BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHÈLE MASTRANGELO
DANIÈLE DEHEN

Différentiabilité fine et capacités

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 179-195
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__179_0>

Bull. Soc. math. France,
110, 1982, p. 179-195.

DIFFÉRENTIABILITÉ FINE ET CAPACITÉS

PAR

MICHÈLE MASTRANGELO et DANIÈLE DEHEN (*)

RÉSUMÉ. — Considérant le mouvement brownien standard $X_{\bullet}(t)$ dans $\mathbb{R}^d$, nous désignons par A un ouvert fin borné de $\mathbb{R}^d$ et par f une fonction définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous disons que f est finement différentiable en un point x appartenant à A, de différentielle $\nabla f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt T_ε, $\mathbb{P}^x$-presque sûrement strictement positif tel que, pour tout temps d'arrêt $S \leqslant T_\varepsilon$, nous ayons :

$$\mathbb{E}^x[|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]| . \|X(S) - x\|^{-1}] < \varepsilon.$$

Dans un article antérieur [10], M. MASTANGELO a montré que si f est finement différentiable sur un ouvert fin A, alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset A$, tel que la mesure de Lebesgue de $A \setminus K_\varepsilon$, soit majorée par ε et sur lequel f est différentiable (au sens de la norme), les deux différentielles ainsi obtenues étant égales.

Nous établissons que si f est finement continûment différentiable, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K(\varepsilon) \subset A$, tel que les capacités newtoniennes de A et $K(\varepsilon)$ vérifient : $\text{cap } A - \text{cap } K(\varepsilon) < \varepsilon$, et sur lequel f est différentiable.

ABSTRACT. — Considering the Brownian motion $X_{\bullet}(t)$ in ^{d}, we designate by A a bounded finely open set of $\mathbb{R}^d$ and by f a $\mathbb{R}$-valued function on A. We say that f is finely differentiable at a point x of A, with differential $\nabla f(x)$ belonging to $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ if, for any real number $\varepsilon > 0$, there exists a Markov time T_ε, $\mathbb{P}^x$-almost everywhere strictly positive such that, for any Markov time $S \leqslant T_\varepsilon$, one has:

$$\mathbb{E}^x[|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]| . \|X(S) - x\|^{-1}] < \varepsilon.$$

In a previous paper [10], we have proved that, if f is finely differentiable on a finely open set A, there exists, for any real number $\varepsilon > 0$, a compact set $K_\varepsilon \subset A$, such that the Lebesgue measure of $A \setminus K_\varepsilon$ is over-estimated by ε and on which f is differentiable (in the norm sense), the two differentials thus obtained being equal. We prove that, if f is finely continuously differentiable for any real number $\varepsilon > 0$, there exists a compact set $K(\varepsilon) \subset A$, such that the newtonian capacities of A and $K(\varepsilon)$ verify : $\text{cap } A - \text{cap } K(\varepsilon) < \varepsilon$, and on which f is differentiable.

(*) Texte reçu le 24 mars 1981.

Michèle MASTRANGELO et Danièle DEHEN, Université de Paris-VI, Mathématiques, Tour 45-46, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1982/179/$ 5.00

1. Définitions

(*a*) *Reprenant les notations et définitions exposées dans* [10], *nous disons qu'une fonction f, presque borélienne au sens de* [11], *définie sur un ouvert fin borné A de $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est finement différentiable en un point x de A, de différentielle $\nabla f(x)$, appartenant à $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt T_ε, $\mathbb{P}^x$-presque sûrement strictement positif tel que, pour tout temps d'arrêt $S \leqslant T_\varepsilon$, nous ayons :*

$$\mathbb{E}^x[|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]| \times \|X(S) - x\|^{-1}] < \varepsilon.$$

(*b*) *Sous les mêmes hypothèses qu'en* (*a*), *nous disons que f est finement continûment différentiable sur A si f est finement différentiable et si ∇f est finement continue sur A.*

Nous rappelons les principales propriétés suivantes (cf. [10]).

2. Propriétés de la différentiation fine

(*a*) Si f est différentiable en $x \in A$, elle y est finement différentiable et les deux différentielles sont égales.

(*b*) Si f est finement différentiable en $x \in A$, alors elle y est finement continue.

(*c*) La fonction f est finement différentiable en un point $x \in A$ si, et seulement si, pour tout réel $\alpha > 0$, il existe un voisinage fin de x, $V(x, \alpha)$, tel que, pour tout $y \in V(x, \alpha)$ nous ayons :

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]| < \alpha \|y - x\|.$$

(*d*) Lorsqu'elle existe, la différentielle fine est unique.

Dans toute la suite, nous supposons que f est finement différentiable sur l'ouvert fin A.

La démonstration classique permettant d'établir que les dérivées partielles d'une fonction différentiable sont de première classe de Baire utilise la métrisabilité de $\mathbb{R}^d$.

La topologie fine n'étant pas métrisable, la démonstration d'une propriété analogue pour les différentielles fines est beaucoup plus difficile.

Dans [10]. nous avons montré que, si f est une fonction définie et finement différentiable sur un ouvert fin A, alors son gradient fin, ∇f, est mesurable pour la mesure de Lebesgue sur A. Il n'apparait pas évident qu'il soit borélien, et encore moins de première classe de Baire.

Dans la suite, nous supposons que la fonction f est finement continûment différentiable, c'est-à-dire que ∇f existe et est finement continue sur A.

Utilisant un résultat démontré par B. FUGLEDE dans [6], nous pouvons en déduire que f et ∇f sont de première classe de Baire, donc boréliennes.

3. THÉORÈME (propriété de Lusin pour les capacités)

Soit f une fonction borélienne définie sur un borélien A, contenu dans $\mathbb{R}^d$, dont la capacité newtonienne cap A *soit finie. Pour tout réel ε strictement positif il existe un compact $L=L(\varepsilon)\subset A$, tel que* cap $A-$cap $L<\varepsilon$ *et tel que la restriction f/L soit continue pour la norme sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. — (*a*) Si f est borélienne sur A, f s'écrit comme limite uniforme de fonctions étagées sur A :

$$f=\lim_{n\to\infty} f_n$$

avec :

$$f_n=\sum_{p\in\mathbb{N}} \lambda_n^p \mathbf{1}_{B_n^p},$$

où les B_n^p sont des boréliens, contenus dans A, et vérifiant $B_n^p\cap B_n^q=\emptyset$ si $p\neq q$.

(*b*) Considérant f_1, pour tout borélien $B_1^p (p\in\mathbb{N})$, il existe, d'après les propriétés de capacitabilité, un compact $K_1^p\subset B_1^p$ tel que :

$$\text{cap } B_1^p-\text{cap } K_1^p<\varepsilon.2^{-2}.2^{-p}.$$

Alors :

$$\text{cap}\,(\textstyle\bigcup_{p\in\mathbb{N}} B_1^p)-\text{cap}\,(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} K_1^p)\leq\sum_{p\in\mathbb{N}}(\text{cap } B_1^p-\text{cap } K_1^p).$$

Par suite :

$$\text{cap}\,(\textstyle\bigcup_{p\in\mathbb{N}} K_1^p)>\text{cap } A-2^{-1}\,\varepsilon.$$

Or :

$$\text{cap}\,(\textstyle\bigcup_{p\in\mathbb{N}} K_1^p)=\lim_{N\to\infty,\, N\in\mathbb{N}}\quad \text{cap}\,(\bigcup_{p\leq N} K_1^p).$$

Par suite, il existe un entier $N_1\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\text{cap}\,(\textstyle\bigcup_{p\leq N_1} K_1^p)>\text{cap } A-\varepsilon.2^{-1}.$$

Nous notons K_1 le compact défini par :

$$K_1=\textstyle\bigcup_{p\leq N_1} K_1^p.$$

Nous voyons que :

$$\text{cap } A - \text{cap } K_1 < \varepsilon . 2^{-1}$$

et f_1/K_1 est continue pour la norme.

(c) Nous effectuons maintenant la récurrence à l'ordre n. Nous supposons construits des compacts $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ vérifiant :

$$\forall p \in \{1, 2, \ldots, n-2\} : \quad K_{p+1} \subset K_p \subset A,$$
$$\text{cap}(K_p) - \text{cap}(K_{p+1}) < \varepsilon . 2^{-p-1},$$

et tels que f_p/K_p soit continue au sens de la norme.

La fonction f_n est étagée sur le borélien K_{n-1}, par conséquent, raisonnant comme en (b), nous pouvons déterminer un compact $K_n \subset K_{n-1}$ tel que cap $(K_{n-1}) - \text{cap}(K_n) < \varepsilon . 2^{-n}$ et tel que la restriction f_n/K_n soit continue au sens de la norme.

(d) Nous notons $L = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Par limite décroissante, le compact L vérifie alors cap $L = \lim_{n \to \infty} \searrow \text{cap}(K_n)$, par suite :

$$\text{cap } A - \text{cap } L = (\text{cap } A - \text{cap } K_1) + \textstyle\sum_{n \geq 1,\, n \in \mathbb{N}} (\text{cap}(K_n) - \text{cap}(K_{n+1})) < \varepsilon \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \leq \varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n/K_n est continue, donc aussi f_n/L. Par limite uniforme, nous pouvons déduire que f/L est continue.

4. Notations

Soit f une fonction finement différentiable en $x \in A$.

A tout point $x \in A$ et tout entier n, nous associons :

$$A_n(x) = A_n = \{ y \in A : \| y - x \|^{-1} | f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x] | > n^{-1} \}$$

et :

$$D_n(x) = D_n = \{ y \in A : \| y - x \|^{-1} | f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x] | \geq (n-1)^{-1} \}.$$

Pour tout ensemble presque borélien C, nous notons e_c le 1-potentiel d'équilibre de C, enveloppe inférieure régularisée de l'ensemble des fonctions 1-excessives qui majorent 1 sur C.

L'ensemble A_n est effilé en x, par suite, d'après le lemme XV, t. 69, de [11] :

$$\lim_{r \to 0} e_{A_n(x) \cap B(x, r)}(x) = 0.$$

Nous désignons par $r_n(x)$ le réel :

$$r_n(x)=r_n=\inf[2^{-n}, r_{n-1}(x), \sup\{r>0 : e_{A_n(x)\cap B(x,r)}(x)<2^{-n-2}\}],$$

et nous notons :

$$M_1(x)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[D_n(x)\cap\overline{\mathrm{B}}\left(x,\frac{r_n}{2}\right)\right].$$

D'après la sous-additivité des réduites, on a :

$$e_{M_1(x)}(x)\leqslant\sum_{n\in\mathbb{N}}2^{-n-2}<1.$$

Ceci implique d'après la remarque XV T 62 *b*) de [11] que $M_1(x)$ est effilé en x.

Utilisant le critère de Wiener, nous pouvons déduire du fait que $M_1(x)$ est effilé en x, que :

$$\frac{\operatorname{cap}[M_1(x)\cap B(x,\rho)]}{\operatorname{cap}[B(x,\rho)]}\to 0 \qquad (\rho\to 0).$$

Or, utilisant la sous-additivité des capacités, nous avons :

$$0\leqslant\operatorname{cap}[A\cap B(x,\rho)]-\operatorname{cap}[A\cap B(x,\rho)\setminus M_1(x)]\leqslant\operatorname{cap}[M_1(x)\cap B(x,\rho)]$$

et :

$$0\leqslant\operatorname{cap}[B(x,\rho)]-\operatorname{cap}[B(x,\rho)\setminus A]\leqslant\operatorname{cap}[A\cap B(x,\rho)]$$

où :

$$\frac{\operatorname{cap}[B(x,\rho)\cap \complement A]}{\operatorname{cap}[B(x,\rho)]}\to 0 \qquad (\rho\to 0).$$

Nous pouvons donc conclure que :

$$\frac{\operatorname{cap}[B(x,\rho)]-\operatorname{cap}[A\cap B(x,\rho)\setminus M_1(x)]}{\operatorname{cap}[B(x,\rho)]}\to 0 \qquad (\rho\to 0).$$

Ce qui nous conduit à la notation suivante pour tout $x\in A$:

$$R(x)=\sup\left\{n^{-1} : n\in\mathbb{N}, \forall\rho\leqslant n^{-1}, \rho\in\mathbb{R}_+ : \frac{\operatorname{cap}[B(x,\rho)]-\operatorname{cap}[A\cap B(x,\rho)\setminus M_1(x)]}{\operatorname{cap}[B(x,\rho)]}<2^{-4(d-2)}\right\}>0$$

et nous posons :

$$N_0(x)=1/R(x).\in\mathbb{N}.$$

Nous notons, pour tout $x\in A$, par $M(x)$ l'ensemble :

$$M(x)=M_1(x)\cap B(x, R(x)).$$

5. PROPOSITION

L'ensemble $M(x)$ est un borélien effilé en x tel que :

$$\sup_{\rho>0}\left\{\frac{\operatorname{cap}[B(x,\rho)\cap A]-\operatorname{cap}[B(x,\rho)\cap A\setminus M(x)]}{\operatorname{cap}[B(x,\rho)]}\right\}\leqslant 2^{-4(d-2)}$$

et tel que $\nabla f(x)$ soit la différentielle de f — au sens de la norme — sur $A\setminus M(x)$:

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\rho(\varepsilon)>0,\qquad \forall y\in[A\setminus M(x)]\cap B(x,\rho(\varepsilon)) :$$
$$|f(y)-f(x)-\nabla f(x)[y-x]|<\varepsilon\,\|y-x\|.$$

Démonstration. — Si $\rho\leqslant R(x)$; alors :

$$\frac{\operatorname{cap}[B(x,\rho)\cap A]-\operatorname{cap}[B(x,\rho)\cap A\setminus M(x)]}{\operatorname{cap}[B(x,\rho)]}\leqslant 2^{-4(d-2)}$$

et, si $\rho\geqslant R(x)=R$:

$$\begin{aligned}&\operatorname{cap}[B(x,\rho)\cap A]-\operatorname{cap}[B(x,\rho)\cap A\setminus M(x)]\\ &\qquad\leqslant\operatorname{cap}[B(x,R)\cap A]-\operatorname{cap}[B(x,R)\cap A\setminus M(x)]\\ &\qquad\qquad\leqslant 2^{-4(d-2)}\operatorname{cap}[B(x,R)]\leqslant 2^{-4(d-2)}\operatorname{cap}[B(x,\rho)],\end{aligned}$$

car, si A et B sont disjoints et si $C\subset A$ alors, comme la capacité newtonienne est alternante d'ordre deux et croissante, nous avons :

$$\operatorname{cap}(A\cup B)-\operatorname{cap}(C\cup B)\leqslant\operatorname{cap}A-\operatorname{cap}C.$$

La seconde assertion de cette proposition se déduit immédiatement des définitions.

Soit f une fonction finement continûment différentiable sur l'ouvert fin A.

Utilisant le théorème 3, nous savons que, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un compact $L(\varepsilon)\subset A$, vérifiant $\operatorname{cap}(A)-\operatorname{cap}(L(\varepsilon))<\varepsilon$ et tel que les restrictions, à $L(\varepsilon)$, de f et ∇f soient continues.

Nous pouvons alors démontrer les propositions suivantes :

6. PROPOSITION

L'application $r_n = (x \rightsquigarrow r_n(x))$, *définie aux notations* 4, *est semi-continue supérieurement sur les compacts* $L(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, *introduits ci-dessus.*

Démonstration. — Elle se composera de deux étapes :

(*a*) Si $\{x_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $L(\varepsilon)$, convergeant vers x et si r est un réel positif, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n(x) \cap B(x, r) \subset \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq N} A_n(x_p) \cap B(x_p, r).$$

(*b*) Sur $L(\varepsilon)$, l'application $r_n = (x \rightsquigarrow r_n(x))$, définie en 4, est semi-continue supérieurement.

(*a*) Si $y \in A_n(x) \cap B(x, r)$ alors :

$$\|y-x\| < r \qquad \text{et} \qquad \frac{|f(y)-f(x)-\nabla f(x)[y-x]|}{\|y-x\|} > n^{-1}.$$

Par suite il existe un entier N tel que, pour tout $p \geq N$ nous ayons :

$$\|y-x_p\| < r \qquad \text{et} \qquad \frac{|f(y)-f(x_p)-\nabla f(x_p)[y-x_p]}{\|y-x_p\|} > n^{-1}.$$

Par conséquent :

$$A_n(x) \cap B(x, r) \subset \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq N} A_n(x_p) \cap B(x_p, r).$$

(*b*) Soit $\{x_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L(\varepsilon)$, convergeant vers un point x. Si $\lim\sup_{p\to\infty} r_n(x_p) > \alpha > 0$, il existe une sous-suite, extraite de $\{x_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to\infty} r_n(x_{p_k}) > \alpha > 0$.

Pour simplifier les notations, nous écrivons la sous-suite $\{x_p\}_{p\in\mathbb{N}}$.

Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N$ nous ayons $r_n(x_p) > \alpha$. Il s'ensuit que, pour tout $p \geq N$:

$$e_{A_n(x_p)\cap B(x_p,\alpha)}(x_p) \leq 2^{-n-2}.$$

Ce qui implique que, pour tout $q \geq N$:

$$e_{\bigcap_{p\geq N} A_n(x_p)\cap B(x_p,\alpha)}(x_q) \leq 2^{-n-2}.$$

Comme $(y \rightsquigarrow e_{\bigcap_{p\geq N} A_n(x_p)\cap B(x_p,\alpha)}(y))$ est une fonction semi-continue inférieurement pour la norme, ceci entraîne que :

$$e_{\bigcap_{p\geq N} A_n(x_p)\cap B(x_p,\alpha)}(x) \leq 2^{-n-2}.$$

Par suite, par limite croissante :

$$e_{\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{p\geqslant N}A_n(x_p)\cap B(x_p,\,\alpha)}(x)\leqslant 2^{-n-2},$$

et comme, d'après (a),

$$A_n(x)\cap B(x,\,\alpha)\subset \bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{p\geqslant N}A_n(x_p)\cap B(x_p,\,\alpha),$$

nous avons :

$$e_{A_n(x)\cap B(x,\,\alpha)}(x)\leqslant 2^{-n-2},$$

par conséquent α est plus petit que $r_n(x)$ et :

$$r_n(x)\geqslant \lim\,\sup_{p\to\infty} r_n(x_p).$$

8. Proposition

Soit $\{x_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ *une suite de points de* $L(\varepsilon)$ (*introduit précédemment*), *convergeant vers un point* x, *alors pour tout réel* $\rho\geqslant 0$:

$$M_1(x)\cap\overline{B}(x,\,\rho)\supset\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant N}M_1(x_p)\cap\overline{B}(x_p,\,\rho).$$

Démonstration. — Nous allons montrer que $M_1(x)\supset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n}M_1(x_p)$. Soit $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n}M_1(x_p)$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe $k_n\in\mathbb{N}_*$ et $p_n\geqslant n$ tels que :

$$\|y-x_{p_n}\|\leqslant r_{k_n}(x_{p_n})/2$$

et :

$$|f(y)-f(x_{p_n})-\nabla f(x_{p_n})[y-x_{p_n}]|\geqslant\|y-x_{p_n}\|/(k_n-1).$$

Nous avons alors deux possibilités :

(1) $y=x\Rightarrow y\in M_1(x)$;

(2) $y\neq x$. Alors il existe une suite cofinale telle que pour tout n, nous ayons :

$$0<\alpha=\|y-x\|/2\leqslant\|y-x_{p_n}\|\leqslant r_{k_n}(x_{p_n})/2\leqslant 2^{-k_n-1}.$$

Par conséquent la famille $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En prenant éventuellement une sous-suite et en choisissant $k=\lim\,\inf k_n$, nous pouvons supposer que pour tout n, $k_n=k$.

Alors par passage à la limite, en utilisant la semi-continuité supérieure de r_k, nous avons :

$$\|y-x\| \leqslant \lim\ \inf_{n\to\infty} 2^{-1}\, r_k(x_{p_n}) \leqslant r_k(x)/2$$

et, en utilisant la continuité de f et ∇f sur $L(\varepsilon)$:

$$|f(y)-f(x)-\nabla f(x)[y-x]| \geqslant \|y-x\|/(k-1).$$

Par conséquent :

$$y \in D_k(x) \cap \overline{B}(x, r_k(x)/2) \subset M_1(x).$$

9. Proposition

Pour tout réel $\varepsilon>0$, *il existe un compact* $C(\varepsilon) \subset L(\varepsilon) \subset A$ *et une constante* $c(\varepsilon)=c>0$ *tels que :*

$$\operatorname{cap} A - \operatorname{cap} C(\varepsilon) < \varepsilon,$$

$$\inf R/C(\varepsilon) \geqslant c(\varepsilon) > 0.$$

Démonstration. — L'application R définie aux notations 4 est strictement positive en tout point $x \in A$. Par suite :

$$\bigcup_{c>0} \{R>c\} \cap L(\varepsilon) = L(\varepsilon).$$

Ceci implique, par limite croissante que :

$$\lim_{c\searrow 0} \nearrow \operatorname{cap}(\{R>c\} \cap L(\varepsilon)) = \operatorname{cap} L(\varepsilon).$$

Il existe donc une constante $c(\varepsilon)>0$ telle que :

$$\operatorname{cap}(\{R>c(\varepsilon)\} \cap L(\varepsilon)\}) > \operatorname{cap} L(\varepsilon) - [\varepsilon - \operatorname{cap} A + \operatorname{cap} L(\varepsilon)].$$

Utilisant la capacitabilité de $\{R>c(\varepsilon)\} \cap L(\varepsilon)$, il existe alors un compact $C(\varepsilon)$ vérifiant :

$$C(\varepsilon) \subset \{R>c(\varepsilon)\} \cap L(\varepsilon)$$

et :

$$\operatorname{cap} C(\varepsilon) > \operatorname{cap} L(\varepsilon) - [\varepsilon - \operatorname{cap} A + \operatorname{cap} L(\varepsilon)] \geqslant \operatorname{cap} A - \varepsilon.$$

10. Proposition

L'application $R=(x \rightsquigarrow R(x))$ *définie aux notations* 4 *est semi-continue inférieurement sur les compacts* $C(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, *introduits à la proposition* 9.

Démonstration. – Soit $\{x_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $C(\varepsilon)$ convergeant vers un point x. Nous nous proposons de montrer que :

$$R(x)\leqslant \lim\ \inf R(x_p).$$

Notons $R=\lim\ \inf R(x_p)$. Nous savons que :

$$R\geqslant c(\varepsilon)>0.$$

Par extraction d'une sous-suite, nous pouvons supposer que, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $R(x_p)=R$ (car $\lim_{p\to\infty} R(x_p)=R$ et $\{R(y) : R(y)\geqslant c(\varepsilon)>0\}$ est discret).

Alors, pour tout $\rho\in\mathbb{R}_+$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cap}[A\cap B(x,\rho)\setminus M_1(x)]\\
&\qquad\leqslant \operatorname{cap}[A\cap(\textstyle\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{p\geqslant N} B(x_p,\rho)\cap \complement M_1(x_p))\\
&\qquad\leqslant \lim_{N\to\infty}\uparrow \operatorname{cap}[A\cap(\textstyle\bigcap_{p\geqslant N} B(x_p,\rho)\cap\complement M_1(x_p))]\\
&\qquad\leqslant \lim\ \inf_{p\to\infty}\operatorname{cap}[A\cap B(x_p,\rho)\cap\complement M_1(x_p)]\\
&\qquad\leqslant \lim\ \inf_{p\to\infty}\operatorname{cap}[A\cap B(x_p,\rho)\setminus M_1(x_p)].
\end{aligned}$$

La fonction $(x\rightsquigarrow \operatorname{cap}\ [A\cap B\ (x,\ \rho)\setminus M_1(x)])$ est donc semi-continue inférieurement, pour tout réel $\rho>0$. Sur $\mathbb{R}_+\times C(\varepsilon)$ nous définissons la fonction :

$$\Phi(\rho,x)=\frac{\operatorname{cap}[B(x,\rho)]-\operatorname{cap}[A\cap B(x,\rho)\setminus M_1(x)]}{\operatorname{cap}[B(x,\rho)]}\qquad \text{si}\quad \rho>0,$$

$$\Phi(0,x)=0,$$

Nous voyons que cette fonction est semi-continue supérieurement sur $R_+^*\times C(\varepsilon)$.

Supposons, par l'absurde, que $R(x)>R$, alors :

$$\forall\,\rho<R(x):\quad \Phi(\rho,x)<2^{-4(d-2)}$$

et, pour tout p, il existe un $\rho_p\in]R,\ R(x)[$ tel que :

$$\Phi(\rho_p,x_p)\geqslant 2^{-4(d-2)}.$$

La suite ρ_p admet un point d'accumulation $\rho_0\in[R,R(x)]$ et, par extraction éventuelle d'une sous-suite, nous pouvons supposer que, dans $\mathbb{R}_+^*\times C(\varepsilon)$:

$$(\rho_p,x_p)\to(\rho_0,x)\ (p\to\infty).$$

La fonction $\Phi(\rho, y)$ étant s. c. s. sur $\mathbb{R}_+^* \times C(\varepsilon)$, nous pouvons en déduire que :

$$\Phi(\rho_0, x) \geqslant \limsup_{p\to\infty} \Phi(\rho_p, x_p) \geqslant 2^{-4(d-2)}$$

ce qui est contraire au fait que :

$$\Phi(\rho_0, x) < 2^{-4(d-2)}.$$

La proposition est donc démontrée.

11. Théorème

Soit f une fonction définie et finement différentiable sur un ouvert fin $A \subset \mathbb{R}^d$.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K(\varepsilon) = K \subset A$ tel que les capacités de A et $K(\varepsilon)$ vérifient $\operatorname{cap} A - \operatorname{cap} K(\varepsilon) < \varepsilon$ *et tel que la restriction de f à K soit continûment différentiable.*

Démonstration. — Nous fixons le réel $\varepsilon > 0$.

Pour tout entier $m \geqslant 1$ et tout réel $\eta > 0$, nous notons :

$$Q(m, \eta) = \{x \in C(\varepsilon/2) : \quad \forall y \in A \cap B(x, \eta) \setminus M_1(x),$$
$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]| \leqslant m^{-1} \|y - x\|\}.$$

12. Lemme

L'ensemble $Q(m, \eta)$ est compact.

Démonstration du lemme. — Soit $\{x_p\} \in Q(m, \eta)$, $x_p \to x$.

Nous savons d'après la proposition 8, que :

$$M_1(x) \cap \overline{B}(x, \eta) \supset \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geqslant N} M_1(x_p) \cap \overline{B}(x_p, \eta)$$

et donc :

$$A \cap B(x, \eta) \setminus M_1(x) \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geqslant N} A \cap B(x_p, \eta) \setminus M_1(x_p).$$

Or, si :

$$y \in \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geqslant N} A \cap B(x_p, \eta) \setminus M_1(x_p),$$

il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geqslant N$, nous ayons :

$$|f(y) - f(x_p) - \nabla f(x_p)[y - x_p]| \leqslant m^{-1} \|y - x_p\|.$$

Comme $x_p \to x$ et comme f est continue sur $C = C(\varepsilon/2)$, ainsi que ∇f, il en résulte que x appartient encore à $Q(m, \eta)$.

Suite de la démonstration du théorème 11. — Comme :

$$\cup_{\eta>0} Q(m, \eta) = C(\varepsilon/2) = C$$

et comme cette réunion est croissante, nous avons :

$$\operatorname{cap} Q(m, \eta) \nearrow \operatorname{cap} C \qquad (\eta \searrow 0).$$

Nous allons effectuer une construction par récurrence.

Comme $\cup_{\eta>0} Q(1, \eta) = C$, et comme la réunion est croissante, il existe un réel $\eta(1) > 0$ tel que :

$$\operatorname{cap} C - \operatorname{cap} Q(1, \eta(1)) < \varepsilon . 2^{-3} \ldots$$

Par récurrence, supposons construit $Q(m, \eta(m))$ vérifiant :

$$\operatorname{cap}[\cap_{k=1}^{m-1} Q(k, \eta(k))] - \operatorname{cap}[\cap_{k=1}^{m} Q(k, \eta(k))] < \varepsilon . 2^{-m-2}.$$

Alors, comme la réunion croissante des $Q(m+1, \eta)$ vérifie :

$$\cup_{\eta>0} Q(m+1, \eta) = C \supset \cap_{k=1}^{m} Q(k, \eta(k))$$
$$\Rightarrow \cup_{\eta>0} [Q(m+1, \eta) \cap_{k=1}^{m} Q(k, \eta(k))] = \cap_{k=1}^{m} Q(k, \eta(k)),$$

il existe un réel $\eta(m+1)$ tel que :

$$\operatorname{cap}[\cap_{k=1}^{m} Q(k, \eta(k))]$$
$$- \operatorname{cap}[Q(m+1, \eta(m+1)) \cap_{k=1}^{m} Q(k, \eta(k))] < \varepsilon 2^{-m-3}.$$

Nous voyons alors, que, pour tout $m \in \mathbb{N}_*$:

$$\operatorname{cap}[\cap_{k=1}^{m} Q(k, \eta(k))] \geqslant \operatorname{cap} C(\varepsilon/2) - \varepsilon . \textstyle\sum_{k=1}^{m} 2^{-m-2}.$$

Nous notons $K(\varepsilon) = K$ le compact :

$$K(\varepsilon) = \cap_{m \in \mathbb{N}_*} Q(m, \eta(m)) \subset C(\varepsilon/2).$$

Nous pouvons conclure par intersection décroissante de fermés que :

$$\operatorname{cap} K \geqslant \operatorname{cap} C - \varepsilon/2 \Rightarrow \operatorname{cap} K \geqslant \operatorname{cap} A - \varepsilon.$$

Pour établir la différentiabilité de la restriction de f à K, il suffit de montrer que la restriction f/C est différentiable en tout point de K.

Si f/C n'était pas différentiable en un point $x \in K$, il existerait un réel $\alpha > 0$ et une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenue dans C et convergeant vers x telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(y_n) - f(x) - \nabla f(x)[y_n - x]| \geqslant \alpha \| y_n - x \|.$$

Se limitant, éventuellement à une suite cofinale, nous pouvons, utilisant la proposition 11, supposer que, pour tout $n \in N$:

$$\|y_n - x\| < R(x) \qquad \text{et} \qquad R(y_n) \geqslant R(x)/2.$$

Soit η (Ent $[10/\alpha]+1$) le réel défini au début de cette démonstration nous notons $\eta = \inf[\eta(\text{Ent }[10/\alpha]+1), R(x)/2)$.

Nous voyons alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B(y_n, \eta) \setminus M_1(y_n) = B(y_n, \eta) \setminus M(y_n),$$

et, pour tout $z \in B(y_n, \eta) \setminus M(y_n)$:

$$|f(z) - f(y_n) - \nabla f(y_n)[z - y_n]| < \alpha \|z - y_n\|/10.$$

Utilisant la continuité de ∇f sur $C(\varepsilon/2)$, nous pouvons supposer, en nous limitant, éventuellement, à une suite cofinale des (y_n) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la norme $\|\nabla f(y_n) - \nabla f(x)\|$ est majorée par $\alpha/10$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il apparaît alors que, pour tout $z \in A \cap B(y_n, \inf(\eta, 2^{-1}\|y_n - x\|)) \setminus M(y_n)$, nous avons la minoration suivante :

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(x) - \nabla f(x)[z - x]| &\geqslant |f(y_n) - f(x) - \nabla f(x)[y_n - x]| \\
&\quad - |f(z) - f(y_n) - \nabla f(y_n)[z - y_n]| \\
&\quad - |[\nabla f(y_n) - \nabla f(x)][z - y_n]| \\
&\geqslant \alpha \frac{2}{3}\|z - x\| - \alpha\|z - x\|/10 \\
&\qquad - \alpha\|z - x\|/10 \geqslant \alpha\|z - x\|/3.
\end{aligned}$$

Nous voyons que l'ensemble :

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap B[y_n, \inf(\eta, 2^{-1}\|y_n - x\|)] \setminus M(y_n)$$

est contenu dans l'ensemble :

$$E = \left\{ z \in A : |f(z) - f(x) - \nabla f(x)[z - x]| > \frac{\alpha}{3}\|z - x\| \right\}.$$

Comme f est finement différentiable en x, E est effilé en x.

Pour simplifier les notations, nous supposons, dans la suite que la dimension d est supérieur ou égale à 3. Le critère de Wiener s'écrit alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{n(d-2)} \operatorname{cap}[E \cap \{2^{-n-1} \leqslant \|z - x\| \leqslant 2^{-n}\}] < \infty.$$

Si $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant p$ et N tels que $2^{-n-1} < \| y_N - x \| < 2^{-n}$ et $2^{-1} \| y_N - x \| \leqslant \eta$.

Alors :

$$B(y_N, 2^{-1} \| y_N - x \|) \subset \{ 2^{-n-2} < \| . - x \| < 2^{-n+1} \}.$$

Et nous avons la minoration suivante :

$$\begin{aligned}\Lambda_n = 2^{(n-1)(d-2)} &\operatorname{cap}[F \cap \{ 2^{-n} < \| z - x \| \leqslant 2^{-n+1} \}] \\ &+ 2^{n(d-2)} \operatorname{cap}[F \cap \{ 2^{-n-1} < \| z - x \| \leqslant 2^{-n} \} \\ &+ 2^{(n+1)(d-2)} \operatorname{cap}[F \cap \{ 2^{-n-2} \leqslant \| z - x \| < 2^{-n-1} \} \\ &\geqslant 2^{(n-1)(d-2)} \operatorname{cap}[B(y_N, 2^{-1} \| y_N - x \|) \setminus M(y_N)].\end{aligned}$$

Or, utilisant la proposition 3 et le fait que $\{ y_N \}_{N \in \mathbb{N}} \subset C(\varepsilon/2)$; nous pouvons nous limiter à une suite cofinale de $y_{N, N \in \mathbb{N}}$ de manière que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous ayons :

$$2^{-1} \| y_N - x \| < c(\varepsilon) \leqslant \inf \{ R(z)\ z \in C(\varepsilon) \}.$$

Par suite, d'après la définition de $R(x)$ donnée aux notations 4:

$$\begin{aligned}&\operatorname{cap}[A \cap B(y\ , 2^{-1} \| y_N - x \|) \setminus M(y_N)] \\ &\quad \geqslant \operatorname{cap} B(y_N, 2^{-1} \| y_N - x \|)] - 2^{-4(d-2)} \operatorname{cap}[B(y_N, 2^{-1} \| y_N - x \|)] \\ &\quad\quad \geqslant (1 - 2^{-4(d-2)})(2^{-1} . \| y_N - x \|)^{d-2} \geqslant (1 - 2^{-4(d-2)}) . 2^{(-n-2)(d-2)}.\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\Lambda_n \geqslant (1 - 2^{-4(d-2)}) . 2^{-3(d-2)}.$$

Il existe donc une sous-suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{n(d-2)} \operatorname{cap}[F \cap \{ 2^{-n-1} \\ &\qquad < \| z - x \| < 2^{-n} \}] \geqslant \textstyle\sum_{p \in \mathbb{N}} 2^{-3(d-2)} - 2^{-7(d-2)}.\end{aligned}$$

Cette série est donc divergente.

On obtient une contradiction avec l'inclusion $F \subset E$ et le fait que E soit effilé et le théorème est démontré.

La proposition suivante donne un exemple de fonction finement continûment différentiable, qui n'est pas différentiable quasi-partout.

12. Proposition

Il existe des fonctions, définies sur des ouverts fins $A \subset \mathbb{R}^d$, finement différentiables sur A, dont la différentielle fine est finement continue sur A et qui ne sont pas différentiables quasi-partout.

Démonstration. — Pour simplifier les notations, nous supposons $d \geqslant 3$. Dans $\mathbb{R}^d$, nous notons Δ l'hyperplan $\{x^1=0\}$; il est connu qu'un hyperplan n'est pas polaire. Nous désignons par A la boule de $\mathbb{R}^d$, centrée à l'origine et dont le rayon est égal à 10.

Nous considérons la famille des boules fermées :

$$B^n(k_2 k_3 \ldots k_d) \; (n \in \mathbb{N}_*, (k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^{d-1})$$

$$\text{de centre } c^n_{k_2 \ldots k_d} = (x^1, x^2, \ldots, x^d),$$

$$x^1 = 3.2^{-n-2}, \qquad x^2 = k_2 2^{-n}, \ldots, x^d = k_d . 2^{-n}$$

et de rayon : $r_n = 2^{-n-1-8n/d}$.

Nous montrons, dans un premier temps, que :

$$C = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}_*, (k_2, k_3, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^{d-1}} B^n_{k_2 k_3 \ldots k_d}$$

est un voisinage fin de Δ. Pour cela, nous notons :

$$D_n = \bigcup_{(k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^{d-1}} B^n_{k_2 \ldots k_d}.$$

Nous voyons que, pour tout $x \in \Delta$:

$$\sum_{h \leqslant n} 2^{h(d-2)} \operatorname{cap}[D_n \cap (B(x, 2^{-h}) \setminus B(x, 2^{-h-1})]$$
$$\leqslant \sum_{h \leqslant n} 2^{2-h+n[-3+8/d]} \leqslant 2^4 . 2^{-n/3}.$$

Utilisant le critère de Wiener et la sous-additivité des capacités, nous pouvons conclure que :

$$C = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

est un voisinage fin de Δ.

Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$, $\varphi \geqslant 0$, φ nulle sur $\complement B(0, 1)$, vérifiant $\varphi(0)=1$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous notons $\varphi_n(x) = \varphi(x/r_n)$ et nous considérons la fonction :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}, (k_2, k_3 \ldots k_d) \in \mathbb{Z}^{d-1}} \varphi_n(x - c^n_{k_2 k_3 \ldots k_d}).$$

Comme les boules $B^n_{k_2 \ldots k_d}$ sont disjointes, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^d$, différentiable sur $\mathbb{R}^d \setminus \Delta$. Comme, de plus :

$$C = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}_*, (k_2 \ldots k_d) \in \mathbb{Z}^{d-1}} B^n_{k_2 \ldots k_d}$$

est un voisinage fin de Δ, sur lequel f est identiquement nulle, f est finement différentiable sur Δ et la restriction, à Δ, de ∇f est identiquement nulle.

Sur $A \setminus \Delta$, la différentielle fine est égale à la différentielle au sens de la norme; elle est continue, donc finement continue.

En tout point x de Δ, nous avons :

$$\nabla f(x)=0=\nabla f/C,$$

C étant un voisinage fin de x.

Par suite ∇f est finement continue sur A tout entier.

Comme φ est nulle sur $\complement B(0, 1)$ et égale à 1 en 0, il existe un point de $B(0, 1)$ où $\|\nabla \varphi\| \geqslant 1 \Rightarrow \|\nabla \varphi_n\| \geqslant n$. Par translation, dans toute boule $B^n_{k_2 \ldots k_d}$, il existe un point où $\|\nabla f\| \geqslant n$.

Il en résulte que ∇f n'est continue en aucun point de Δ, qui est négligeable mais non polaire.

En tout point $c^n_{k_2 \ldots k_d}$, nous avons :

$$f(c^n_{k_2 \ldots k_d})=\varphi_n(c^n_{k_2 \ldots k_d})=1.$$

La fonction f n'est donc continue en aucun point de Δ; elle n'est donc différentiable (pour la norme) en aucun point de Δ.

Cependant, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $\alpha>0$ pour lequel le compact $K(\varepsilon)=\overline{B}(0, 10-\alpha)\setminus\{x^1 \in]0, \alpha[\}$ vérifie $\text{cap}(A\setminus K(\varepsilon))<\varepsilon$ et la restriction de f à $K(\varepsilon)$ soit continûment différentiable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Blumenthal (R. M.) et Getoor (R. K.). — Markov processes and potential theory, New York and London, Acad. Press, 1968.

[2] Dehen (D.) et Mastrangelo-Dehen (M.). — Étude de fonctions finement harmoniques sur des ouverts fins de $\mathbb{C}$, *C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 275, série A, 1972, p. 361-364.

[3] Dehen (D.) et Mastrangelo-Dehen (M.). — Propriété de Lindeberg et points intérieurs fins, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 279, série A, 1974, p. 929-932.

[4] Dehen (D.) et Mastrangelo-Dehen (M.). — Propriété de Lindeberg et points finement intérieurs, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 100, 1976, p. 209-228.

[5] Fuglede (B.). — Finely harmonic functions, Berlin, Springer-Verlag, 1972 (*Lecture Notes in mathematics*, vol. 289).

[6] Fuglede (B.). — Remarks on fine continuity and the base operation in potential theory, *Math. Ann.* (à paraître).

[7] MASTRANGELO (M.). — Propriété de Lindeberg forte sur les ouverts fins, *Bull. Sc. math.* 2e série, t. 101, 1977, p. 295-303.

[8] MASTRANGELO (M.). — Propriété de Lindeberg sur les ouverts fins, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 103, 1979, p. 401-407.

[9] MASTRANGELO (M.). — Différentiabilité fine, Différentiabilité stochastique, différentiabilité stochastique de fonctions finement harmoniques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 28, fasc. 2, 1978, p. 161-186.

[10] MASTRANGELO (M.). — Différentiabilité fine et différentiabilité sur les compacts, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 108, 1980, p. 3-15.

[11] MEYER (P. A.). — Processus de Markov, Berlin, Springer-Verlag, 1967 (*Lecture Notes in Mathematics*, vol. 26).

[12] STEIN (E. M.). — Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton, Princeton University Press, 1970 (*Princeton mathematical Series*, vol. 30).

[13] WHITNEY (H.). — Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 36, 1934, p. 63-89.