BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur les courbes tracées sur les surfaces du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 19-20
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__19_1>

Sur les courbes tracées sur les surfaces du second ordre; par M. HALPHEN.

(Séance du 4 décembre 1872)

Dans un mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des sciences, au commencement de l'année 1870, et où il est traité de la théorie générale des courbes gauches algébriques, j'ai démontré divers théorèmes relatifs aux courbes tracées sur les surfaces du second ordre. Le plus saillant d'entre eux est le suivant: *Les surfaces de degré minimum, qui passent par une ligne algébrique quelconque tracée sur une surface du second ordre, coupent cette dernière, en outre, seulement suivant des droites d'un même système.*

Je me propose de donner ici une démonstration de ce théorème, très-simple et différente de celle qui est contenue dans le mémoire précité. Je m'appuierai sur le lemme suivant :

Si, par l'intersection complète de deux surfaces S *et* S_1, *d'un degré égal au produit des degrés de ces surfaces, on mène une troisième surface* S_2, *de degré supérieur à celui de* S_1, *la courbe, suivant laquelle les surfaces* S *et* S_2 *se coupent en outre, est l'intersection complète de la surface* S *et d'une autre surface.*

En effet, en figurant par $S=0$, $S_1=0$, $S_2=0$ les équations de ces surfaces, on a, d'après l'hypothèse, $S_2 = AS + BS_1$, A et B étant des polynômes dont le premier s'évanouit si le degré de S_2 est inférieur à celui de S. Cette relation prouve que l'intersection de S_2 et de S se compose de celles de cette dernière surface avec les surfaces $S_1=0$ et $B=0$.

Cela posé, soit une courbe algébrique P, de degré p, sur une surface du second ordre. Soit q le nombre de ses points de rencontre avec les génératrices rectilignes d'un système, et, par suite, $p-q$ le nombre de ses points de rencontre avec celles de l'autre système. Si la courbe proposée est l'intersection complète de la surface du second ordre et d'une autre surface, ces deux nombres sont égaux tous deux au degré de cette dernière surface. Nous allons démontrer le théorème réciproque, c'est-à-dire que :

Si une courbe tracée sur une surface du second ordre rencontre en un même nombre de points les génératrices rectilignes des deux systèmes, elle est l'intersection complète de la surface du second ordre et d'une autre surface.

Soit donc une courbe P_1 de degré $2q$, rencontrant en q points toutes les génératrices rectilignes d'une surface du second ordre S, sur laquelle elle est tracée. Par cette courbe on peut mener une surface Σ de degré $2q-1$, par exemple un cône ayant son sommet sur la courbe. Les surfaces S et Σ se coupent, en outre, suivant une courbe P_2 de degré $2(q-1)$, qui rencontre également toutes les génératrices rectilignes de S en un même nombre de points. Admettons que le théorème soit vrai pour les courbes de degré $2(q-1)$. Il en résultera que P_2 est une intersection complète. Donc, d'après le lemme, la courbe P_1, suivant laquelle se coupent en outre les surfaces S et Σ passant par P_2, est aussi une intersection complète. Donc, si le théorème est vrai pour les surfaces de degré $2(q-1)$, il l'est aussi pour celles de degré $2q$. Or, il l'est évidemment pour celles du degré 2, qui sont planes. Donc le théorème est démontré.

Revenons maintenant à une courbe P quelconque, de degré p, rencontrant les droites de la surface respectivement en q et $p-q$ points. Soit, pour fixer les idées, q le plus grand de ces deux nombres q et $p-q$. A la courbe P adjoignons $q-(p-q)$ ou $2q-p$ droites de la surface, rencontrées chacune par cette courbe en q points. Il est clair que l'ensemble de la courbe P et de ces droites forme une ligne P_1 de degré $2q$, rencontrant en q points toutes les génératrices rectilignes. La ligne P_1 est donc une intersection complète. Il existe donc des surfaces de degré q, passant par la courbe P, et coupant en outre la surface S suivant des droites d'un même système. Il est clair d'ailleurs que l'on ne peut mener par P des surfaces de degré moindre que q, puisque cette courbe est rencontrée en q points par des droites. De plus, toute surface de degré q, menée par P, coupe, en outre, la surface du second ordre suivant une courbe P′, de degré $2q-p$, qui rencontre les génératrices rectilignes d'un système en $2q-p$ points, et ne rencontre pas celles de l'autre système. Or, une courbe qui rencontre une droite en un nombre de points égal à son degré se réduit forcément à des droites. Donc toute surface de degré q menée par P coupe la surface S, en outre, suivant des droites d'un même système ; ce qui démontre entièrement le théorème annoncé.