

BULLETIN DE LA S. M. F.

DE POLIGNAC

Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 120-124

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880_8_120_1

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/*

*Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie
des ramifications; par M. DE POLIGNAC.*

(Séance du 5 mars 1880.)

I.

J'appellerai indistinctement *arbre*, *ramification*, *arborescence* une figure tracée sur un plan composé de *branches* et de *nœuds* satisfaisant à la loi suivante :

De chaque nœud on peut, en suivant ces branches, parvenir à un nœud quelconque, mais par un seul chemin.

Les nœuds sont les points d'intersection des branches, celles-ci des lignes droites ou courbes, mais sans points doubles, la loi qui vient d'être énoncée excluant les contours fermés.

De pareilles configurations ont été d'abord étudiées par M. C. Jordan (*Journal de Crelle*), puis indépendamment par M. Sylvester (*Educational Times*), par M. Cayley (*British Association Report*, 1875), M. Septimus Tebay, etc.

Les recherches suivantes ont pour base le mode d'existence *graphique* d'une arborescence, et, à ce propos, je ferai une re-

marque fondamentale qui, à ma connaissance, n'a pas encore été publiée.

Toute ramification peut être tracée au moyen d'un certain nombre de traits continus sans répétition ni arrêt, c'est-à-dire en partant de l'extrémité d'une branche et continuant jusqu'à ce qu'on arrive à l'extrémité d'une autre branche ou à une branche déjà parcourue. Observons que le trait doit *traverser* une ligne, quoique déjà tracée, s'il peut continuer au delà, sans cheminer le long de cette ligne. Cela posé :

REMARQUE FONDAMENTALE. — *De quelque manière que l'on trace une ramification sans répétition ni arrêt, le nombre des parcours sera toujours le même.*

Voici, je crois, le moyen le plus simple de se rendre compte de cette propriété.

En faisant une coupure à chaque branche joignant deux nœuds, on décomposera une ramification en une série d'étoiles, ou, si l'on veut, de *carrefours*; on la recomposera en rendant aux carrefours leurs routes communes. Pour chaque étoile, la propriété fondamentale sera évidente. On remarquera ensuite que, en réunissant deux étoiles, on perd *un trait* sur la somme des parcours relatifs à chaque étoile, et l'on en conclura

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_v - (v - 1),$$

équation dans laquelle N est le nombre des traits qui ont servi à tracer l'arborescence, N_1, N_2, \dots les nombres de traits relatifs à chaque nœud (ou étoile), et v le nombre des nœuds. Le second membre de l'équation étant constant, le premier le sera aussi.

Quant à N_1, N_2, \dots , on peut en donner l'expression en fonction des quantités qui caractérisent la ramification.

Appelons *ordre* d'un nœud le *nombre de ses branches*, autrement dit le *nombre des rayons de l'étoile* dans la décomposition de l'arborescence. Soient m_1, m_2, \dots les ordres des nœuds. On vérifiera immédiatement que l'on a, en se servant de la notation de Lejeune-Dirichlet pour désigner le plus grand nombre entier contenu dans une expression fractionnaire,

$$N_1 = \left(\frac{m_1 + 1}{2} \right), \quad N_2 = \left(\frac{m_2 + 2}{2} \right), \quad \dots$$

L'équation précédente s'écrit alors

$$(1) \quad N = \sum \left(\frac{m+1}{2} \right) - (v - 1).$$

J'appellerai **N** le nombre fondamental de la ramification.

II.

DIVERSES AUTRES EXPRESSIONS DU NOMBRE N.

1. Soit **e** le nombre des extrémités libres d'une ramification. Soit, en général, v_k le nombre des nœuds d'ordre k ; remarquons que le minimum de k est 3; on aura

$$N = e - 1 - (v_4 + v_5) - 2(v_6 + v_7) - 3(v_8 + v_9) - 4(v_{10} + v_{11}) - \dots$$

Cette formule s'établira de proche en proche en partant d'une ramification qui n'a que des nœuds d'ordre 3 et s'élevant graduellement à la considération des ordres supérieurs. La démonstration, sans être difficile, serait un peu longue, et j'ai cru devoir me borner à en donner le résultat.

La formule peut s'écrire

$$(2) \quad N = e - 1 - \sum_2^{\mu} (\mu - 1)(v_{2\mu} + v_{2\mu+1}).$$

Observons qu'elle est indépendante du *nombre* des nœuds d'ordre ternaire et que, pour une ramification qui n'en a pas d'autres, on a simplement

$$(3) \quad N = e - 1.$$

La comparaison des équations (1) et (2) donne

$$e = \sum_2^{\mu} (\mu - 1)(v_{2\mu} + v_{2\mu+1}) + \sum \left(\frac{m+1}{2} \right) - v + 2.$$

On peut transformer cette équation en remarquant que

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{2\mu} + v_{2\mu+1};$$

et, après quelques réductions faciles, on obtiendra

$$e = \sum_3^{\mu} (\mu - 2)(v_{2\mu} + v_{2\mu+1}) + \sum \left(\frac{m+1}{2} \right) - v_3 + 2.$$

Si la ramification est d'ordre ternaire, le premier Σ disparaît; de plus, m étant partout égal à 3, on a

$$\frac{m+1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad \sum \left(\frac{m+1}{2} \right) = 2v_3,$$

d'où

$$e = v_3 + 2,$$

résultat facile à vérifier directement. Aussi, par la formule (3),

$$(4) \quad N = e - 1 = v_3 + 1.$$

2. La formule (1), remise sous la forme

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_v - (v - 1),$$

est susceptible de la transformation suivante.

Soient

P_1, P_2, \dots, P_p les nœuds d'ordre pair;

$2\mu_1, 2\mu_2, \dots, 2\mu_p$ leurs ordres respectifs.

Soient, de même, les nœuds d'ordre impair

$$I_1, I_2, \dots, I_i$$

et leurs ordres

$$2\lambda_1 + 1, 2\lambda_2 + 1, \dots, 2\lambda_i + 1.$$

Alors

$$N = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p + \lambda_1 + 1 + \dots + \lambda_i + 1 - (v - 1).$$

Mais

$$v = p + i;$$

donc

$$N = \sum \mu + \sum \lambda + i - (p + i - 1)$$

ou

$$N = \sum \mu + \sum \lambda - p + 1.$$

i , nombre des nœuds d'ordre impair, a disparu de cette équation, résultat conforme au mode de description graphique donné au

début, d'après lequel il est évident que, chaque fois qu'un trait aboutit à un nœud, on peut le prolonger au delà en ajoutant une branche au nœud sans modifier le nombre des traits.

Si la ramification n'a pas de nœuds d'ordre pair, on a

$$(5) \quad N = \Sigma \lambda + 1,$$

relation dont la formule (4) est un cas particulier.

Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme; par M. HUMBERT.

(Séance du 19 mars 1880.)

I. M. Laguerre a montré, en développant $\log(x - z)$, la liaison étroite de cette question avec la théorie des fractions continues algébriques; il est facile de généraliser les résultats qu'il a obtenus; au lieu du logarithme, nous considérerons les fonctions ainsi définies.

Soient

$$\Delta(x) = Ax^2 + Bx + C = A(x - x_0)(x - x_1)$$

et une fonction $K(x)$ satisfaisant à la relation

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{Dx + E}{Ax^2 + Bx + C} = \frac{\mu_0}{x - x_0} + \frac{\mu_1}{x - x_1},$$
$$K = (x - x_0)^{\mu_0} (x - x_1)^{\mu_1}.$$

Proposons-nous de développer la fonction

$$\int \frac{\Delta(x) dx}{K(x)(x - z)}$$

suivant les puissances croissantes de $\Delta(z)$.

Cette intégrale indéfinie est une fonction de x et de z ; elle se développera de la manière suivante :

$$\int \frac{\Delta(x) dx}{K(x)(x - z)} = \Sigma (U_m + V_m z) \Delta^m(z).$$