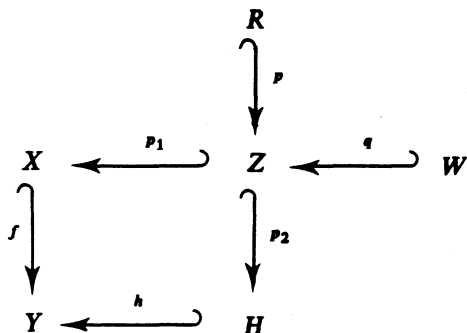
Considérons, plus précisément, le schéma résiduel R (voir [4]) de toutes les composantes $\text{Hilb}_c^6 L_j \simeq \mathbb{P}^6$ dans l'intersection $\text{Al}^6 \mathbb{P}^4 \cap \text{Hilb}_c^6 S$ et supposons-le fini.

Nous utiliserons le théorème de l'intersection résiduelle sous la forme plus faible suivante :

THÉORÈME (FULTON-KLEIMAN-LAKSOV-MACPHERSON). — Soit H et X deux sous-schémas d'un schéma Y avec X localement intersection complète dans Y . Soit Z le schéma intersection (défini par l'idéal $I_X + I_H$).

Soit W un sous-schéma de Z et $R = R(W, Z)$ son schéma résiduel. On suppose que W et R sont localement intersections complètes dans H . On a

un diagramme commutatif cartésien :



Supposons $\text{codim}_H R = \text{codim}_Y X$ et $\text{codim}_H W = \text{codim}_Y X - n$.

Alors pour tout cycle α dans l'anneau de Chow de H , on a dans l'anneau de Chow de X la relation

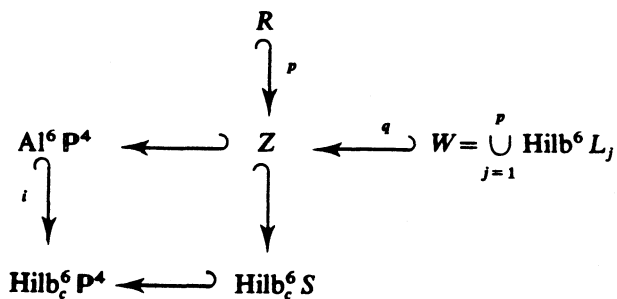
$$f^* h_* \alpha = p_* (p_2 p)^* \alpha + q_* (c_n \cdot (p_2 q)^* \alpha),$$

où c_n est la n -ième classe de Chern du fibré virtuel $(p_1 q)^* \nu_f - \nu_{p_2 q}$ sur W (ν désignant le fibré normal).

On va utiliser ce théorème ici appliqué à $Y = \text{Hilb}_c^6 \mathbb{P}^4$:

$$\begin{aligned}
 H &= \text{Hilb}_c^6 S, & X &= \text{Al}^6 \mathbb{P}^4, \\
 W &= \bigcup_{j=1}^p \text{Hilb}^6 L_j, & \alpha &= 1 = [\text{Hilb}_c^6 S],
 \end{aligned}$$

le schéma R étant ici formé des autres sextuplets alignés sur S . On a le diagramme commutatif



et les hypothèses sont remplies car dans ce cas, W , X , H et Y sont lisses. Ici, $n=6$. Donc la formule de l'intersection résiduelle donne

$$s(S) = i^* [\text{Hilb}_c^6 S] = p_* R + q_* c_6$$

avec

$$c_6 = c_6(v(\mathbb{A}^6 \mathbb{P}^4, \text{Hilb}_c^6 \mathbb{P}^4) | W - v(W, \text{Hilb}_c^6 S)).$$

Mais dans le groupe de Grothendieck $K(W)$, on a évidemment

$$v(\mathbb{A}^6 \mathbb{P}^4, \text{Hilb}_c^6 \mathbb{P}^4) | W = v(W, \text{Hilb}_c^6 \mathbb{P}^4) - v(W, \mathbb{A}^6 \mathbb{P}^4).$$

Or $v(W, \mathbb{A}^6 \mathbb{P}^4)$ est trivial car chaque $v(\text{Hilb}^6 L_j, \mathbb{A}^6 \mathbb{P}^4)$ est lui-même trivial puisque $\text{Hilb}^6 L_j$ est une fibre de la fibration Axe : $\mathbb{A}^6 \mathbb{P}^4 \rightarrow G(1, 4)$. Ainsi,

$$c_6 = c_6(v(W, \text{Hilb}_c^6 \mathbb{P}^4) - v(W, \text{Hilb}_c^6 S)).$$

Calculons plutôt la classe de Chern totale. Soit h_j le générateur positif de $A^1(\text{Hilb}^6 L_j) \simeq A^1(\mathbb{P}^6) \simeq \mathbb{Z}$. D'après les propositions 3 et 1, on a

$$\begin{cases} c(v(\text{Hilb}^6 L_j, \text{Hilb}_c^6 \mathbb{P}^4)) = (1 - h_j)^{12}, \\ c(v(\text{Hilb}^6 L_j, \text{Hilb}_c^6 S)) = (1 - h_j)^{5 - l_j} \end{cases}$$

car ici $N=4$ et $k=6$. D'où la classe de Chern totale :

$$c(v(\text{Hilb}^6 L_j, \text{Hilb}_c^6 \mathbb{P}^4) - v(\text{Hilb}^6 L_j, \mathbb{A}^6 \mathbb{P}^4)) = (1 - h_j)^{7 + l_j}$$

dont la partie de degré 6 est $\binom{7 + l_j}{6} h_j^6$.

Ainsi $q_* c_6$ a pour degré total $\sum_{j=1}^p \binom{7 + l_j}{6}$.

Par suite, le théorème de l'intersection résiduelle donne

$$s(S) = \deg i^* [\text{Hilb}_c^6 S] = \text{card}(R) + \sum_{j=1}^p \binom{7 + l_j}{6}.$$

Conclusion

Soit S une surface de \mathbb{P}^4 ne contenant qu'un nombre fini p de droites L_j de self-intersection l_j .

Lorsque le schéma résiduel R de $\bigcup_{j=1}^p \text{Hilb}^6 L_j$ dans $\text{Al}^6 \mathbb{P}^4 \cap \text{Hilb}_c^6 S$ est fini, son degré est donné par

$$\deg R = s(S) - \sum_{j=1}^p \binom{7+l_j}{6}.$$

(Voir [5] pour l'expression complète de la formule.)

Exemple. — La surface $S = S(2,2)$ intersection complète de deux hyper-surfaces quadriques dans \mathbb{P}^4 contient 16 droites de self-intersection -1 . Par ailleurs, elle n'a pas d'autre sextisécante, pour raison évidente du degré. On a ainsi $s(S) = 16$.

(b) Nous envisageons maintenant le cas général avec N et k quelconques. On suppose toujours que la surface S de \mathbb{P}^N ne contient qu'un nombre fini p de droites L_j de self-intersection $l_j \in \mathbb{Z}$.

Soit V une sous-fibration localement triviale de $\text{Al}^k \mathbb{P}^N$:

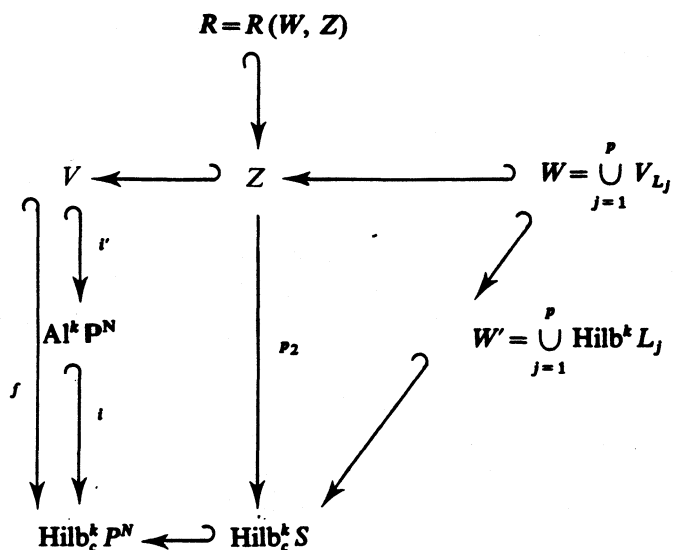
$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & \text{Al}^k \mathbb{P}^N \\ & \searrow & \swarrow \text{Axe} \\ & G(1, N) & \end{array}$$

la fibre-type $V_0 \subset \text{Hilb}^k \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{P}^k$ est supposée localement intersection complète; on notera m son degré. On suppose que V est de dimension complémentaire à celle de $\text{Hilb}_c^k S$ dans $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N$, soit $\dim V = Nk - 2k$, ou encore en notant r la dimension de V_0 : $r = k(N-2) - (2N-2)$.

La fibre V_{L_j} de V en L_j est contenue dans $\text{Hilb}^k L_j$. Considérons le diagramme commutatif, formé d'injections canoniques (on pose $f = i' \circ i$), où Z est le schéma intersection de V et $\text{Hilb}_c^k S$ dans $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N$ (W (resp. W') la réunion des V_{L_j} (resp. $\text{Hilb}^k L_j$) et R le schéma résiduel de W dans Z . (Voir page suivante.)

Dans toute la suite, on suppose le schéma résiduel R fini et on se propose de calculer son degré en fonction du degré de $[V] \cdot i^*[\text{Hilb}_c^k S]$. (Ce qui est une formule k -sécante : voir [6], [7], [8].)

On peut appliquer le théorème de l'intersection résiduelle car (par hypothèse sur V_0), V est localement intersection complète dans $\text{Al}^k \mathbb{P}^N$,



donc dans $\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N$ (ces deux derniers étant lisses). De même, V_{L_j} est localement intersection complète dans $\text{Hilb}^k L_j$ qui est lisse dans $\text{Hilb}_c^k S$.

Comme

$$\begin{cases} \text{codim}_{\text{Hilb}_c^k S}(W) = 2k - r, \\ \text{codim}_{\text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N}(V) = 2k, \end{cases}$$

l'excès de dimension de W est r et donc la formule de l'intersection résiduelle donne (pour $\alpha = 1 = [\text{Hilb}_c^k S]$) :

$$f^*[\text{Hilb}_c^k S] = p_* R + q_* c_r,$$

où

$$c_r = c_r(v(V, \text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N) | W - v(W, \text{Hilb}_c^k S)).$$

Or dans $K^*(W)$, on a

$$v(V, \text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N) | W = v(W, \text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N) - v(W, V).$$

D'abord $v(W, V)$ est trivial car chaque $v(V_{L_j}, V)$ est lui-même trivial, puisque V_{L_j} est une fibre de la fibration $\text{Axe} | V : V \rightarrow G(1, N)$. Ainsi,

$$c_r = c_r(v(W, \text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N) - v(W, \text{Hilb}_c^k S)).$$

Naturellement, par différence dans $K'(W)$, on a

$$c_r = c_r(v(W', \text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N) | W - v(W', \text{Hilb}_c^k S) | W).$$

Soit alors h_j le générateur positif de $A^1(\text{Hilb}^k L_j) \simeq A^1(\mathbb{P}^k) \simeq \mathbb{Z}$. D'après les propositions 3 et 1, on a les classes de Chern totales :

$$\begin{cases} c(v(\text{Hilb}^k L_j, \text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N)) = (1 - h_j)^{(N-1)(k-2)}, \\ c(v(\text{Hilb}^k L_j, \text{Hilb}_c^k S)) = (1 - h_j)^{k-l_j-1}. \end{cases}$$

D'où il résulte

$$c(v(\text{Hilb}^k L_j, \text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N) - v(\text{Hilb}^k L_j, \text{Hilb}_c^k S)) = (1 - h_j)^{(N-1)(k-2)-k+l_j+1}.$$

La partie de degré r de $c(v(W', \text{Hilb}_c^k \mathbb{P}^N) - v(W', \text{Hilb}_c^k S))$ est donc

$$\sum_{j=1}^p (-1)^r \binom{(N-1)(k-2)-k+l_j+1}{r} h_j^r,$$

le \sum n'ayant pour l'instant qu'une signification formelle.

Par fonctorialité des classes de Chern, on trouve donc

$$c_r = \sum_{j=1}^p (-1)^r \binom{(N-1)(k-2)-k+l_j+1}{r} h_j^r | V_{L_j}.$$

Or, par définition du degré m de V_0 dans $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{P}^k$, on a $\deg(h_j^r | V_{L_j}) = m$. Ainsi,

$$\deg q_* c_r = \sum_{j=1}^p (-1)^r \binom{(N-1)(k-2)-k+l_j+1}{r} m.$$

Si on se souvient qu'on a posé $r = k(N-2) - (2N-2)$, on trouve

$$\deg q_* c_r = \sum_{j=1}^p (-1)^{kN} m \binom{(N-1)(k-2)-k+l_j+1}{k(N-2)-(2N-2)}.$$

Mais la formule de l'intersection résiduelle donnait

$$\deg f^* [\text{Hilb}_c^k S] = \text{card}(R) + \deg q_* c_r.$$

Par la formule des projections, il vient :

$$\begin{aligned} \deg f^* [\text{Hilb}_c^k S] &= \deg i'^* i^* [\text{Hilb}_c^k S] \\ &= \deg i'_* (1) \cdot i^* [\text{Hilb}_c^k S] = \deg [V] \cdot i^* [\text{Hilb}_c^k S]. \end{aligned}$$

On a donc finalement démontré le :

THÉOREME. — Soit V une sous-fibration de $\text{Al}^k \mathbb{P}^N$, de fibre-type V_0 de dimension $k(N-2) - (2N-2)$, V_0 étant supposée localement intersection complète et de degré m dans $\text{Hilb}^k \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{P}^k$.

Soit S une surface de \mathbb{P}^N ne contenant qu'un nombre fini p de droites L_j de self-intersection $l_j \in \mathbb{Z}$. On suppose que le schéma résiduel R des V_{L_j} dans $V \cap \text{Hilb}_c^k S$ est fini.

Alors le degré est donné par

$$\deg R = \deg [V] \cdot i^* [\text{Hilb}_c^k S] - \sum_{j=1}^p (-1)^{kN} m \binom{(N-1)(k-2) - k + l_j + 1}{k(N-2) - (2N-2)}.$$

Remarque 4. — On se servira surtout du théorème lorsque $R = \emptyset$. Voir [7], [8].

(c) Surfaces de \mathbb{P}^4 .

On a regardé en (a) comment une droite L de S contribuait comme sextisécante.

● Regardons comment une telle droite contribue comme bitangente. Soit $N=4$, $k=4$; soit $V_0 \subset \text{Hilb}^4 \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^4$ la surface formée des quadruplets

$\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow$ (on note $\bullet \rightarrow$ un point-double et $\bullet \rightarrow^3$ un point triple aligné). On reconnaît en V_0 la surface de Veronese obtenue par le plongement

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 \cong \text{Hilb}^2 \mathbb{P}^1 &\hookrightarrow \text{Hilb}^4 \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^4, \\ I &\mapsto I^2. \end{aligned}$$

Elle est de degré $m=4$ dans \mathbb{P}^4 . Soit $V \subset \text{Al}^4 \mathbb{P}^4$ la sous-fibration formée des quadruplets alignés de la forme $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow$; d'après le théorème, la contribu-

tion de V_L dans le 0-cycle $[V] \cdot i^* [\text{Hilb}_c^4 S]$ est $4 \binom{3+l}{2}$.

Donc la droite L , de self-intersection l , compte $4 \binom{3+l}{2}$ fois en tant que bitangente.

Bien entendu, on a supposé comme toujours que S ne contient qu'un nombre fini de droites, et par ailleurs qu'en dehors de ces droites, S n'a qu'un nombre fini de bitangentes.

● Combien compte une droite $L \subset S$ en tant que tangente qui recoupe trois fois S ? (On suppose comme toujours qu'il n'y a qu'un nombre fini de telles droites, en dehors des droites contenues dans S .)

Soit $N=4$, $k=5$. Dans $\text{Hilb}^5 \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^5$, soit V_0 l'hypersurface formée des quintuplets $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$; elle est de degré $m=8$.

(On peut le voir en calculant un résultant, ou bien en remarquant que c'est l'image de φ :

$$\begin{aligned} \text{Hilb}^1 \mathbb{P}^1 \times \text{Hilb}^3 \mathbb{P}^1 &\xrightarrow{\varphi} \text{Hilb}^5 \mathbb{P}^1, \\ (I, J) &\mapsto I^2 \cdot J. \end{aligned}$$

Si h_i est le générateur hyperplan de $\text{Hilb}^i \mathbb{P}^1$, on a (avec abus d'écriture) $\varphi^* h_5 = 2h_1 + h_3$, d'où $\varphi^* h_5^4 = 8h_3^3 h_1 = 8$ point.)

Soit V la sous-fibration correspondante de $\text{Al}^5 \mathbb{P}^4$. D'après le théorème, la droite L compte $8 \binom{5+l}{4}$ fois en tant que tangente recoupant S trois fois.

(d) Surfaces de \mathbb{P}^5 .

Soit $L \subset S \subset \mathbb{P}^5$ une droite; on fait les hypothèses de finitude habituelles dans chaque cas.

● Combien compte L comme quadrisécante?

Soit $N=5$, $k=4$ et $V = \text{Al}^4 \mathbb{P}^5$, donc $m=1$. Vu le théorème, L compte $\binom{5+l}{4}$ fois comme quadrisécante de S .

● Combien compte L comme tangente d'inflexion?

Soit $N=5$, $k=3$ et $V_0 \subset \text{Hilb}^3 \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^3$ la cubique gauche formée des triplets $\bullet \bullet \bullet$; on a $m=3$. Soit V la sous-fibration correspondante de $\text{Al}^3 \mathbb{P}^5$. Par le théorème, L compte $-3(2+l)$ fois comme tangente d'inflexion.

(e) Surfaces de \mathbb{P}^6 .

Sous les hypothèses habituelles, combien compte L comme tangente recoupant $S \subset \mathbb{P}^6$? Soit $N=6$, $k=3$ et $V_0 \subset \text{Hilb}^3 \mathbb{P}^1$ la surface de degré

$m=4$ (et non $3 \dots$) formée des triplets $\bullet \bullet \rightarrow$; soit V la sous-fibration correspondante de $Al^3 P^6$. D'après le théorème, L compte $4 \binom{3+l}{2}$ fois comme tangente recoupant S .

(f) Surfaces de P^7 .

Toujours sous les hypothèses habituelles, combien compte L comme trisécante à S ? Soit $N=7$, $k=3$ et $V=Al^3 P^7$; on a donc $m=1$. Alors le théorème montre que L compte $-\binom{4+l}{3}$ fois comme trisécante.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] IARROBINO (A.). — Reducibility of the families of 0-dimensional schemes on a variety, *Inv. Math.*, vol. 15, 1972, p. 72-77.
- [2] FULTON (W.) and LAKSOV (D.). — *Residual intersections and the double-point formula, Real and complex singularities*, Oslo, 1976, p. 171-177.
- [3] FULTON (W.) and MACPHERSON (R.). — *Intersecting cycles on an algebraic variety, Real and complex singularities*, Oslo, 1976, p. 179-197.
- [4] KLEIMAN (S.). — Multiple-point formulas I: iteration, *Acta Math.*, vol. 147, 1981, p. 13-49.
- [5] LE BARZ (P.). — Formules pour les multiséchantes des surfaces, *C. R. Acad. Sc.*, t. 292, 1981, p. 797-800.
- [6] LE BARZ (P.). — Quelques calculs dans les variétés d'alignements, *Adv. in Maths* (à paraître).
- [7] LE BARZ (P.). — Formules pour les triséchantes des surfaces algébriques (à paraître).
- [8] LE BARZ (P.). — Quelques formules multiséchantes pour les surfaces (à paraître).
- [9] LE BARZ (P.). — Un lemme sur les fibrés normaux, *C. R. Acad. Sc.*, t. 296, 1983, p. 911-914.