

BULLETIN DE LA S. M. F.

DENIS FEYEL

Sur la théorie fine du potentiel

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 41-57

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__41_0

© Bulletin de la S. M. F., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA THÉORIE FINE DU POTENTIEL

PAR

DENIS FEYEL (*)

RÉSUMÉ. — On étudie les propriétés fines des fonctions fortement surmédianes presque boréliennes associées à un noyau de Hunt. On dégage le rôle essentiel des ensembles « presque G_δ fins » en théorie des ensembles semi-polaires. Les méthodes sont purement potentialistes.

ABSTRACT. — Fine properties of strongly supermedian functions are studied with respect to a Hunt kernel. We point out the essential role of "fine almost G_δ " in semi-polar sets theory. We use of purely potentialist methods.

Introduction

Dans des articles antérieurs [F 1] et [F 2], l'auteur avait mis au point quelques méthodes propres à l'étude des fonctions fortement surmédianes, de la topologie fine, des ensembles semi-polaires. Ces méthodes « purement potentialistes » dépendaient toujours d'une mesure θ fixée, et ne fournissaient donc que des propriétés vraies sauf peut-être sur un polaire relatif à la mesure de référence.

On se propose ici, à partir de la donnée d'un noyau de Hunt sur un espace LCD, de comparer et de recoller les quasi-notions relatives aux différentes mesures θ . De ce point de vue, les théorèmes 2°, 4° et 9° sont cruciaux. On arrive bien naturellement à la notion de fonction presque borélienne des probabilistes, et l'on obtient un certain nombre de propriétés nouvelles ou anciennes mais seulement accessibles aux méthodes probabilistes (cf. [D 1] et [M 2]). On voit par exemple que même sans l'hypothèse de continuité absolue, les propriétés de rareté métrique des ensembles sont liées à leurs propriétés de rareté en topologie fine (th. 10° et 11°). De même la formule de décomposition de Mertens est valable sans condition (th. 7°).

Signalons enfin que l'on pourrait étendre toute cette étude à des cônes de potentiels définis sur des espaces mesurables beaucoup plus généraux que les espaces LCD (cf. [F 6] pour une notion de cône « semi-adapté »).

(*) Texte reçu le 30 avril 1982.

DENIS FEYEL, Université de Paris-VI, Équipe d'Analyse, Tour 46-0, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

I. Fonctions fortement surmédianes

L'espace de base X est localement compact à base dénombrable. Nous considérons la théorie du potentiel associée à un noyau de Hunt V . On pourrait généraliser (cf. [F 6]) mais cela apporterait des difficultés étrangères à la question.

La relation du balayage $\mu <_V \nu$ entre mesures de Radon bornées ≥ 0 est la relation $\mu V \leq \nu V$. On notera B_θ l'ensemble des balayées de θ : c'est un ensemble vaguement métrisable et compact.

Dans tout cet article, le mot « mesure » signifiera « mesure ≥ 0 de Radon bornée ». On écrira $\mu \in \mathcal{M}^+$.

Une fonction $f \geq 0$ quelconque est dite « fortement surmédiane » si l'on a $\int^* f d\mu \leq f(x)$ pour tout $x \in X$ et toute $\mu \in B_x = B_{\epsilon_x}$.

On notera S^* l'ensemble de ces fonctions. S^* est stable par les passages aux enveloppes inférieures quelconques et aux enveloppes supérieures des suites croissantes. Si $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est quelconque, la fonction :

$$R\varphi = \text{Min} \{ f \in S^* / f \geq \varphi \},$$

existe : c'est la réduite de φ .

On notera C_θ le sous-ensemble des $f \in S^*$ qui sont excessives et finies. Si $\varphi \in \mathcal{C}_\theta(X)$, sa réduite $R\varphi$ est excessive et $\in \mathcal{C}_\theta(X)$. Si $\varphi \geq 0$ est « analytique » (i. e. à sous-graphe analytique dans $X \times \overline{\mathbb{R}^+}$), la fonction $R\varphi$ l'est aussi et l'on a la relation du balayage (Mokobodzki) (MO 1) :

$$\theta(R\varphi) = \sup \{ \mu(\varphi) / \mu \in B_\theta \},$$

pour toute mesure $\theta \in \mathcal{M}^+$.

Si $\varphi \geq 0$ est quelconque et $\theta \in \mathcal{M}^+$, on définit :

$$c_\theta(\varphi) = \int^* R\varphi d\theta.$$

c_θ est une capacité fonctionnelle de Choquet (C). Si E est un ensemble, on écrit aussi $c_\theta(E) = c(1_E)$. c_θ est fortement sous-additive sur les ensembles analytiques. On en déduit ([ME], p. 72) qu'un ensemble analytique 0-polaire (i. e. $c_\theta(E) = 0$) est contenu dans un G_δ -polaire.

1° DÉFINITION. — Une fonction $f \geq 0$ est dite « presque analytique » (en abrégé p. a.) si pour toute mesure $\theta \geq 0$ il existe deux fonctions g et $h \geq 0$ analytiques telles que :

$$g \leq f \leq h \quad \text{partout}$$

et telles que l'ensemble $\{h > g\}$ soit contenu dans un G_δ θ -polaire.

On définit de même la notion de fonction presque borélienne (en abrégé p. b.).

Ces fonctions sont universellement mesurables.

Une fonction f est dite « presque continue » si elle est θ -quasi-continue pour toute mesure θ : c'est-à-dire si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert G de capacité $c_\theta(G) < \varepsilon$ tel que f soit continue sur $X \setminus G$. Une telle fonction est évidemment p. b.

Si θ est fixée, $\mathcal{L}^1(c_\theta)$ est l'espace des f qui sont θ -quasi-continues et telles que :

$$\inf \{ c_\theta(\varphi - \psi) / \psi \in \mathcal{C}_0(X) \} = 0.$$

On notera $\mathcal{R} = \bigcap_\theta \mathcal{L}^1(c_\theta)$: les éléments de \mathcal{R} sont des fonctions bornées presque continues.

Soit \mathcal{L}^∞ l'espace des fonctions universellement mesurables et bornées. On a $V_t(\mathcal{L}^\infty) \subset \mathcal{R}$ pour tout $t > 0$. On en déduit :

- (a) $\varphi \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{L}^\infty$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} R(|\varphi - t V_t \varphi|) \equiv 0$;
- (b) toute fonction excessive u est p. b. (et même presque s. c. i.).

2° THÉORÈME. — Toute fonction fortement surmédiane presque analytique est presque borélienne.

Démonstration. — Disons qu'une fonction $\varphi \geq 0$ est de type F_σ si elle est enveloppe supérieure d'une suite de fonctions s. c. s. Notons u la fonction étudiée, et soit \mathcal{A} l'ensemble filtrant croissant de toutes les fonctions de type F_σ minorant u . Fixons $\theta \in \mathcal{H}^+$. Il existe $h \in \mathcal{A}$ telle que $f \in \mathcal{A}$ implique $f \leq h$ θ -quasi-partout : en effet, soit \mathcal{A}' l'ensemble des Rf pour $f \in \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ est cofinal dans \mathcal{A} . Si u est bornée, les éléments de \mathcal{A}' définissent des fonctionnelles surmédianes au sens de [F 2] et l'existence de $h \in \mathcal{A}'$ résulte de ([F 2], p. 191). Si u n'est pas bornée, on utilise la fonction Arc tg : on obtient une h de type F_σ ayant la propriété voulue, et l'on peut la remplacer par $Rh \in \mathcal{A}'$.

L'ensemble $\{w > h\}$ est θ -polaire, car si l'on avait $w > t > s > h$ sur un compact K , on aurait $h + (t-s)1_K \in \mathcal{A}$, donc $\leq h$ θ -q. p., ce qui exige $c_\theta(K) = 0$ puisque $h < \infty$ sur K . Soit alors u excessive s. c. i. valant $+\infty$ sur $\{w > h\}$ et $\theta(u) < \infty$. La fonction $h' = h + \inf_n (u/n)$ est borélienne, $h' = h$ θ -quasi-partout, et $h \leq w \leq h'$. En faisant varier θ on trouve que w est presque borélienne.

Remarque. — On peut supposer $h = Rh$, i. e. $h \in S^*$, donc aussi $h' \in S^*$.

3° THÉORÈME. — *Le cône S des fonctions fortement surmédianes finies et presque boréliennes est un cône de potentiels, et $V(\mathcal{C}_0(X))$ est dense dans S pour $\sigma(S, \mathcal{M}^+)$.*

En effet, si f et $g \in S$, $R(f-g)$ est p. a. donc $\in S$ par le théorème, mais alors aussi $f - R(f-g)$ par ([F 2], p. 185). La densité de $V(\mathcal{C}_0(X))$ provient de ce que les $f \in S$ vérifient la relation du balayage.

Rappelons quelques propriétés : (qui résultent immédiatement de [F 2]) :

(a) si φ est p. a., $R\varphi$ est p. b. et $R\varphi = \text{Max}(\varphi, \widehat{R\varphi})$: c'est la relation de Mertens. On en déduit que le sous-cône des $f \in S$ qui sont mesurables par rapport à la tribu engendrée par les excessives est aussi un cône de potentiels que nous noterons S_e ;

(b) si E est fermé, et $f \in S$ est bornée, $R_f^E = R(1_E f)$ est presque continue sur $X \setminus E$ ([F 2], p. 187);

(c) S est dénombrablement réticulé en ordre spécifique, car d'après un résultat général de (MO 1) la borne inférieure $f \wedge g$ s'obtient comme limite commune des deux suites définies par récurrence :

$$\begin{aligned} f_0 &= f, & g_0 &= g, & f_{n+1} &= f_n - R(f_n - g_n), \\ g_{n+1} &= g_n - R(g_n - f_n); \end{aligned}$$

(d) si E est p. a., et $f \in S$, la fonction $f \wedge R_f^E$ est « autoréduite » sur E , c'est la plus grande minorante spécifique de f ayant cette propriété, et l'on a $f < f \wedge R_f^E + f \wedge R_f^{\lambda \setminus E}$ (théorème de partition de Brelot, cf. [B] et [F 5]).

II. Ensembles adjacents

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} inclus dans S . Nous dirons que \mathcal{A} et \mathcal{B} sont adjacents si :

(a) \mathcal{A} est filtrant croissant, \mathcal{B} est filtrant décroissant;

(b) pour toute $\mu \in \mathcal{M}^+$, on a :

$$\sup \{ \mu(f) / f \in \mathcal{A} \} = \inf \{ \mu(g) / g \in \mathcal{B} \}.$$

En prenant dans (b) les mesures discrètes, on voit que la fonction $w = \sup \mathcal{A} = \inf \mathcal{B}$ appartient à S^* .

Nous dirons que \mathcal{A} et \mathcal{B} sont fortement adjacents si l'on a aussi :

(c) pour toute $\theta \in \mathcal{M}^+$, il existe une suite croissante $f_n \in \mathcal{A}$, une suite décroissante $g_n \in \mathcal{B}$, telles que :

$$\sup_n f_n = \inf_n g_n, \quad \theta - q. p.$$

Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont fortement adjacents, il est clair que la limite commune w est une fonction p. b. donc $w \in S$. Or, on a :

4. THÉOREME. — Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont adjacents, ils sont fortement adjacents.

Démonstration. — Supposons d'abord w bornée : l'ensemble \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) définit un ensemble filtrant croissant de fonctionnelles surmédianes au sens de [F 2]. Le résultat découle alors de ([F 2], p. 191).

Dans le cas général, fixons θ . Toute fonction de \mathcal{B} est finie donc la condition (b) entraîne que l'on a aussi pour $\mu \in \mathcal{M}^+$:

$$\sup \{ \mu(\text{Arc tg } f) / f \in \mathcal{A} \} = \inf \{ \mu(\text{Arc tg } h) / h \in \mathcal{B} \},$$

i. e. que les ensembles $\text{Arc tg } \mathcal{A}$ et $\text{Arc tg } \mathcal{B}$ sont eux aussi adjacents : ils le sont donc fortement, d'où deux suites $\text{Arc tg } f_n$ et $\text{Arc tg } h_n$ donnant naissance à deux suites f_n et h_n vérifiant le (c).

On peut préciser la nature des éléments de S :

5° THÉOREME. — Si $f \in S$, f bornée, l'ensemble $\mathcal{A} = \{f\}$ et l'ensemble \mathcal{B} des excessives s. c. i. bornées majorant f sont fortement adjacents.

Démonstration. — Il suffit de montrer qu'ils sont adjacents; soit $\theta \in \mathcal{M}^+$, et soit $a > \theta(f)$. Il existe r θ -quasi-excessive $\geq f$ θ -quasi-partout et $\theta(r) < a$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert G de capacité $c_\theta(G) < \varepsilon$, et tel que $r \geq f$ et soit s. c. i. sur $X \setminus G$. La fonction $g = r \wedge M$ sur $X \setminus G$, M sur G majore f dès que $M \geq f$, et est s. c. i. partout. Posons $u = Rg$: u est excessive s. c. i. bornée, majore f et vérifie :

$$\theta(u) \leq c_\theta(g) \leq c_\theta(r) + M c_\theta(G) \leq \theta(r) + M \varepsilon < a,$$

si ε est assez petit.

Remarque. — Si f n'est pas bornée, on peut remplacer \mathcal{B} par l'ensemble des excessives finies ou non, mais non nécessairement s. c. i.

III. Sur la topologie fine

C'est la topologie la moins fine rendant continues les fonctions excessives. Si p est un potentiel strict appartenant à $\mathcal{C}_0(X)$, l'adhérence fine d'un ensemble E p. a. est $\overline{E} = \{p = R_p^E\}$ d'après le théorème 5°, c'est donc un ensemble p. b., et il existe une base de la topologie formée d'ouverts p. b. Mokobodzki a remarqué aussi, à l'aide du théorème 5° que chaque point possède une base de voisinages compacts ordinaires et en a déduit que X est fortement tamisable.

Disons qu'un ensemble E est « presque G_δ fin » si E est p. b. et si pour toute mesure $\theta \in \mathcal{M}^+$ il existe une suite d'ouverts fins p. b. G_n telle que $E = \bigcap_n G_n$ θ -quasi-partout. D'après [F 1] tout E presque G_δ fin est un espace de Baire en topologie fine, et plus précisément, si des E_n sont ouverts fins relatifs finement denses dans E , $\bigcap_n E_n$ contient un ensemble A presque G_δ fin non θ -polaire; ceci $\forall \theta \in \mathcal{M}^+$.

IV. Potentiels semi-réguliers

Nous avons donné dans ([F 2], p. 192) la définition d'une fonctionnelle semi-régulière. Cela se traduit ici par :

DÉFINITION. — Soit $q \in S$, q est dit « potentiel semi-régulier » s'il existe un noyau S^q tel que $S^q(F) = q \wedge R_q^F$ pour tout fermé F .

Ce noyau vérifie alors le principe complet du maximum, admet une famille résolvante (cf. (T)), et toute fonction de S est S^q -surmédiane. On notera C_δ le sous-cône de S constitué des potentiels semi-réguliers.

q est dit « régulier » si $q \in C = C_\delta \cap C_\sigma$.

6° THÉORÈME. — Soit $q \in S$. Pour que q soit un potentiel régulier, il faut et suffit que soit satisfait (a), (b), ou (c). Pour que q soit un potentiel semi-régulier, il faut et suffit que soit satisfait (d) ou (e).

(a) $\inf_i R(q - i V_i, q) \equiv 0$,

(b) pour toute mesure θ telle que $\theta(q) < \infty$, $\mu \rightsquigarrow \mu(q)$ est continue sur B_θ ;

(c) q est presque continue;

(d) pour toute mesure θ telle que $\theta(q) < \infty$, $\mu \rightsquigarrow \mu(q)$ est s. c. s. sur B_θ ;

(e) q est « presque-s. c. s. ».

Les caractérisations (a), (b), (c) résultent de ([F 2], p. 193) et de la notion de fonction presque continue. Les caractérisations (d) et (e) résultent de ([F 2], p. 193) et du théorème suivant dont je dois une partie à Mokobodzki :

7° THÉORÈME (décomposition de Mertens). — Toute $f \in S$ se décompose de manière unique sous la forme $f = u + p + q$ où $p \in C$, $u \in C_\sigma$ est étrangère à C_δ , et où $q \in C_\delta$ est étrangère à C_σ .

Démonstration. — Posons $v = f \wedge \hat{f}$: il est clair que v est la plus grande minorante spécifique excessive de f . Donc $q = f - v$ est étrangère à C_σ : il s'ensuit ([F 2], p. 193) que $q \in C_\delta$. Il reste à extraire p de v : on ne peut raisonner comme dans [F 2] puisque S est seulement dénombrablement réticulé. Posons $v' = \inf_t R(v - t V_t v)$ donc $v' \in S$ et $v' < v$ puisque pour tout $t > 0$ $R(v - t V_t v) < v$. Puis par récurrence : $v_0 = v$, $v_{n+1} = v_n - v'_n$. La suite v_n décroît spécifiquement. Posons $p = \inf_n v_n$, $u = v - p$: c'est la décomposition cherchée. En effet, $v = p + \sum_{n \geq 0} v'_n$, donc $p < v$ d'où l'on déduit :

$$R(p - t V_t p) \leq R(v - t V_t v),$$

puis $p' \leq v'$, et de même $p' \leq v'_n$ puisque $p < v_n$. A la limite $p' = 0$, donc $p \in C$.

Ensuite, soit $p_0 \in C$, et $p_0 < v$. On a $v = p_0 + s$, donc $v' \leq p'_0 + s' = s'$ puisque $p_0 \in C$. On a aussi $v' \geq s'$ car $v > s$ puis $v' = s'$, et $v_1 = p_0 + s_1$. Par récurrence on obtient $v_n = p_0 + s_n$, et à la limite $p_0 < p$. D'après cela p est la plus grande minorante spécifique régulière de v , donc $u = v - p$ est étrangère à C et finalement à C_δ puisque $C = C_\delta \cap C_\sigma$.

V. Supports fins

Soit $q \in C_\delta$. Considérons la relation $\mu <_{(q)} \nu$ si $\mu < \nu$ et $\mu(q) = \nu(q)$: nous dirons que μ est « balayée de ν modulo q » et nous noterons $\mu \in B_\nu(q)$. Si $\nu(q) < \infty$, $B_\nu(q)$ est vaguement compact car $q \in C_\delta$. Si ξ et $\eta \in B_\nu(q)$ et $\nu(q) < \infty$, on a pour tout $p \in C_\delta$:

$$(\xi \wedge \eta)(p) = \inf \left\{ \xi(u) + \eta(v) \begin{array}{l} u + v = p \\ u, v \in C_\delta \end{array} \right\},$$

donc $(\xi \wedge \eta)(q) = \nu(q)$ et par suite $\xi \wedge \eta \in B_\nu(q)$.

Alors $B_\nu(q)$ a un plus petit élément, soit $\tilde{\nu}$.

On note $\delta(q)$ et on appelle « support fin » de q l'ensemble des $x \in X$ tels que $\varepsilon_x = \tilde{\varepsilon}_x$.

8° THÉORÈME. — $\delta(q)$ est un fermé fin presque borélien, et c'est le plus petit tel fermé fin F pour lequel on a $q = R_q^F$ ou aussi $q = S^q(F)$. Si de plus $q \in C$, $\delta(q)$ est un fermé fin régulier, c'est-à-dire que $R_p^{\delta(q)}$ est excessive pour tout $p \in C$.

Démonstration. — On a d'abord $\tilde{\mu} = \hat{\mu}$ dès que $\mu(q) < \infty$. En suivant maintenant une idée de La Pradelle, considérons la résolvante S_t^q associée au noyau S^q . Si $v(q) < \infty$, la relation $\mu < v$ modulo q équivaut à « $\mu < v$ et $\mu S_t^q = v S_t^q$ pour tout $t > 0$ ». Si $p \in C$, posons $p' = \sup_t S_t^q p$, et $\mu'(p) = \mu(p')$: cela définit une mesure $\mu' \in B_\mu$, et $\mu'(q) \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \mu S_t^q q = \mu(q)$ car $\mu \rightsquigarrow \mu(q)$ est s. c. s. sur tout B_θ . Donc $\mu' < \mu$ modulo q , puis $\tilde{\mu} < \mu' < \mu$ modulo q .

On en déduit :

$$\tilde{\mu}' = \mu'' = \mu' \quad \text{et} \quad \tilde{\mu} = \mu^* < \tilde{\mu}' < \tilde{\mu},$$

donc $\mu' = \tilde{\mu}$.

Si p est un potentiel strict, on voit alors que $F = \delta(q) = \{p = p'\}$ est un fermé fin p. b. car $p' \in S$ est finement s. c. s. et $p' \leq p$.

De plus, on a $p' = p$ sur F' pour tout $p \in C$, donc $p' \geq R_p^F$, et $\mu^F < \tilde{\mu}$ pour toute μ intégrant q . On a toujours $\tilde{\mu}(p) = \mu(p) = \tilde{\mu}(p')$, donc $\tilde{\mu}$ est concentrée sur F et par suite $\tilde{\mu} < \mu^F$ puis $\tilde{\mu} = \mu^F$ et $p' = R_p^F$ pour tout $p \in C$. Enfin $\mu(R_q^F) = \mu^F(q) = \tilde{\mu}(q) = \mu(q)$, donc $q = R_q^F$. Si K est compact disjoint de F et $q_1 = S^q(K)$, on a $q_1 = R_{q_1}^K$ et $q_1 = R_{q_1}^F$, donc $\delta(q_1) \subset K \cap F = \emptyset$, puis $q_1 = 0$. Ainsi $S^q(X \setminus F) = 0$ et $q = S^q(F)$.

Si H est fermé fin p. b. et $q = S^q(H)$, alors d'abord $q = R_q^H$, puis $\mu^H < \mu$ modulo q pour toute μ intégrant q , donc $\mu^F = \tilde{\mu} < \mu^H$ et $F \subset H$.

Si $q \in C$, alors $R_p^F = \sup_t S_t^q p$ est excessive, et F est régulier.

COROLLAIRE. — Si $q \in C_\delta$ et si H est fermé fin, alors $S^q(H) = q \wedge R_q^H$.

Posons en effet $u = S^q(H)$ et $v = q \wedge R_q^H$: u et v sont dans C_δ , $\delta(u) \subset H$ implique $u = R_u^H < R_q^H$ donc $u < q \wedge R_q^H = v$, et $\delta(v) \subset H$ implique $v = S^v(H) < S^q(H) = u$, car S^q est additif en q .

DÉFINITION. — Nous appellerons potentiel diffus tout potentiel $p \in C$ ne chargeant aucun point, i. e. $S^p(\{a\}) \equiv 0$ pour tout $a \in X$.

PROPOSITION. — Si p est un potentiel diffus, son support $\delta(p)$ est finement parfait.

En effet, si a est isolé dans $\delta(p)$, $\delta(p) \setminus \{a\}$ est un fermé fin F tel que $S^p(F) = p$, donc $F \supset \delta(p)$, ce qui est absurde.

VI. Points réguliers, ensembles dérivés, et ensembles presque-semi-polaires

Un point $a \in X$ est dit régulier si $R_1^a \in C$, et irrégulier ou semi-polaire dans le cas contraire $\widehat{R}_1^a(a) < 1$.

PROPOSITION. — L'ensemble Y des points irréguliers est un $G_{\delta\sigma}$ (ordinaire), son complémentaire Z est donc un $F_{\sigma\delta}$.

Démonstration. — On considère sur $X \times X$ le noyau de Hunt :

$$Wf(x, y) = \int f(z, y) V^x(dz).$$

Soit Δ la diagonale. Si p est un potentiel > 0 appartenant à $\mathcal{C}_0(X)$ et si :

$$\alpha(y) > 0, \quad \alpha \in \mathcal{C}_0(X),$$

alors :

$$q(x, y) = p(x) \alpha(y)$$

est un potentiel sur $X \times X$, et :

$$Y = \{x \in X / \widehat{R}_q^\Delta(x, x) < 1\}.$$

R_q^Δ est s. c. s. et tend vers zéro à l'infini, donc $\widehat{R}_q^\Delta = \sup_n W_n R_q^\Delta$ est enveloppe supérieure d'une suite de fonctions ψ_n s. c. s. sur $X \times X$.

Par suite, $Y = \bigcup_\varepsilon \bigcap_n \{\psi_n(x) + \varepsilon < 1\}$ est un $G_{\delta\sigma}$ et Z un $F_{\sigma\delta}$.

L'ensemble dérivé d'un ensemble E est défini par :

$$E' = \{x \in E / p(x) > R_p^{E \setminus x}(x)\},$$

où p est un potentiel strict $\in \mathcal{C}_0(X)$.

PROPOSITION. — Si E est analytique (resp. p. a.), E' l'est aussi.

Démonstration. — $x \in E'$ si et seulement si (x, x) appartient à $E \times X$ et vérifie $R_q^{(E \times X) \setminus \Delta}(x, x) = q(x, x)$ où q est le potentiel sur $X \times X$ de la démonstration précédente. La fonction $R_q^{(E \times X) \setminus \Delta}$ est analytique sur $X \times X$, donc E' est analytique par projection. Si E est seulement p. a., on fixe $\theta \in \mathcal{H}^+$, et on écrit $A \subset E \subset A \cup P$ où A est analytique et P un borélien θ -polaire. On a $A' \subset E' \subset A' \cup \overline{P}$, mais \overline{P} est lui aussi θ -polaire. Donc E' est p. a. Si E est de plus fermé fin, E' l'est aussi, alors $E \setminus E'$ est p. b. ouvert fin relatif. Si E est

seulement p. a., on a $E' = E \cap (\bar{E})'$ donc est bien p. a., mais aussi $E \setminus E' = E \setminus (\bar{E} \setminus \bar{E}')$ puisque $\bar{E} \setminus \bar{E}'$ est p. b.

DÉFINITION. — *Un ensemble E est semi-polaire s'il s'écrit $(f \neq \hat{f})$ où $f \in S$, il est presque semi-polaire si pour toute $\theta \in \mathcal{M}^+$, il est égal θ -quasi-partout à un ensemble semi-polaire.*

Il est clair que les points irréguliers sont les points semi-polaires, et que tout ensemble presque semi-polaire est inclus dans Y .

VII. Noyaux parfaits et noyaux réguliers

Si $p \in C$, on notera $c_\theta^p(E) = \theta(R_p^E)$ pour toute $\theta \in \mathcal{M}^+$, $c_x^p(E) = R_p^E(x)$ pour $x \in X$. Le théorème 9° qui suit identifie le dérivé fin E' d'un ensemble p. a. E avec tous ses dérivés fins dans les différentes θ -quasi-topologies.

9° THÉORÈME. — *Si E est presque analytique, on a pour toute mesure $\theta \in \mathcal{M}^+$ et pour tout $p \in C$:*

$$c_\theta^p(E') = \text{Sup} \{ c_\theta^p(K) / K \text{ compact } \subset E, K \text{ finement rare sur } E \}.$$

Remarquons que l'on a $K \subset E'$ dès que K est finement rare sur E , et qu'il suffit de montrer que l'ensemble des R_p^K qui est croissant est adjacent à la fonction R_p^E . Commençons par un lemme dont je reproduis une démonstration de Mokobodzki (comparer aussi avec [F 4])

LEMME. — *On suppose que dans E tout compact finement rare est θ -polaire (θ fixée). Alors E' est θ -polaire.*

D'abord, si des K_i sont compacts disjoints dans E , ils sont égaux θ -q. p. à leurs intérieurs fins relatifs. On en déduit (propriété de Lindelöf, [F 1]) qu'ils sont θ -polaires sauf au plus une infinité dénombrable d'entre eux. Cela signifie que E est un ensemble θ -mince au sens de (D). Il existe alors une mesure $\mu \in B_\theta$, concentrée sur E et n'y négligeant que les θ -polaires. Raisonnons alors comme dans (DFM) : soit k un entier ≥ 1 , et soit A un ouvert (ordinaire) relatif dans E et maximal sous la condition $c_\mu^p(A) \geq k\mu(A)$. On a $c_\mu^p(A \cup B) \leq k\mu(A \cup B)$ pour B p. a. $\subset E \setminus A$ et $B \neq \emptyset$, et par suite $c_\mu^p(A \cup B) - c_\mu^p(A) \leq k\mu(B)$: cela vaut aussi pour $B = \emptyset$. Comme les c_μ^p sont fortement sous-additives, la capacité $B \rightsquigarrow \gamma_\mu(B) = c_\mu^p(A \cup B) - c_\mu^p(A)$ est sous-additive, à variation bornée, et $\gamma_\mu(B) = \int \gamma_x(B) d\mu(x)$. On en déduit

comme dans (DFM) que μ -presque toute capacité γ_x est à variation bornée. Soit $x \in E \setminus \bar{A}$ un point où cette propriété a lieu. On a :

$$R_p^{A \cup B}(x) = c_x^p(A \cup B) = c_x^p(A) + \gamma_x(B) = R_p^A(x) + \gamma_x(B) < p(x),$$

pour $x \notin A$ et $\gamma_x(B)$ assez petit. En prenant pour B la trace sur $E \setminus \{x\}$ d'un voisinage de x , on voit que x est finement isolé dans E . On a donc $E' \subset \bar{A} \theta - q. p.$ Mais $E \cap \bar{A} \setminus A$ est finement rare sur E donc θ -polaire et par suite $\mu(E') = \mu(A) \leq c_\mu^p(E)/k$. En faisant varier k , on trouve $\mu(E') = 0$, donc E' est θ -polaire.

Terminons la démonstration du théorème : fixons $\theta \in \mathcal{M}^+$, par la deuxième propriété de Lindelöf [F 2], p. 195), il existe une suite de compacts $K_n \subset E$, finement rares sur E , et telle qu'en posant $A = \bigcup_n K_n$ on ait $K \subset \bar{A} \theta - q. p.$ pour tout compact $K \subset E$ et finement rare sur E . On a bien sûr $A \subset E'$, donc $E \cap \bar{A} \subset E'$. Posons $B = E \setminus \bar{A}$: c'est un p. a., et tout compact $K \subset B$ et finement rare sur B l'est *a fortiori* sur E , donc est inclus dans $\bar{A} \theta - q. p.$ et est par suite θ -polaire. D'après le lemme, B' est θ -polaire. Or, la relation $E \subset \bar{A} \cup B$ implique $E' \subset \bar{A} \cup B'$, puis $E' = E \cap \bar{A} \theta - q. p.$ Alors $R_p^A = R_p^{E'}$ $\theta - q. p.$

C.Q.F.D.

La proposition suivante introduit les propriétés de dichotomie :

PROPOSITION. — Si E est presque G_δ fin, et si $E = E' \theta - q. p.$ (θ fixée), alors E contient une famille indénombrable d'ensembles disjoints ayant tous même c_θ^p -capacité que E (cf. aussi [F 4]).

D'après la démonstration du théorème 9°, il existe un ensemble $A \subset E$, de type F_σ , finement maigre sur E et tel que $c_\theta(E \setminus \bar{A}) = 0$. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille maximale de tels ensembles, disjoints. Il suffit de montrer que I est indénombrable : au cas contraire, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ serait un F_σ finement maigre sur E tel que $c_\theta(E \setminus \bar{A}) = 0$. Alors $B = E \setminus \bar{A}$ serait presque G_σ fin, \bar{B} contiendrait $E \theta - q. p.$ grâce au théorème de Baire (pour la θ -quasi-topologie fine), donc $c_\theta^p(B) = c_\theta^p(E)$ et $B = B' \theta - q. p.$, mais alors B contiendrait un F_σ finement maigre et de même capacité, ce qui contredirait le caractère maximal de la famille $(A_i)_{i \in I}$.

Rappelons que l'épaisseur $e_\theta^p(E)$ d'un ensemble E par rapport à la capacité c_θ^p est la borne supérieure des $t \geq 0$ pour lesquels il existe une famille indénombrable de compacts disjoints inclus dans E tous de c_θ^p -capacité $> t$: donc E est θ -mince lorsque $e_\theta^p(E) = 0$ (p est supposé > 0). Pour l'énoncé suivant, on suppose que $p \in C$ est un potentiel strict.

10° THÉORÈME. — Soit E un ensemble presque analytique. L'ensemble croissant :

$$\mathcal{A} = \{q \in C, q \text{ diffus}/q \leq p, \delta(q) \subset E\}$$

est adjacent à une fonction excessive u . L'ensemble \tilde{E} défini par :

$$\tilde{E} = \{x \in E / u(x) = p(x)\}.$$

est indépendant de p (strict), c'est le « noyau de condensation fine » de E . On a :

$$u(x) = R_p^E(x) = c_x^p(\tilde{E}) = e_x^p(E) = e_x^p(\tilde{E})$$

et plus généralement $c_\theta^p(\tilde{E}) = e_\theta^p(E)$ pour toute $\theta \in m^+$, donc $\tilde{\tilde{E}} = \tilde{E}$.

L'ensemble $E \setminus \tilde{E}$ est θ -mince pour toute mesure $\theta \in m^+$.

De plus, si E est presque G_δ fin, \mathcal{A} est aussi adjacent à l'ensemble décroissant $\mathcal{B} = \{R_p^{E^\xi} / \xi < \aleph_1\}$ où les E^ξ sont les dérivés fins successifs de E , et alors \tilde{E} vaut $\bigcap_{\xi < \aleph_1} E^\xi$ et est aussi le noyau finement parfait de E .

Démonstration. — Si $q \in \mathcal{A}$, on a $q \leq R_p^{E^\xi}$ pour tout $\xi < \aleph_1$, car le support fin de q est finement parfait. Donc toujours $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.

Supposons d'abord que E soit presque G_δ fin, et montrons qu'alors \mathcal{A} et \mathcal{B} sont adjacents. Fixons $\theta \in m^+$: on doit chercher $\xi < \aleph_1$ et $q \in \mathcal{A}$ tels que $\theta(R_p^{E^\xi} - q) < \varepsilon$, ε fixé. Il existe $\xi < \aleph_1$ tel que $R_p^{E^\xi} = R_p^{E^\eta} \theta$ -q. p. pour tout ordinal $\eta > \xi$ d'après ([F 2], p. 191). On a donc $E^\xi = E^{\xi+1}$ θ -q. p., donc $c_\theta^p(E^\xi) = e_\theta^p(E^\xi)$ par la proposition précédente. Soit $a < c_\theta^p(E^\xi)$. Rappelons que l'épaisseur e_θ^p se calcule aussi à l'aide des schémas de Cantor (DFM). Un tel schéma est une famille de compacts disjoints $(K_t)_{t \in T}$ où T est l'ensemble de Cantor, et où le graphe $\{(x, t) / x \in K_t\}$ est compact dans $X \times T$. Le noyau $K = \bigcup_{t \in T} K_t$ est alors compact. Il existe selon (DFM) un schéma de noyau

$K \subset E^\xi$ et tel que $a < \int c_\theta^p(K_t) dt$ où dt est la mesure de Cantor. Si l'on pose

$q_K(x) = \int R_p^{K_t}(x) dt$, on aura $\theta(q_K) > a$ par le théorème de Fubini. Il suffit

donc de prouver que q_K appartient à \mathcal{A} . D'abord, si p est continu (ce que l'on suppose) q_K est s. c. s. et minore p , donc appartient à C_δ . On a aussi

$\delta(q_k) \subset K \subset E$ de manière évidente. Calculons q_k : par le théorème de Fubini, on a :

$$q_k(x) = \sup_n n V_n q_k(x) = \int \widehat{R_p^{K_t}}(x) dt.$$

On a $\widehat{R_p^{K_t}}(x) = R_p^{K_t}(x)$ sauf peut-être pour une valeur de t au plus ([F 2], p. 187) car les K_t sont disjoints. Mais dt est diffuse, donc $\hat{q}_k = q_k$ et q_k est un potentiel régulier. Montrons qu'il est diffus : fixons $b \in X$, on a :

$$S^q(b) \quad q_k = \sum_{k=1}^n q_k \quad \text{avec} \quad q_k = \int_{T_k} R_p^{K_t} dt$$

où les T_k sont les portions fondamentales de T , de dt -mesure 2^{-n} . Or, $S^q(b)$ est à support ponctuel, donc étranger à tous les q_k sauf peut-être un au plus, d'où $S^q(b) \leq q_k \leq 2^{-n} p$. Comme cela vaut pour tout n , on a $S^q(b) \equiv 0$. Ainsi \mathcal{A} et \mathcal{B} sont adjacents et la fonction limite u est p. b. et dans S (th. 4°).

On a bien sûr $u(x) = \sup_K q_k(x) = e_x^p(E)$, mais aussi $u(x) = \inf_{\xi} R_p^{E^{\xi}} \geq R_p^{\tilde{E}}$. Pour θ fixée, on a $u = R_p^{E^{\xi}} \theta$ -q. p. pour un certain $\xi < \aleph_1$ dépendant de θ , donc $\tilde{E} = E^{\xi} \theta$ -q. p. En faisant varier θ on trouve alors $u = R_p^{\tilde{E}}$. On a aussi $(\tilde{E})' = E^{\xi+1} = \tilde{E} \theta$ -q. p., pour θ arbitraire, donc E est finement parfait. Si A est finement parfait inclus dans E , on a par récurrence $A \subset E^{\xi}$ pour $\xi < \aleph_1$ et $A \subset \tilde{E}$, ce qui prouve que \tilde{E} est le noyau finement parfait de E et est par suite indépendant du potentiel p choisi.

Passons au cas où E est seulement presque analytique. L'ensemble \mathcal{A} relatif à E est visiblement la réunion des ensembles \mathcal{A}_F relatifs aux fermés fins p. b. F inclus dans E , donc son enveloppe $u(x)$ vaut $\sup \{ e_x^p(F)/F \text{ fermé fin p. b.} \subset E \}$ soit encore $\sup \{ e_x^p(K)/K \text{ compact} \subset E \}$, et cette dernière expression vaut $e_x^p(E)$ d'après un résultat général de (D) sur les épaisseurs.

Si E est analytique, $u(x) = e_x^p(E)$ l'est aussi d'après (DFM) et :

$$\theta(u) = \int e_x^p(E) d\theta(x) = e_{\theta}^p(E)$$

(intégration des épaisseurs), donc :

$$\theta(u) = e_{\theta}^p(E) = \text{Sup} \{ e_{\theta}^p(K)/K \text{ compact} \subset E \} = \text{Sup} \{ \theta(q)/q \in \mathcal{A} \},$$

cela prouve que \mathcal{A} est adjacent à la fonction u , qui se trouve ainsi fortement surmédiane p. b. d'après le théorème 4°, et même excessive car :

$$\hat{u}(x) \geq \text{Sup} \{ q(x)/q \in \mathcal{A} \} = u(x).$$

Si E est seulement p. a., on écrit pour chaque mesure $A \subset E \subset A \cup P$ où A est analytique et P θ -polaire, donc :

$$e_x^p(A) \leq e_x^p(E) \leq e_x^p(A) + c_x^p(P),$$

d'après l'additivité des épaisseurs (DFM), mais comme $c_x^p(P)$ vaut 0 θ -q. p., on est ramené au cas d'un ensemble analytique.

On a bien sûr $u \geq R_p^E$, mais $e^p(F) = R_p^F \leq R_p^E$ pour tout fermé fin p. b. E , donc $u \leq R_p^E$.

Si K est un compact inclus dans $E \setminus \tilde{E}$, on a $\tilde{K} \subset K \cap \tilde{E} = \emptyset$, et K est θ -mince pour toute mesure θ .

Ainsi $E \setminus \tilde{E}$ est lui-même mince. Comme $E \setminus \tilde{E}$ est aussi p. a. (p. b. relatif dans E) on en tire $e_x^p(\tilde{E}) = e_x^p(E)$ (sous-additivité des épaisseurs), et le théorème est entièrement démontré.

Remarque. — On vérifie facilement que pour chaque $\theta \in \mathcal{M}^+$, $E \setminus \tilde{E}$ est à un polaire près le plus grand ouvert fin relatif dans E qui soit θ -mince.

Définissons maintenant par récurrence transfinie :

$$E_1 = \{x \in E / p(x) = \widehat{R_p^E}(x)\}, \quad E_{\xi+1} = (E_\xi)_1,$$

et si η est un ordinal limite $< \aleph_1$: $E_\eta = \bigcap_{\xi < \eta} E_\xi$.

LEMME. — $E = E' \cup (E \cap Z)$ et pour $\xi < \aleph_1$: $E_\xi = E^\xi \cup \overline{(E \cap Z)^E}$ (3) où E^ξ désigne la suite des dérivées fins pour $\xi < \aleph_1$.

Démonstration du lemme. — Pour $a \in X$, on a toujours :

$$R_p^{E \setminus a}(a) = \widehat{R_p^{E \setminus a}}(a) \leq \widehat{R_p^E}(a),$$

à cause de la relation de Mertens $R\varphi = \text{Max}(\varphi, \widehat{R\varphi})$.

Si $a \in E'$, on a $p(a) = R_p^{E \setminus a}(a) \leq \widehat{R_p^E}(a)$, donc $a \in E_1$, et $E' \subset E_1$. Il est clair que $E \cap Z \subset E_1$ puisque $f = \hat{f}$ sur Z pour toute $f \in S$. Si l'on a (3) pour tout $\xi < \eta$: on l'a aussi pour η si η est limite.

Si η est de la forme $\xi + 1$, on a $\overline{E \cap Z}^E \subset E_{\xi+1}$ car $E_{\xi+1}$ est relativement fermé, et évidemment $E^{\xi+1} \subset E_{\xi+1}$ donc (3) dans un sens. On a :

$$E_{\xi+1} = (E_\xi)' \cup (E \cap Z) \quad \text{et} \quad (E_\xi)' \subset E^{\xi+1} \cup \overline{(E \cap Z)^E},$$

et la formule (3) pour $\eta = \xi + 1$.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant qui est la réplique du théorème 10° :

11° THÉORÈME. — Soit E un ensemble presque analytique. L'ensemble croissant :

$$\mathcal{A}_1 = \{ q \in C / q \leq p, \delta(q) \subset E \}$$

est adjacent à une fonction excessive v . L'ensemble \hat{E} défini par :

$$\hat{E} = \{ x \in E / v(x) = p(x) \},$$

vaut exactement $\hat{E} = \tilde{E} \cup \{ \overline{E \cap Z}^E \}$, et l'on a $\hat{E} = \tilde{E}$.

E est presque semi-polaire si et seulement si $\hat{E} = \emptyset$.

L'ensemble $E \setminus \hat{E}$ est presque semi-polaire.

De plus, si E est presque G_δ fin, \mathcal{A}_1 est aussi adjacent à l'ensemble décroissant $\mathcal{B}_1 = \{ R_p^{E_\xi} / \xi < \aleph_1 \}$.

Démonstration. — Là aussi, supposons d'abord que E soit presque G_δ fin, et posons *a priori* :

$$\hat{E} = \bigcap_\xi E_\xi = \tilde{E} \cup \overline{(E \cap Z)}^E.$$

Pour θ fixée, $E_\xi \setminus \hat{E} \subset E_\xi \setminus \tilde{E}$ est θ -polaire pour un certain $\xi < \aleph_1$. On en déduit :

$$\widehat{R_p^E} = \widehat{R_p^{E_\xi}} \geq R_p^{E_{\xi+1}} \geq R_p^E, \quad \theta\text{-q. p.}$$

Ainsi $v = R_p^E = \widehat{R_p^E}$ est excessive, vaut $\inf_\xi R_p^{E_\xi}$ et est adjacente à \mathcal{B}_1 . E est régulier, et si A est régulier $\subset E$, on a par récurrence $A \subset E_\xi$, donc $A \subset \hat{E}$: \hat{E} est le noyau régulier de E . En particulier, si $q \in \mathcal{A}_1$, $\delta(q)$ est régulier, donc $\subset \hat{E}$, et par suite $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{B}_1$. Fixons de nouveau θ , et soit q'_n une suite croissante de potentiels réguliers convergeant vers R_p^E et à supports $\delta(q'_n)$ inclus dans \tilde{E} (théorème précédent). Il existe aussi une suite croissante q''_n de la forme $R_p^{K_n}$ avec $K_n \subset E \cap Z$ convergeant vers $R_p^{E \cap Z}$ θ -q. p. ([F 2], p. 191). On a $q''_n = \widehat{q''_n}$ sur $K_n \subset Z$ donc sur X ([F 2], p. 187). Alors la suite $q_n = R(q'_n \vee q''_n)$ converge en croissant vers R_p^E θ -q. p. et appartient à \mathcal{A}_1 . Ainsi \mathcal{A}_1 et \mathcal{B}_1 sont adjacents. Si $\hat{E} = \emptyset$, E est presque semi-polaire comme chaque $E_\xi \setminus E_{\xi+1}$.

Si E est seulement p. a., on raisonne comme au théorème 10° : \mathcal{A}_1 est la réunion des ensembles $\mathcal{A}_{1,F}$ relatifs aux fermés fins p. b. inclus dans E , donc son enveloppe v vaut $\sup \{ R_p^E / F \text{ fermé fin p. b. } \subset E \} \leq R_p^E$ avec $\hat{E} = \tilde{E} \cup \overline{E \cap Z}^E$. Mais alors on voit comme ci-dessus que \mathcal{A}_1 est adjacent à

R_p^E , donc $v = R_p^E$, et E est régulier. Pour $q \in \mathcal{A}_1$, on a en fait $\delta(q) = \widehat{\delta(q)}$ d'après le début de la démonstration puisque $\delta(q)$ est fermé fin, donc $\delta(q) \subset \hat{E}$, ce qui entraîne $\hat{E} = \hat{E}$. Si $\hat{E} = \emptyset$, on a d'abord $\tilde{E} = \emptyset$, donc E est θ -mince pour toute mesure θ , puis c'est alors un ensemble presque F_σ ([F1], p. 214), donc $E = (\bigcup_n K_n) \cup P$ où P est θ -polaire et où les K_n sont compacts. Mais chaque K_n est presque semi-polaire puisque $\widehat{K_n} = \emptyset$, donc E l'est aussi.

Enfin, en général $E \setminus \hat{E}$ est p. a. car p. b. relatif dans E . On a $\widehat{E \setminus \hat{E}} \subset \hat{E} \cap (E \setminus \hat{E}) = \emptyset$, donc $E \setminus \hat{E}$ est presque semi-polaire.

Remarques. — Pour chaque θ , $E \setminus \hat{E}$ est à un θ -polaire près le plus grand ouvert fin relatif dans E qui soit θ -semi-polaire.

Si E n'est pas presque G_δ fin on peut avoir $\hat{E} = \emptyset$, alors que E est régulier, de même que l'on peut avoir $\tilde{E} = \emptyset$ alors que E est finement dense en soi.

VIII. Remarques diverses

On a toujours obtenu la convergence de nos suites transfinies E^ξ et E_ξ par la technique des ensembles adjacents. Il est intéressant de remarquer qu'à l'aide d'un théorème de Dellacherie sur les dérivations analytiques (D 2), on peut conclure quand E est analytique à l'analyticité des ensembles $\bigcap_{\xi < \aleph_1} E^\xi$ et $\bigcap_{\xi < \aleph_1} E_\xi$, et passer de là au cas de E p. a. Cela fournit le noyau finement dense en soi de E et son noyau régulier, et les deux suites transfinies $R_p^{E^\xi}$ et $R_p^{E_\xi}$ sont là aussi adjacentes à leur borne inférieure qui est excessive.

D'autre part, si E est analytique, Mokobodzki sait démontrer directement que E est analytique, mais cela résulte aussi de la formule $\hat{E} = \tilde{E} \cup \overline{(E \cap Z^E)}$.

Si l'on s'intéresse aux ensembles de la tribu engendrée par les excessives, on voit que toutes nos constructions peuvent se faire en restant dans cette tribu, puisque \tilde{E} et \hat{E} sont définis comme des ensembles où coïncident deux excessives.

On peut définir une épaisseur $e_x^f(E)$ en remplaçant p par $f \in S$, f bornée dans les définitions. On constate à l'aide de la propriété de dichotomie de \tilde{E} que $e_x^f(E)$ est toujours égal à $R_\gamma^{\tilde{E}}(x)$.

Signalons qu'à l'aide de l'axiome de Martin $MA(\aleph_1)$ (cf. (L)) on peut montrer que toute suite transfinie décroissante de type \aleph_1 formée de fonctions de S est adjacente à son enveloppe inférieure f et que f est dans S .

Citons enfin le travail (HA) de Hansen qui repose sur des idées essentiellement différentes.

BIBLIOGRAPHIE

- (A) ANCONA (A.). — *Contenance et dichotomie* (à paraître in *Sém. th. potentiel*, Paris, n° 7), Lecture Notes, Springer.
- (B1) BRELOT (M.). — La topologie fine en théorie du potentiel (*Lecture Notes in Math.*, vol. 31, 1967).
- (B2) BRELOT (M.). — Sur le théorème de partition de M^{me} R. M. Hervé, Rocky Mountain, *J. of Math.*, vol. 10, n° 1, 1980, p. 293.
- (C) CHOQUET (G.). — Forme abstraite du théorème de capacabilité. *Ann. Inst. Fourier*, t. IX, vol. 83, 1959.
- (D) DELLACHERIE (C.). — Capacités et processus stochastiques, *Ergebnisse der Mathematik*, n° 67, Springer, 1972.
- (D1) DELLACHERIE (C.). — *La structure des ensembles semi-polaires*, Preprint.
- (D2) DELLACHERIE (C.). — *Théorèmes de capacabilité, de séparation et d'itération transfinie*, Preprint.
- (DFM) DELLACHERIE (C.), FEYEL (D.) et MOKOBODZKI (G.). — *Intégrales de capacités fortement sous-additives* [*Sém. probabilités*, XVI, 1980/81 (*Lecture Notes*, n° 920, Springer)].
- (FI) FEYEL (D.). — Ensembles singuliers associés aux espaces de Banach réticulés, *Ann. Inst. Fourier*, t. XXXI, vol. 195, 1981.
- (F2) FEYEL (D.). — Représentation des fonctionnelles surmédianes, *Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie*, vol. 58, 1981, p. 183, Springer.
- (F3) FEYEL (D.). — Une mesure de l'épaisseur d'un ensemble presque borélien, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 292, série I, 1981, p. 957.
- (F4) FEYEL (D.). — Remarque sur un résultat de Choquet [*Sém. th. potentiel*, Paris, n° 6 (*Lecture Notes*, n° 906, Springer)].
- (F5) FEYEL (D.). — Sur le théorème de partition de Brelot, *C.R. Acad. Royale de Belgique*, 1982, p. 424.
- [F6] FEYEL (D.). — Remarques sur les cônes de potentiels [*Sém. th. potentiel*, Paris, n° 7, (*Lecture Notes*, Springer)].
- (FUG) FUGLEDE (B.). — Finely harmonic functions (*Lecture Notes in Math.*, n° 289, Springer, 1972).
- (HA) HANSEN (W.). — Semi-polar sets and quasi-balayage. *Math. Annalen*, vol. 257, 1981, p. 495.
- (HE) HERVE (R. M.). — Recherches axiomatiques en théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, XII, vol. 415, 1962.
- (L) LOUVEAU (A.). — Outils de logique pour l'analyste, *Cours de 3^e cycle*, Paris, 1976/1977.
- (M1) MERTENS (J. F.). — Théorie des processus stochastiques généraux, application aux surmartingales, *Z.f. Wahrscheinlichkeitstheorie*, vol. 22, 1972.
- (M2) MERTENS (J. F.). — Strongly supermedian functions and optimal stopping, *Z.f. Wahrscheinlichkeitstheorie*, vol. 26, 1973.
- (ME) MEYER (P. A.). — Probabilités et potentiel, A.s.i., 1318, Paris, Hermann, 1966.
- (MO1) MOKOBODZKI (G.). — Structure des cônes de potentiels, *Sém. Bourbaki*, n° 377, 1969/1970.
- (MO2) MOKOBODZKI (G.). — Ensembles compacts de fonctions fortement surmédianes (*Lect. Notes in Math.*, n° 713, Springer, 1979).
- (T) TAYLOR (J. C.). — On the existence of submarkovian resolvents (*Inventiones. Math.*, 17, 1972).