

# BULLETIN DE LA S. M. F.

YVES FÉLIX

STEPHEN HALPERIN

JEAN-CLAUDE THOMAS

**L. S. catégorie et suite spectrale de Milnor-Moore. (Une nuit dans le train)**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 111 (1983), p. 89-96

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1983\\_\\_111\\_\\_89\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__89_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

L. S. CATÉGORIE ET SUITE SPECTRALE  
DE MILNOR-MOORE  
(Une nuit dans le train)

PAR

YVES FÉLIX, STEPHEN HALPERIN et JEAN-CLAUDE THOMAS (\*)

RÉSUMÉ. — Nous montrons qu'il est impossible de majorer la catégorie d'un espace en terme des invariants liés à la suite spectrale de Milnor-Moore et donnons une caractérisation des espaces  $S$  dont l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle est abélienne et  $e(S) \leq 2$ .

ABSTRACT. — The rational category of a space is not bounded by invariants related to the Milnor-Moore spectral sequence. We give a characterization of space  $S$  whose homotopy Lie algebra is abelian and which satisfy  $e(S) \leq 2$ .

Dans cet article on désigne par  $S$  un  $CW$ -complexe, 1-connexe dont l'homologie rationnelle est de dimension finie en chaque degré. On rappelle que la  $L.S.$ -catégorie de  $S$  est le plus petit entier  $m$  tel que  $m+1$  ouverts contractiles dans  $S$  constituent un recouvrement de  $S$ . Cet invariant homotopique, noté  $\text{cat}(S)$  est minoré par la  $L.S.$ -catégorie du localisé  $S_0$  de  $S$ , notée  $\text{cat}_0(S)$  et appelée la *catégorie rationnelle de  $S$* .

Deux autres invariants homotopiques liés à la  $L.S.$ -catégorie sont définis à l'aide de la suite spectrale de Milnor-Moore. Rappelons que si l'on considère la bar-construction sur l'algèbre différentielle des chaînes  $(C_*(\Omega(S)), \partial)$  de l'espace des lacets  $\Omega(S)$ , alors la filtration par le bar degré engendre une suite spectrale de coalgèbres convergeant vers  $H_*(S)$ . Nous appelons *suite*

(\*) Texte reçu le 4 juillet 1982.

Yves FÉLIX, U.C.L., Institut de Mathématique, Chemin du cyclotron 2, 1348 Louvain-La-Neuve (Belgique) (Chercheur F.N.R.S.).

Stephen HALPERIN, Mathematics Department, University of Toronto, Toronto (Canada). (Pendant le cours de cette recherche l'auteur a bénéficié de l'hospitalité du Sondersforschungsbe- reich (40) Mathematik à l'Université de Bonn et de celle de l'Université de Lille-1.)

Jean-Claude THOMAS, Université de Lille-1, U.E.R. de Mathématiques pures et appliquées, 59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex (E.R.A. au C.N.R.S. 07 590).

*spectrale de Milnor-Moore*, la suite spectrale  $E_2^{*,*}$  duale de la précédente, qui converge vers  $H^*(S; \mathbb{Q})$ .

Les deux invariants  $e(S)$  et  $l(S)$  sont alors définis par :

$$e(S) = \sup \{ p \mid E_\infty^{p,*} \neq 0 \}.$$

$$l(S) = \inf \{ p \geq 1 \mid E_{p+1}^{*,*} = E_\infty^{*,*} \}.$$

L'invariant  $e(S)$  a été introduit par TOOMER [T] qui démontre que  $e(S) \leq \text{cat}_0(S)$  et conjecture l'égalité; depuis LEMAIRE et SIGRIST ont exhibé un exemple avec  $e(S) = 2$  et  $\text{cat}_0(S) = 3$ . Le résultat principal de GINSBURG [G] appliqué à  $S_{\mathbb{Q}}$  donne  $l(S) \leq \text{cat}_0(S)$ : par suite :

$$\sup(l(S), e(S)) \leq \text{cat}_0(S) \leq \text{cat}(S).$$

Depuis s'est posée la question d'une éventuelle majoration de  $\text{cat}_0(S)$  en termes des invariants  $l(S)$  et  $e(S)$ . Un des buts de cet article est de démontrer l'impossibilité d'une telle majoration. En effet nous pouvons énoncer :

**THÉORÈME 1.** — Soit  $Y = \bigoplus_{p \geq 2} Y_p$  un espace vectoriel gradué de type fini. Il existe un et un seul espace  $S$  (à type d'homotopie rationnelle près) tel que :

- (i)  $e(S) \leq 2$ ;
- (ii) L'algèbre de Lie  $\pi_*(\Omega(S)) \otimes \mathbb{Q}$  est abélienne;
- (iii) l'image de l'homomorphisme de Hurewicz (rationnel) est isomorphe à  $Y$ .

**THÉORÈME 2.** — A l'exception des seuls espaces  $S^p, S^p \times S^q$  ( $p, q$  impairs) et des espaces dont la cohomologie rationnelle est isomorphe à  $\mathbb{Q}[\alpha]/\alpha^3$  tout espace satisfaisant aux conditions (i), (ii) du théorème 1 vérifie aussi :

$$\dim \pi_*(S) \otimes \mathbb{Q} = \infty.$$

Dans ce cas,  $e(S) = l(S) = 2$  et  $\text{cat}_0(S) = \infty$ .

Ces résultats laissent ouvert le :

**PROBLÈME.** — Si  $\text{cat}_0(S) < \infty$ , peut-on majorer  $\text{cat}_0(S)$  en fonction de  $e(S)$  et de  $l(S)$  ?

Nous pouvons néanmoins montrer que même quand  $S$  est un CW complexe fini on ne peut pas majorer  $\text{cat}_0(S)$  uniquement à l'aide de  $e(S)$ . En effet :

THÉOREME 3. — *Il existe une suite infinie  $S_k, k = 1, 2, \dots$ , de CW complexes finis 1-connexes, telle que :*

$$e(S_k) = 2 \quad \text{et} \quad \text{cat}_0(S_k) > k.$$

En particulier  $\text{cat}_0(S_k)/e(S_k) \rightarrow \infty$ .

Ces résultats se démontrent à l'aide des *modèles minimaux de Sullivan*. Ceci désigne une algèbre différentielle graduée (a. d. g. c.)  $(\Lambda X, d)$  où  $X = \bigoplus_{p \geq 2} X^p$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ , gradué de type fini,  $\Lambda X$  l'algèbre graduée commutative libre engendrée par  $X$ ,  $d$  est une dérivation de carré nul et de degré  $+1$  telle que  $d(X) \subset (\Lambda X)^+ (\Lambda X)^+$ . D'après [S] et [B-G], on associe à tout espace  $S$  un modèle minimal  $(\Lambda X, d)$  unique à isomorphisme près, ce qui induit une bijection entre « les types d'homotopie des espaces  $S_{\mathbb{Q}}$  » et « les classes d'isomorphisme des modèles minimaux ».

D'autre part l'a. d. g. c.,  $\Lambda X$  est munie d'une seconde (wedge) graduation  $\Lambda X = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda^i X$ , lorsque l'on désigne par  $\Lambda^i X$  le sous-espace des mots en  $X$  de longueur  $i$ . La filtration par les idéaux  $\Lambda^{\geq i} X$  engendre une suite spectrale qui s'identifie à celle de Milnor-Moore.

Si on suppose en outre que  $d(X) \subset \Lambda^i X$  pour un  $i$  fixé, alors la cohomologie  $H(\Lambda X, d)$  est bigraduée  $H(\Lambda X, d) = \bigoplus_{p,q} H^{p,q}(\Lambda X, d)$  où  $H^{p,q}(\Lambda X, d)$  est le sous-espace des classes représentées par des cocycles dans  $(\Lambda^p X)^{p+q}$ .

La proposition clef s'énonce :

PROPOSITION 1. — *Soit  $Z_0 = \bigoplus_{p \geq 2} Z_0^p$  un espace vectoriel gradué de type fini. Il existe une et une seule a. d. g. c.  $(\Lambda X, d)$  (à isomorphisme près) telle que :*

- (a)  $d(X) \subset \Lambda^3 X$ .
- (b)  $(\ker d) \cap X \cong Z_0$ .
- (c)  $H^{3,*}(\Lambda X, d) = 0$ .

Dans ce cas,  $(\Lambda X, d)$  vérifie nécessairement :

$$H^{p,*}(\Lambda X, d) = 0, \quad p \geq 3.$$

Démonstration de la proposition 1. — Posons  $Z_1^p = (\Lambda^3 Z_0)^{p+1}$  et définissons  $d : Z_1 \xrightarrow{\cong} \Lambda^3 Z_0$ . Supposons  $(\Lambda(Z_0 \oplus \dots \oplus Z_k), d)$  définie et choisissons  $Z_{k+1}$  et  $d : Z_{k+1} \rightarrow \text{Ker } d \cap \Lambda^3(Z_0 \oplus \dots \oplus Z_k)$  de telle manière que  $d$  induise un isomorphisme  $Z_{k+1} \xrightarrow{\cong} H^{3,*}(\Lambda(Z_0 \oplus \dots \oplus Z_k), d)$ .

Posons  $X = \bigoplus_{k \geq 0} Z_k$ , alors l'a. d. g. c.  $(\Lambda X, d)$  ainsi construite vérifie (a) (b) (c) et est évidemment unique à isomorphisme près.

Il reste à démontrer que  $H^{p,*}(\Lambda X, d) = 0, p \geq 4$ . Pour ceci, fixons une base  $x_1, x_2, \dots$  de  $X$  avec  $\deg x_i \leq \deg x_{i+1}$ ; alors  $dx_i \in \Lambda(x_1, \dots, x_{i-1})$ . Soit  $(\Lambda X_{\geq i}, d)$  l'a. d. g. c. obtenue en quotientant  $(\Lambda X, d)$  par l'idéal  $\Lambda^+(x_1, \dots, x_{i-1})$  et définissons la condition  $C'_j$  par :

$$C'_j : H^{p,q}(\Lambda X_{\geq j}) = 0 \text{ si } p \geq 3 \text{ et } p+q \leq r.$$

Nous terminons en montrant :

(a)  $C'_j \Rightarrow C'_{j+1}$

et :

(b)  $(C'_j, \forall j \geq 2) \Rightarrow C_1^{r+1}$ .

(a)  $C'_j \Rightarrow C'_{j+1}$  : Nous noterons  $d$  et  $\bar{d}$  les différentielles induites dans  $\Lambda X_{\geq j}$  et  $\Lambda X_{\geq j+1}$ . Si  $\Phi \in (\Lambda^p X_{\geq j+1})^s (s \leq r, p \geq 3)$  est un  $\bar{d}$ -cocycle alors  $d\Phi = x_j \Omega$ . Il y a deux cas à distinguer :

Cas (i) :  $\deg x_j$  est pair. Dans ce cas la relation  $0 = d^2 \Phi = x_j d\Omega$  implique  $d\Omega = 0$ . Mais :

$$\Omega \in (\Lambda^{p+1} X_{\geq j})^{r-|x_j|+1}, \quad |x_j| = \deg x_j,$$

et en vertu de  $C'_j, \Omega = d\Gamma$  et  $d(\Phi - x_j \Gamma) = 0$ . Mais  $\Phi - x_j \Gamma \in (\Lambda^p X_{\geq j})^s$  et une deuxième application de  $C'_j$  donne  $\Phi - x_j \Gamma = d\Psi$ , d'où  $\Phi = \bar{d}\Psi'$ .

Cas (ii) :  $\deg x_j$  est impair. De  $d(x_j \Omega) = 0$  on tire  $d\Omega = x_j \Omega_1$ , et donc une suite  $\Omega = \Omega_0, \Omega_1, \dots$  d'éléments dans  $\Lambda X_{\geq j}$  avec :

$$d\Omega_i = x_j \Omega_{i+1}.$$

En particulier  $\deg \Omega_i > \deg \Omega_{i+1} > \dots$  et donc pour un certain  $i, \Omega_{i+1} = 0$ . Il en suit que  $d\Omega_i = 0$  d'où (d'après  $C'_j$ )  $\Omega_i = d\Gamma_i$  et donc  $d(\Omega_{i-1} + x_j \Gamma_i) = 0$ . Une deuxième application de  $C'_j$  donne  $\Omega_{i-1} + x_j \Gamma_i = d\Gamma_{i-1}$  et  $d(\Omega_{i-2} + x_i \Gamma_{i-1}) = 0$ . Continuons de cette manière; à la fin on trouve  $d\Psi = \Phi + x_j \Gamma_0$ , d'où  $\Phi = \bar{d}\Psi'$ .

(b)  $C'_j, \text{ tout } j \Rightarrow C_1^{r+1}$  : Soit  $\Phi \in (\Lambda^p X)^{r+1}$  un cocycle,  $p \geq 4$ . Il faut démontrer que  $\Phi$  est un cobord. Évidemment  $\Phi$  se projette en zéro dans  $\Lambda X_{> i}$  pour  $i$  assez grand. Il suffit donc de montrer que si  $\Phi$  se projette sur un cobord dans  $\Lambda X_{> i}$  il se projette aussi sur un cobord dans  $\Lambda X_{\geq i}$ . Notons  $d$  et  $\bar{d}$  les

différentielles dans  $\Lambda X_{\geq i}$  et  $\Lambda X_{> i}$  et  $\Psi$  l'image de  $\Phi$  dans  $\Lambda X_{\geq i}$ ,  $\Psi'$  son image dans  $\Lambda X_{> i}$ .

Alors  $\Psi' = d\Gamma$ ; remplaçons  $\Psi$  par  $\Psi - d\Gamma$  de telle manière que  $\Psi = x_i \Omega$ . Si  $\deg x_i$  est pair nécessairement  $d\Omega = 0$ ; de plus  $\Omega \in (\Lambda^{\geq 3} X_{\geq i})^{\leq r}$ . Appliquant  $C_i^r$  nous obtenons  $\Omega = d\Gamma$ ,  $\Psi = d(x_i \Gamma)$ .

Si  $\deg x_i$  est impair nous trouvons  $\Omega = \Omega_0, \Omega_1, \dots$  avec  $d\Omega_k = x_i \Omega_{k+1}$ ; pour des raisons de degré, il existe  $k+1$  tel que  $\Omega_{k+1} = 0$ . Les  $\Omega_r$  étant tous de degré  $\leq r$ , nous concluons par le même raisonnement que dans (a) que  $\Omega = d\Gamma + x_i \Gamma'$ . Alors :

$$\Psi = x_i \Omega = -d(x_i \Gamma).$$

C.Q.F.D.

*Démonstration du théorème 1.* — D'après un résultat d'ANDREWS et ARKOWITZ [A-A], la condition  $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$  abélienne équivaut à  $d(X) \subset \Lambda^{\geq 3} X$ , où  $(\Lambda X, d)$  est le modèle minimal de  $S$ . Si de plus  $d(X) \subset \Lambda^3 X$ , l'image de l'homomorphisme de Hurewicz est en dualité avec  $\text{Ker}(d) \cap X$ , [S], [B-G], [B-L].

Avec les notations de la proposition 1, choisissons  $Z_p^0 = \text{Hom}(Y_p, \mathbb{Q})$ . Les conditions (ii) et (iii) du théorème 1 sont satisfaites et puisque  $H^{p,*}(\Lambda X, d) = 0$  si  $p \geq 3$ , la condition (i) du théorème 1 est certainement vérifiée.

Pour montrer l'unicité, supposons que  $S$  vérifie (i), (ii), (iii). Soit  $(\Lambda X, d)$  un modèle minimal de  $S$ , à l'aide d'un changement de générateurs, on peut supposer que si  $d(x + \Phi) = 0$  pour un  $x \in X$  et un  $\Phi \in \Lambda^{\geq 2} X$  alors  $dx = 0$ . Posons, alors  $Z = X \cap \text{ker } d$  et  $\Lambda X = \Lambda Z \otimes \Lambda Y$ .

Soit maintenant  $(\Lambda \tilde{X}, D_3) = (\Lambda Z \otimes \Lambda \tilde{Y}, D_3)$  le modèle construit dans la proposition 1 à partir de  $Z$ . En vertu de l'unicité de  $(\Lambda \tilde{X}, D_3)$  il suffit de montrer que  $(\Lambda \tilde{X}, D_3)$  est isomorphe à  $(\Lambda X, d)$  pour établir l'unicité de  $S$ .

Supposons avoir construit un isomorphisme :

$$\psi : (\Lambda Z \otimes \Lambda \tilde{Y}^p, D_3) \rightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda Y^{< p}, d)$$

tel que  $\psi|_{\Lambda Z} = \text{id}_{\Lambda Z}$ . Soit  $\tilde{y} \in \tilde{Y}^p$ , alors  $\psi(D_3 \tilde{y})$  est un  $d$ -cocycle dans  $(\Lambda^{\geq 3} X)^{p+1}$  et puisque  $e(S) = 2$  nécessairement  $\psi D_3(\tilde{y})$  est un  $d$ -cobord.

Posons,  $\psi(D_3(\tilde{y})) = d(\alpha(\tilde{y}) + \beta(\tilde{y}))$  où  $\alpha(\tilde{y}) \in (\Lambda Z \otimes \Lambda^+ Y^{< p})^p$ ,  $\beta(\tilde{y}) \in Y^p$  dépendent linéairement de  $\tilde{y}$ . Puisque  $\psi$  est un isomorphisme, pour tout  $\tilde{y} \neq 0$   $\psi(D_3 \tilde{y})$  possède une composante non nulle dans  $\Lambda^3 X$ , d'autre part pour des raisons de degré que  $\alpha(\tilde{y}) \in \Lambda^{\geq 2} X$ .

Par suite.  $d\alpha(\tilde{y}) \in \Lambda^{\geq 4} X$  et  $\beta(\tilde{y}) \neq 0$ ; c'est-à-dire que  $\beta$  est injectif. Prolongeons  $\psi$  à  $\tilde{Y}^p$  en posant  $\psi(\tilde{y}) = \alpha(\tilde{y}) + \beta(\tilde{y})$  alors  $\psi : (\Lambda Z \otimes \Lambda \tilde{Y}^{< p}, D_3) \rightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda Y^{< p}, d)$  est un homomorphisme d'a. d. g. c. injectif. Il est à montrer que  $Y^p \subset \text{Im } \psi$ . Soit  $y \in Y^p$  alors  $dy$  appartient à  $(\Lambda Z \otimes \Lambda Y^{< p}) \cap \Lambda^{\geq 3} X$ , d'où :

$$\psi^{-1}(dy) \in (\Lambda Z \otimes \Lambda \tilde{Y}^{< p}) \cap (\Lambda^{\geq 3} \tilde{X}) \cap (\ker D_3).$$

D'après la proposition 1,  $\psi^{-1}(dy) = D_3 \Phi$  et puisque  $\Phi$  est de degré  $p$ ,  $\psi(\Phi)$  est défini et  $d(\gamma - \psi(\Phi)) = 0$ .

Posons  $\Phi = \tilde{y} + \Omega$  avec  $\tilde{y} \in \tilde{Y}^p$ ,  $\Omega \in \Lambda^{\geq 2} \tilde{X}$ , alors  $d(y - \beta(\tilde{y}) - \Omega') = 0$  avec  $\Omega' \in \Lambda^{\geq 2} X$ . Par hypothèse  $y - \beta(\tilde{y}) \in Y^p \cap Z = 0$ , d'où :

$$y = \beta(\tilde{y}) = \psi(\tilde{y}) - \alpha(\tilde{y}) = \psi(\tilde{y} - \psi^{-1}(\alpha(\tilde{y})))$$

ce qui démontre que  $\psi : (\Lambda Z \otimes \Lambda \tilde{Y}^{< p}, D_3) \rightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda Y^{< p}, d)$  est un isomorphisme d'a. d. g. c. Une induction sur  $p$  termine la démonstration.

*Démonstration du théorème 2.* — Puisque d'après ce qui précède  $S$  admet un modèle du type  $(\Lambda X, D_3)$ , nécessairement  $l(S) = 2$ . Si on suppose en outre que  $\dim X = \dim(\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q}) = \infty$ , d'après [F-H-T] nécessairement  $\text{cat}_0(S) = \infty$ , puisque  $\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q}$  est abélienne.

Supposons maintenant que  $\dim X$  soit fini, et notons  $x_1, \dots, x_n$  une base de  $X$  telle que  $\deg x_i \leq \deg x_{i+1}$ . Comme nous l'avons déjà remarqué dans la démonstration de la proposition 1 chaque  $(\Lambda X_{\geq i}, d)$  satisfait aux conditions (i) et (ii); en particulier :

$$0 = [x_i]^3 \in H(\Lambda X_{\geq i}).$$

Cette dernière condition entraîne d'après [H] que  $\dim H(\Lambda X, d) < +\infty$  et d'après [F-H], §.9, que  $\dim(X^{\text{impair}}) \leq e(S) \leq 2$ . Un petit calcul utilisant la relation  $dX \subset \Lambda^3 X$  et [H], §. 11, montre alors que les seuls modèles possibles sont :

- $(\Lambda(x), 0), \quad \deg x \text{ impair.}$
- $(\Lambda(x, y), 0), \quad \deg x \text{ et } \deg y \text{ impair.}$
- $(\Lambda(x, y), d), \quad dy = 0, \quad dx = y^3.$

C.Q.F.D.

*Démonstration du théorème 3.* — Soit  $S$  satisfaisant aux conclusions des théorèmes 1 et 2 choisi de façon que  $\dim \pi_p(S) \otimes \mathbb{Q} \geq p+1$ , pour tout  $p > 1$ . (Ceci est possible en choisissant bien l'espace vectoriel  $Y$ .)

Soit  $(\Lambda X, d)$  le modèle minimal de  $S$ . La différentielle  $d$  est homogène de wedge degré 2. Considérons un idéal bigradué  $I_k$  de  $\Lambda X$  tel que :

$$I_k^p = 0, \quad p < k, \quad I_k^k \oplus (\text{Ker } d)^k = (\Lambda X)^k,$$

$$I_k^p = (\Lambda X)^p, \quad p > k.$$

L'algèbre différentielle quotient  $(\Lambda X/I_k, \bar{d})$  a le même modèle  $(\Lambda Z, D)$  que la  $k$ -squelette  $S(k)$ , d'une décomposition homologique de  $S$ . Évidemment,  $\bar{d}$  est homogène relativement à la graduation induite dans  $\Lambda X/I_k$  par le wedge degré.

Montrons d'abord que  $e(S(k)) \leq 2$ . En effet si  $\Phi \in \Lambda^3 Z$  est un  $D$ -cocycle son image dans  $\Lambda X/I_k$  est la somme de  $\bar{d}$ -cocycle  $\Psi_i$ . Chaque  $\Psi_i$  est l'image, par la projection  $\Lambda X \rightarrow \Lambda X/I_k$ , d'un  $d$ -cocycle  $\Psi'_i \in \Lambda^i X$  (puisque la projection est bihomogène et surjective en cohomologie). Comme  $e(\Lambda X, d) \leq 2$ ,  $\Psi'_i$  est un  $d$ -cobord, par suite les  $\Psi_i$  sont des  $\bar{d}$ -cobord et  $\Phi$  est un  $D$ -cobord.

Posons maintenant :

$$S_k = S(4k^2 + 2).$$

L'inclusion  $\pi_*(\Omega S_k) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$  est un isomorphisme en degré  $\leq 4k^2$ . Si  $\text{cat}_0(S) = m \leq 2k$  alors en vertu de notre hypothèse initiale  $\text{rg}(\pi_{2k}(\Omega S)) \geq m+1$ . En appliquant alors [F-H-T], théorème 1.6, on déduit que  $m(4k+1) - 4k > 4k^2$ , puisque  $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$  est abélienne. Par suite si  $m \leq 2k$ , nécessairement  $m > k$  et donc  $m > k$  est toujours satisfaite.

Finalement puisque  $\text{cat}_0(S_k) \geq 2$ , nécessairement  $e(S_k) \geq 2$ , ce qui montre que  $e(S_k) = 2$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [A-A] ANDREWS (P.) et ARKOWITZ (M.). — Sullivan's minimal models and higher order Whitehead products, *Canad. J. Math.*, vol. XXX, n° 5, 1978, p. 961-982.
- [B-G] BOUSFIELD (A. K.) et GUGENHEIM (V. K. A. M.). — On the P. L. de Rham theory and rational homotopy type, *Memoirs of A.M.S.*, 179, 1976.
- [B-L] BAUES (H. J.) et LEMAIRE (J. M.). — Minimal models in homotopy theory, *Math. Ann.*, vol. 225, 1977, p. 219-242.
- [F-H] FELIX (Y.) et HALPERIN (S.). — Rational L. S. category and its applications (à paraître *Trans. of A.M.S.*).



- [F-H-T] FÉLIX (Y.), HALPERIN (S.) et THOMAS (J. C.). — *The homotopy Lie algebra for finite complexes* (à paraître).
- [G] GINSBURG (M.). — On the L. S. category, *Ann. of Math.*, vol. 77, 1963, p. 538-551.
- [L-S] LEMAIRE (J. M.) et SIGRIST (F.). — Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L. S. catégorie, *Comment Math. Helvetici*, vol. 56, 1981, p. 103-122.
- [S] SULLIVAN (D.). — Infinitesimal computations in topology, *Publ. I.H.E.S.*, vol. 47, 1977, p. 269-331.