

BULLETIN DE LA S. M. F.

C. LE PAIGE

Sur les déterminants bordés

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 128-132

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__128_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__128_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Note sur les determinants bordés; par M. C. LE PAIGE.

(Séance du 2 avril 1880.)

Soit un déterminant symétrique du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

que l'on peut toujours regarder comme le discriminant d'une forme quadratique à n variables

$$f = \sum a_{ik} x_i x_k.$$

Le déterminant symétrique que l'on obtient en bordant Δ de

p rangées et de p colonnes composées chacune de n éléments et de p zéros peut toujours se mettre sous une forme assez élégante.

Nous nous bornerons à le faire voir pour $n=5, p=3$, afin d'éviter la longueur des formules; mais on s'apercevra aisément que la méthode de démonstration est générale.

Soit

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \lambda_5 & \mu_5 & \nu_5 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Soit

$$F = \sum A_{ik} x_i x_k$$

la forme adjointe de f .

Multiplions Δ_1 par

$$\Delta^4 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{15} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{25} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{51} & A_{52} & \dots & A_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

nous aurons

$$2^5 \Delta_1 \Delta^4 = \begin{vmatrix} 2\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_1} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_1} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_1} \\ 0 & 2\Delta & 0 & 0 & 0 & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_2} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_2} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Delta & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_5} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_5} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_5} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Mais il est visible, par le théorème de Laplace, que ce dernier déterminant peut se mettre sous la forme de produit de deux déterminants rectangulaires.

En conséquence,

$$2^5 \Delta_1 \Delta_4 = 4 \Delta^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_1} & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_2} & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_3} & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_4} & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_5} \\ \frac{dF(\mu)}{d\mu_1} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_2} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_3} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_4} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_5} \\ \frac{dF(\nu)}{d\nu_1} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_2} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_3} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_4} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_5} \end{vmatrix}.$$

En appliquant la règle de multiplication à ces deux déterminants rectangulaires, on trouve

$$2^5 \Delta_1 \Delta^4 = 2^2 \Delta^2 \begin{vmatrix} \sum \lambda_i \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i} & \sum \lambda_i \frac{dF(\mu)}{d\mu_i} & \sum \lambda_i \frac{dF(\nu)}{d\nu_i} \\ \sum \mu_i \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i} & \sum \mu_i \frac{dF(\mu)}{d\mu_i} & \sum \mu_i \frac{dF(\nu)}{d\nu_i} \\ \sum \nu_i \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i} & \sum \nu_i \frac{dF(\mu)}{d\mu_i} & \sum \nu_i \frac{dF(\nu)}{d\nu_i} \end{vmatrix}.$$

En général, si nous désignons par D le déterminant fonctionnel du second membre, nous aurons

$$2^n \Delta_1 \Delta^{n-1} = 2^{n-p} \Delta^{n-p} D$$

ou

$$2^p \Delta_1 \Delta^{p-1} = D.$$

Cette relation est bien connue pour $p = 1$. Elle donne, par exemple, l'équation tangentielle d'une conique ou d'une surface du second degré dont on connaît l'équation en coordonnées ponctuelles.

Pour $n = 4$, $p = 2$, elle a été employée par Hesse dans la théorie des surfaces du second ordre ⁽¹⁾.

Cependant la manière dont l'illustre géomètre démontre l'iden-

(¹) *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, 3^{te} Aufl., S. 179.

tité des équations

$$D = 0, \quad \Delta_1 = 0$$

semblerait porter à croire que le théorème général ne lui était pas connu.

Cette même propriété, pour $n = 3$, $p = 2$, a été employée par Clebsch ⁽¹⁾.

Enfin, pour $p = 2$, n quelconque, elle résulte, comme l'a fait voir M. Salmon ⁽²⁾, d'une propriété générale des mineurs du second ordre d'un déterminant; mais cette démonstration n'est plus applicable dès que p surpasse 2.

Si l'on observe que

$$\begin{aligned} \delta(\lambda\mu) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \lambda_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \lambda_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1 \mu_1 A_{11} + \lambda_2 \mu_2 A_{12} + \dots + \lambda_3 \mu_3 A_{33} \\ &= \lambda_1 (\mu_1 A_{11} + \mu_2 A_{12} + \mu_3 A_{13}) + \dots, \end{aligned}$$

on voit que

$$\delta(\lambda\mu) = \frac{1}{2} \sum \lambda_i \frac{dF(\mu)}{d\mu_i}.$$

Cette relation s'applique naturellement aux déterminants d'ordre quelconque.

Par suite, la formule donnée plus haut peut encore s'écrire

$$\Delta^2 \delta(\lambda\mu) = \begin{vmatrix} \delta(\lambda\lambda) & \delta(\lambda\mu) & \delta(\lambda\nu) \\ \delta(\mu\lambda) & \delta(\mu\mu) & \delta(\mu\nu) \\ \delta(\nu\lambda) & \delta(\nu\mu) & \delta(\nu\nu) \end{vmatrix}.$$

et, en général,

$$\Delta^{p-1} \delta(\lambda, \mu, \nu, \dots, \varpi) = \pm [\delta(\lambda\lambda) \delta(\mu\mu) \delta(\nu\nu) \dots \delta(\varpi\varpi)].$$

Une démonstration absolument semblable donnerait le théorème plus général

$$\Delta^{p-1} \delta \begin{pmatrix} \lambda, \mu, \dots, \varpi \\ \lambda', \mu', \dots, \varpi' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \delta(\lambda, \lambda') & \delta(\lambda, \mu') & \dots & \delta(\lambda, \varpi') \\ \delta(\mu, \lambda') & \delta(\mu, \mu') & \dots & \delta(\mu, \varpi') \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta(\varpi, \lambda') & \delta(\varpi, \mu') & \dots & \delta(\varpi, \varpi') \end{vmatrix}.$$

(¹) *Vorlesungen über Geometrie*, 1^{er} B., 2^{er} Theil, S. 909.

(²) *Lessons on higher Algebra*, 3^e ed., p. 29.

Sous cette dernière forme, on voit que la relation s'applique encore lorsque le déterminant Δ n'est pas symétrique.

On a donc ce théorème général :

Le produit du déterminant que l'on obtient en bordant un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre Δ , de p colonnes de n éléments $\lambda, \mu, \dots, \varpi$ et de p rangées $\lambda', \mu', \dots, \varpi'$, par la puissance $p-1$ de Δ , est égal à un déterminant du $p^{\text{ième}}$ ordre dont les éléments sont les formes bilinéaires obtenues en bordant Δ d'une colonne et d'une rangée prises dans les $2p$ lignes $\lambda, \mu, \dots, \varpi; \lambda', \mu', \dots, \varpi'$.

Nous pensons que cette relation, tout au moins sous sa forme générale, n'est pas connue; du moins ne l'avons-nous point rencontrée jusqu'ici.

Elle se prête à différentes applications à la théorie des formes algébriques et à la Géométrie.
