

BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL RAYNAUD

Sections des fibrés vectoriels sur une courbe

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 103-125

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__103_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__103_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SECTIONS DES FIBRÉS VECTORIELS SUR UNE COURBE

PAR

MICHEL RAYNAUD (*)

RÉSUMÉ. — Soit X une courbe algébrique propre et lisse de genre $g \geq 2$. Si E est un fibré vectoriel semi-stable sur X , de rang r , de degré $r(g-1)$ (de sorte que $\chi(E)=0$), on peut se demander si $H^0(X, E \otimes L)=0$, lorsque L est un faisceau inversible générique de degré 0. La réponse est non en général; elle est positive pour les petites valeurs de r et, en caractéristique $p>0$, lorsque E est le faisceau des différentielles localement exactes, ce qui implique que les p -sous-groupes de Sylow de $\pi_1(X)$ sont « gros ».

ABSTRACT. — Let X be a smooth and proper algebraic curve of genus $g \geq 2$. If E is a semi-stable vector bundle on X of rank r and degree $r(g-1)$ (thus $\chi(E)=0$), does $H^0(X, E \otimes L)=0$ for L a generic line bundle of degree 0? The answer is no in general, but is positive for small values of r and (in characteristic $p>0$) when E is the sheaf of locally exact differentials. The latter case implies that the p -Sylow's subgroups of $\pi_1(X)$ are rather big.

0. Soit X une courbe algébrique, propre, lisse, connexe, de genre g , définie sur un corps k algébriquement clos. Si E est un fibré vectoriel sur X , E a un rang $r=r(E)$ et un degré $d=d(E)$. Pour $E \neq 0$, on définit la pente de E : $\lambda = \lambda(E) = d/r$. La caractéristique d'Euler-Poincaré de E , $\chi(E) = h^0(E) - h^1(E)$, (où $h^i(E) = \dim_k H^i(X, E)$), est donnée par la formule de Riemann-Roch :

$$\chi(E) = d - r(g-1) = r(\lambda - (g-1)).$$

Dans la suite, L désigne un faisceau inversible variable sur X , de degré 0. Les divers faisceaux L sont paramétrés par les points de la jacobienne J de X . On a $\chi(E) = \chi(E \otimes L) = h^0(E \otimes L) - h^1(E \otimes L)$. L'entier $h^0(E \otimes L)$ peut varier

(*) Texte reçu le 19 mars 1981, révisé le 15 juin 1981.

Michel RAYNAUD, Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, E.R.A. 653.

avec L , mais il existe un ouvert non vide U de J tel que pour $L \in U$, $h^0(E \otimes L)$ soit constant; on note sa valeur $h^0(E \otimes L_{\text{gen}})$. On a évidemment, $h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) \geq \max(0, \chi(E))$. Lorsque E est de rang 1, $h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) = 0$ pour $d(E) \leq g-1$ et $h^1(E \otimes L_{\text{gen}}) = 0$ pour $d(E) \geq g-1$, de sorte que $h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) = \max(0, \chi(E))$. Lorsque $r(E) \geq 2$, on ne peut espérer une telle égalité sans hypothèses supplémentaires sur E . Par exemple, supposons $\lambda(E) = g-1$, de sorte que $\chi(E) = 0$. S'il existe un sous-fibré F de E tel que $\lambda(F) > g-1 = \lambda(E)$, on aura $h^0(F \otimes L) > 0$, $\forall L \in J$ et, *a fortiori*, $h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) > 0$. Cette remarque nous conduit à rappeler la notion de *fibré stable* introduite par MUMFORD :

Le fibré E est *stable* (resp. *semi-stable*) si, pour tout sous-fibré F de E , ($F \neq 0$, $F \neq E$), on a $\lambda(F) < \lambda(E)$ (resp. $\lambda(F) \leq \lambda(E)$).

Nous dirons qu'un fibré E sur X vérifie la propriété (\star) si $h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) = \max(0, \chi(E))$.

On peut se demander si un fibré E semi-stable sur X vérifie la propriété (\star) . Par exemple il en est bien ainsi pour $r=2$ (1.6.2) et nous donnons des résultats partiels positifs pour $r=3$ (1.7.5 et 2.1). Mais la réponse est non en général : plus précisément, nous montrons que sur toute courbe X de genre $g \geq 2$, il existe des fibrés stables qui ne vérifient pas (\star) . Nous construisons de tels fibrés à l'aide de la « transformée de Fourier » des faisceaux cohérents sur les variétés abéliennes, due à MUKAI (cf. 3).

Pour terminer sur une note plus positive, on suppose k de caractéristique $p > 0$, et on montre que le fibré vectoriel des différentielles localement exactes sur X vérifie (\star) . On en déduit que pour tout nombre premier $l >> 0$, il existe un revêtement étale cyclique de degré l : $Y \rightarrow X$ tel que la partie nouvelle de la jacobienne de Y soit ordinaire (4.3.1). Ce résultat donne quelques informations sur les p -sous-groupes de Sylow du groupe fondamental de X .

Qu'il me soit permis de remercier MUKAI, SERRE et SESHADRI pour l'aide essentielle qu'ils m'ont apportée dans la préparation de ce travail.

1. Quelques remarques élémentaires sur la propriété (\star)

1.1. Soit E un fibré vectoriel sur X . Explicitons la propriété (\star) :

(a) si $\lambda(E) \geq g-1$, E vérifie :

$$(\star) \Leftrightarrow h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) = \chi(E) \Leftrightarrow h^1(E \otimes L_{\text{gen}}) = 0;$$

(b) si $\lambda(E) \leq g-1$, E vérifie :

$$(\star) \Leftrightarrow h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) = 0 \Leftrightarrow h^1(E \otimes L_{\text{gen}}) = -\chi(E).$$

1.2. Soient $\omega = \Omega_X^1$ le faisceau des formes différentielles sur X et $\check{E} = \text{Hom}(E, \mathcal{O}_X)$ le dual de E . Vu la dualité de Serre, $h^i(E \otimes L_{\text{gen}}) = h^{1-i}(\check{E} \otimes \omega \otimes L_{\text{gen}})$. Ainsi E vérifie (\star) si et seulement si $\check{E} \otimes \omega$ vérifie (\star) . Comme $\lambda(\check{E} \otimes \omega) = 2g-2-\lambda(E)$, pour étudier la propriété (\star) , on peut, quitte à remplacer E par $\check{E} \otimes \omega$, se ramener soit au cas (a), soit au cas (b) de 1.1.

1.3. Soit $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$, une suite exacte de fibrés vectoriels sur X , de pente λ . Si E' et E'' vérifient (\star) , il en est de même de E .

1.4. Supposons E semi-stable de pente λ , alors E possède une suite de composition $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_s = E$, à quotients successifs E_i/E_{i-1} stables de pente λ (cf. [10] prop. 3.1). Comme tout fibré stable de pente ≤ 0 satisfait clairement à la propriété (\star) , pour étudier si un fibré semi-stable E vérifie (\star) , on peut se borner au cas où l'on a :

$$g-1 \leq \lambda(E) < 2g-2.$$

1.5. Rappelons qu'un fibré E possède une filtration canonique, la filtration de HARDER $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_h = E$, caractérisée par les deux propriétés suivantes :

(a) E_j/E_{j-1} est semi-stable de pente λ_j , pour $j=1, \dots, h$;

(b) $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_h$.

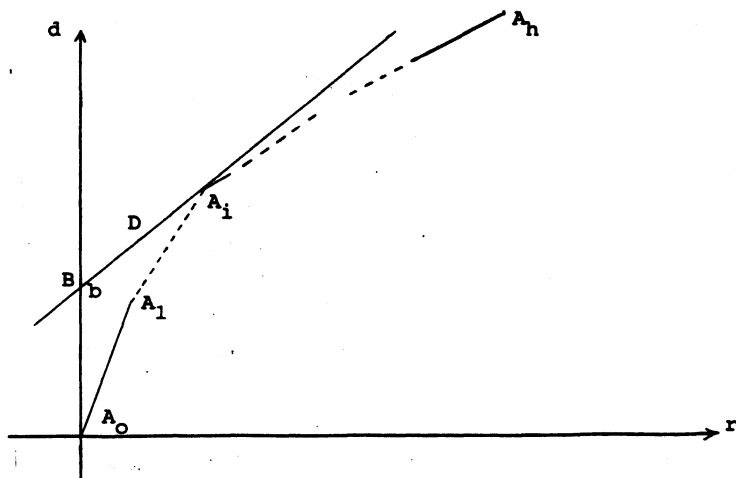
(cf. [4] Prop. 1.3.9).

A cette filtration on associe le polygone de HARDER $P(E)$ qui, dans le plan de coordonnées (r, d) a pour sommets les points $A_j = (r(E_j), d(E_j))$, $j=0, \dots, h$. C'est un polygone concave dont les côtés ont pour pente $\lambda_1, \dots, \lambda_h$. Soit i le plus grand indice j tel que $\lambda_j > g-1$ et soit D la droite de pente $g-1$ passant par A_i (D est la « tangente » à $P(E)$ de pente $g-1$). La droite D recoupe l'axe des degrés au point B d'ordonnée $b = \chi(E_i)$.

PROPOSITION 1.5.1. — On a $h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) \geq \chi(E_i)$. De plus, si tous les fibrés semi-stables E_j/E_{j-1} , $j=1, \dots, h$, vérifient (\star) , on a $h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) = \chi(E_i)$.

En effet $h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) \geq h^0(E_i \otimes L_{\text{gen}}) \geq \chi(E_i)$. Prouvons la dernière assertion. L'hypothèse faite sur E entraîne d'une part que pour :

$$j > i, \quad h^0(E_j/E_{j-1} \otimes L_{\text{gen}}) = 0,$$



donc :

$$h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) = h^0(E_i \otimes L_{\text{gen}}),$$

d'autre part que pour $j \leq i$, $h^1(E_j/E_{j-1} \otimes L_{\text{gen}}) = 0$ et :

$$h^0(E_j/E_{j-1} \otimes L_{\text{gen}}) = \chi(E_j/E_{j-1}),$$

donc :

$$h^0(E_i \otimes L_{\text{gen}}) = \sum_{j \leq i} h^0(E_j/E_{j-1} \otimes L_{\text{gen}}) = \sum_{j \leq i} \chi(E_j/E_{j-1}) = \chi(E_i).$$

COROLLAIRE 1.5.2. — Supposons $\lambda(E) \geq g-1$. Pour que E vérifie (\star) il faut que $\lambda_h \geq g-1$ et il suffit que $\lambda_h \geq g-1$ et que tous les fibrés semi-stables E_j/E_{j-1} , $j=1, \dots, h$, vérifient (\star) .

1.6. Si D est un diviseur sur X et E un fibré vectoriel sur X , on note $E(D)$ le fibré vectoriel $E \otimes \mathcal{O}_X(D)$.

PROPOSITION 1.6.1. — Soit E un fibré vectoriel sur X de rang r et de pente $\geq g-1$:

- (1) si E vérifie (\star) , tout fibré E' de rang r , qui contient E , vérifie (\star) ;
- (2) soit $x \in X$. Pour que E vérifie (\star) , il faut et il suffit que $E(x)$ vérifie (\star) et que pour L général dans J , $H^0(E(x) \otimes L)$ engendre un sous-faisceau de rang r de $E(x) \otimes L$.

Démonstration. — Comme E'/E est de longueur finie, $h^1(E'/E) \otimes L = 0$, donc $h^1(E \otimes L_{\text{gen}}) = 0 \Rightarrow h^1(E' \otimes L_{\text{gen}}) = 0$, d'où (1). Prouvons (2). Soit L_1 un

faisceau inversible sur X de degré 1. Pour un choix général de L_1 , soit s le rang du sous-faisceau de $E \otimes L_1$ engendré par les sections globales de $E \otimes L_1$. On a $h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) = h^0(E \otimes (L_1)_{\text{gen}}) - s = h^0[E(x) \otimes L_{\text{gen}}] - s$ d'où (2).

PROPOSITION 1.6.2. — *Si E est un fibré semi-stable sur X , de rang ≤ 2 , alors E vérifie (\star) .*

On a déjà remarqué que si E est inversible, alors E vérifie (\star) . Supposons E de rang 2, de pente $\lambda \geq g$. Soit F_L le sous-fibré de $E \otimes L$ engendré par $H^0(X, E \otimes L)$. Supposons qu'il existe un ouvert non vide U de J tel que pour $L \in U$, F_L soit de rang 1. Nous allons montrer que E n'est pas semi-stable, d'où la proposition compte tenu de 1.4 et de 1.6.1 (2). Quitte à remplacer E par $E \otimes L$, $L \in U$, on peut supposer que $0 \in U$. Posons $F = F_{0_X}$ et montrons que $F_{L_{\text{gen}}} = F \otimes L_{\text{gen}}$.

Soit $x \in X$. Comme $\lambda \geq g$, on a $\chi(E) \geq 2$. Alors $h^0(F) = h^0(E) \geq 2$, donc $h^0(F(-x)) \geq 1$. Comme $x - x = 0 \in U$, il existe un ouvert non vide V_1 de X tel que pour $y \in V_1$, $y - x \in U$. Comme $F(y - x)$ est un sous-fibré de $E(y - x)$ et que $F(y - x) \subset F(-x)$, on a $h^0(F(y - x)) \geq 1$, donc $F_{\mathcal{O}_X(y-x)} = F(y - x)$, pour $y \in V_1$. On réitère le processus en partant de $E(y - x)$ en place de E . Finalement on trouve un ouvert non vide V_g de X^g , tel que pour (y_1, \dots, y_g) dans V_g , le point $z = y_1 + \dots + y_g - gx$ est dans U et $F_{\mathcal{O}_X(z)} = F(z)$. Comme z est un point général de J , on a bien $F_{L_{\text{gen}}} = F \otimes L_{\text{gen}}$. On a alors $h^0(F \otimes L_{\text{gen}}) = h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) \geq \chi(E_g) > \chi(E)/2$. Comme F est inversible, $h^0(F \otimes L_{\text{gen}}) = \chi(F)$, d'où $\chi(F) > \chi(E)/2$, soit $d(F) > d(E)/2$, en contradiction avec la définition de la semi-stabilité.

Remarque 1.6.3. — Si on cherche à étendre la méthode précédente au cas où E est de rang ≥ 3 , on n'obtient que des résultats partiels. Par exemple on peut montrer que si E est semi-stable, E vérifie (\star) dans les cas suivants : $r=3$, $\lambda > g-1$ et $r=4$, $\lambda > (g-1) + 1/2$.

1.7. Soient E un fibré sur X et E' un sous-faisceau de E tel que E/E' soit de longueur 1. Nous dirons que E est une augmentation élémentaire de E' et que E' est une diminution élémentaire de E . Le lemme suivant est immédiat.

LEMME 1.7.1. — *Soient n un entier, E un fibré stable de pente $\lambda \in [n, n+1]$, E' une diminution élémentaire de E . Alors si λ'_i est une pente de HARDER de $E'(1.5)$, on a $\lambda'_i \in [n, \lambda]$.*

PROPOSITION 1.7.2. — *Soit r_0 un entier. Pour que tout fibré semi-stable sur X de rang $r \leq r_0$ vérifie (\star) il faut et il suffit qu'il en soit ainsi des fibrés stables de pente $(g-1)$ et de rang $\leq r_0$.*

La condition est évidemment nécessaire, prouvons qu'elle est suffisante. Par récurrence sur le rang, on peut supposer que les fibrés semi-stables de rang $< r_0$ vérifient (\star) . Pour étudier les fibrés semi-stables de rang r_0 on peut se borner à ceux de pente λ avec $g-1 \leq \lambda < 2g-2$ (1.4) et procéder par récurrence croissante sur la pente. D'après 1.5 on peut se borner aux fibrés stables. Par hypothèse la propriété (\star) est vérifiée pour la pente $g-1$. Soit $\lambda = d/r_0 > g-1$ et supposons la propriété (\star) vérifiée pour les fibrés E semi-stables de pente $\in [g-1, \lambda]$ et de rang r_0 . Soit E stable de pente λ et soit E' une diminution élémentaire de E . Alors les pentes de HARDER de E' sont $\geq (g-1)$ (1.7.1), donc E' vérifie (\star) et par suite E vérifie (\star) [1.6.1 (1)].

COROLLAIRE 1.7.3. — *Si X est de genre $g \leq 1$, tout fibré E semi-stable sur X vérifie (\star) .*

En effet, si $g=0$, tout fibré stable est de rang 1 et si $g=1$, tout fibré stable de pente $g-1=0$ est de rang 1 [1].

COROLLAIRE 1.7.4. — *Si X est de genre $g=2$, tout fibré E semi-stable de rang ≤ 3 vérifie (\star) .*

Compte tenu de 1.6.2 et 1.7.2, il suffit de vérifier que tout fibré E sur X , stable de rang 3, de pente $g-1=1$ vérifie (\star) . Soit $x \in X$; alors $E(x)$ est de pente $2=2g-2$ donc vérifie (\star) (1.4). Pour pouvoir appliquer 1.6.1 (2), il nous suffit donc d'établir le lemme suivant :

LEMME 1.7.5. — *Soit E un fibré stable de rang 3, de pente 2, sur une courbe X de genre 2 et soit F le sous-faisceau de E engendré par $H^0(X, E)$. Alors F est de rang 3.*

En effet, on a $h^1(E) = h^0(\check{E} \otimes \omega) = 0$ car $\check{E} \otimes \omega$ est stable de pente 0, donc $h^0(E) = 3$ et par suite $h^0(F) = 3$. Le faisceau F ne peut être inversible, sinon on aurait $d(F) > 2$ en contradiction avec la stabilité de E . Supposons F de rang 2 et soit $x \in X$. Comme $h^0(F) = 3$, on a $h^0(F(-x)) > 1$, d'où une injection $i : \mathcal{O}_X(x) \hookrightarrow F$. Alors $i(\mathcal{O}_X(x))$ est un sous-fibré de E (sinon E contiendrait un faisceau inversible de degré ≥ 2) et on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(x) \rightarrow F \rightarrow N \rightarrow 0,$$

où N est un faisceau inversible. Comme E est stable de pente 2, on a $\lambda(F) \leq 3/2$, donc $d(N) \leq 2$. Mais par ailleurs $h^0(\mathcal{O}_X(x)) = 1$ et $h^0(F) = 3$, donc $h^0(N) \geq 2$. Il en résulte que $N = \omega$, donc $\Lambda^2 F = \omega(x)$. Comme x est arbitraire, on trouve une contradiction, d'où le fait que F est de rang 3.

1.8. Soit \mathcal{L} un faisceau inversible de Poincaré sur $X \times J$ et $f : X \times J \rightarrow J$ la seconde projection. Soit E un fibré vectoriel sur X . Alors l'image directe totale

$Rf_*(E \otimes \mathcal{L})$ de E par f est réalisable par un complexe parfait M de longueur 1 : $M^0 \xrightarrow{u} M^1$, où M^i est un fibré vectoriel sur J . Supposons $\lambda(E) = g - 1$, donc $\chi(E) = 0$. Alors M^0 et M^1 ont même rang. Si de plus $h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) = 0$, u est génériquement bijectif et on peut considérer le déterminant de u , $\det(u)$, qui est un diviseur ≥ 0 sur J , indépendant du choix de la réalisation M . On note θ_E et on appelle diviseur thêta de E , le diviseur $\det(u)$. On a donc $L \in \text{Supp}(\theta_E)$ si et seulement si $h^0(E \otimes L) \neq 0$. Par exemple, si E est inversible de degré $g - 1$, θ_E est un diviseur thêta classique sur la jacobienne J .

Étant donnés des entiers r et d , $r > 0$, on peut trouver un k -schéma $S_{r,d}$, lisse de type fini, connexe et un fibré relatif \mathcal{E} sur $X \times S_{r,d}$ ayant la propriété suivante : pour tout fibré semi-stable E sur X , de rang r , de degré d , il existe $s \in S_{r,d}$ tel que E soit isomorphe à la fibre $\mathcal{E}(s)$ de \mathcal{E} au-dessus de s ([10] prop. 6.2 (4)); la variété de module $M_{r,d}$ des fibrés semi-stables de rang r , de degré d , est un certain quotient de $S_{r,d}$ (*loc. cit.*).

PROPOSITION 1.8.1. — (1) *L'ensemble des points s de $S_{r,d}$ tels que la fibre $\mathcal{E}(s)$ de \mathcal{E} au-dessus de s vérifie (\star) est un ouvert non vide $S'_{r,d}$ de $S_{r,d}$.*

(2) *Si E est un fibré semi-stable de rang r , de pente $g - 1$, qui vérifie (\star) , alors θ_E est algébriquement équivalent à $r\theta$ (où θ est un diviseur thêta classique de X , défini à une translation près sur J).*

Démonstration. — Il est clair que la propriété (\star) est ouverte, donc $S'_{r,d}$ est ouvert. Pour montrer que $S'_{r,d}$ est non vide, on peut supposer $g \geq 2$ (1.7.3) et se borner à $d \geq r(g - 1)$ (1.4). Étudions d'abord le cas $d = r(g - 1)$. Parmi les fibrés semi-stables de pente $g - 1$, de rang r on trouve les sommes directes de r faisceaux inversibles de degré $(g - 1)$. Ceux-ci possèdent évidemment un diviseur thêta algébriquement équivalent à $r\theta$. On en déduit d'abord $S'_{r,r(g-1)} \neq \emptyset$, puis, comme $S_{r,r(g-1)}$ est lisse et connexe, $S'_{r,r(g-1)}$ est connexe, d'où (2). Pour montrer que $S'_{r,d} \neq \emptyset$ on peut invoquer [2]; on peut également se borner à $d \geq r(g - 1)$ et procéder par récurrence croissante sur d en remarquant (par déformation) qu'une augmentation élémentaire (1.7) d'un fibré stable général est semi-stable.

2. Cas des fibrés semi-stables de rang 3 sur une courbe X générale de genre g

2.1. Soit M_g une variété de modules pour les courbes lisses de genre g définies sur k . Dans ce numéro, nous montrons qu'il existe un ouvert non vide U de M_g , tel que, si $X \in U$, les fibrés vectoriels semi-stables sur X , de rang ≤ 3 ,

vérifient (\star) . D'après 1.7.2 et l'existence de la variété $S_{r,d}$ (1.8), il suffit de considérer le cas où X est la courbe générique de M_g . Celle-ci se spécialise en une courbe rationnelle ayant g points doubles ordinaires. Commençons par étendre la notion de stabilité aux courbes singulières.

Soit Y une courbe algébrique propre, géométriquement intègre, définie sur un corps et de genre géométrique g et soit E un \mathcal{O}_Y -module cohérent de rang $r = r(E)$. On dit que E est un faisceau stable (resp. semi-stable) si E est sans torsion et si pour tout sous-faisceau cohérent F de E , $F \neq 0$, $F \neq E$, de rang $r(F)$, on a $\chi(F)/r(F) < \chi(E)/r(E)$ (resp. $\chi(F)/r(F) \leq \chi(E)/r(E)$). Cette définition coïncide avec celle de l'introduction lorsque Y est lisse et la propriété (\star) garde un sens pour les faisceaux sur une courbe singulière.

Soient maintenant S un schéma et $\mathcal{X} \rightarrow S$ une courbe relative sur S , projective, à fibres géométriques intègres. Un faisceau de présentation finie \mathcal{E} sur \mathcal{X} est stable (resp. semi-stable) si \mathcal{E} est plat sur S et si pour tout $s \in S$, la fibre $\mathcal{E}(s)$ de \mathcal{E} au-dessus de s est stable (resp. semi-stable). On peut étendre à cette situation la construction de SESHADRI et NARASIMHAN [7] pour obtenir un schéma de module $M_{r,\chi}^s$ relatif aux faisceaux stables sur \mathcal{X} de rang r , de caractéristique d'Euler-Poincaré χ , et utiliser les faisceaux semi-stables, pour réaliser $M_{r,\chi}^s$ comme ouvert d'une variété projective sur S , $M_{r,\chi}^{s,s}$.

2.2. Appliquons cette construction au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète R complet, de point générique t , de point fermé s et où \mathcal{X} a pour fibre générique \mathcal{X}_t une courbe lisse de genre g et pour fibre spéciale \mathcal{X}_s une courbe rationnelle ayant g points doubles ordinaires. Soit \bar{t} un point géométrique au-dessus de t et $E_{\bar{t}}$ un fibré stable sur $\mathcal{X}_{\bar{t}}$. Quitte à remplacer R par son normalisé dans une extension finie, on peut supposer que $E_{\bar{t}}$ provient d'un fibré E_t sur \mathcal{X}_t et que celui-ci se prolonge en un faisceau \mathcal{E} sur \mathcal{X} , semi-stable (critère valuatif de propriété appliqué à $M_{r,\chi}^{ss}$). Si $\mathcal{E}(s)$ vérifie (\star) , il en est de même de $\mathcal{E}(t) = E_t$, la propriété (\star) étant ouverte. Il nous suffit donc de montrer que la propriété (\star) est vraie pour les faisceaux semi-stables de rang 3 sur $\mathcal{X}(s)$.

2.3. Dans la suite de ce numéro, X désigne une courbe rationnelle définie sur k , ayant pour seules singularités g points doubles ordinaires x_1, \dots, x_g de sorte que X a pour genre arithmétique g . Soit $\pi: P \rightarrow X$ une normalisation de X , de sorte que P est la droite projective. On note a_i et b_i les points de P au-dessus de x_i ; X est donc déduite de P par identification de a_i et b_i en x_i pour $i = 1, \dots, g$.

Soit E un faisceau cohérent sans torsion sur X de rang r . Alors E contient un plus grand sous-faisceau de la forme $\pi_*(E'')$ et est contenu dans un plus petit faisceau $\pi_*(E')$, où E' et E'' sont des fibrés vectoriels de rang r sur P . Le faisceau quotient (E'/E'') est concentré aux points a_i, b_i pour $i=1, \dots, g$ et plus précisément $(E'/E'')_{\mathcal{O}_{P, a_i}}$ est annulé par l'idéal maximal de \mathcal{O}_{P, a_i} donc est un k -vectoriel V_i , quotient de la fibre $E' \otimes k(a_i)$ de E' en a_i . De même $(E'/E'')_{\mathcal{O}_{P, b_i}}$ est un k -vectoriel W_i , quotient de $E' \otimes k(b_i)$. Enfin les applications canoniques :

$$\begin{array}{ccc} E/\pi_*(E'') \otimes k(x_i) & \xrightarrow{u_i} & V_i \\ \downarrow u_{b_i} & & \\ W_i & & \end{array}$$

sont des isomorphismes, d'où un isomorphisme de k -vectoriels :

$$u_i = u_{b_i} u_{a_i}^{-1} : V_i \xrightarrow{\sim} W_i.$$

Réciproquement, partant d'une « donnée de descente », formée d'un fibré vectoriel E' sur P et pour tout $i=1, \dots, g$, d'un k -vectoriel V_i quotient de $E' \otimes k(a_i)$, d'un k -vectoriel W_i quotient de $E' \otimes k(b_i)$ et d'un isomorphisme $u_i : V_i \xrightarrow{\sim} W_i$, on retrouve le faisceau E sur X , comme noyau de la double flèche :

$$\begin{array}{ccc} & & \oplus_i V_i \\ & \nearrow & \downarrow \oplus u_i \\ \pi_*(E') & & \oplus_i W_i \end{array}$$

Exemples. 2.2.1. — On a $E = \pi_*(E')$ si et seulement si $V_i = 0$ pour tout i ; E est un \mathcal{O}_X -Module localement libre de rang r , si et seulement si, V_i est un k -vectoriel de dimension r pour tout i .

2.2.2. La composante neutre du foncteur de Picard de X sur k , $\text{Pic}_{X/k}^0$, est un tore $T \simeq G_m^g$. Plus précisément, prenons $E' = \mathcal{O}_P$, V_i et W_i de dimension 1, donc canoniquement isomorphes à k et pour u_i l'homothétie de rapport $\lambda_i \in k^*$. Le faisceau E correspondant est un faisceau inversible sur X de degré 0, noté $L_{\underline{\lambda}}$ où $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_g) \in (k^*)^g$ et l'application $\underline{\lambda} \mapsto L_{\underline{\lambda}}$ donne un isomorphisme du groupe $G_m(k)^g$ avec le groupe $\text{Pic}^0(X)$ des classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur X , de degré 0.

2.2.3. Soit E un faisceau sans torsion sur X associé à la donnée de descente $(E', V_i \xrightarrow{u_i} W_i)$. Alors le faisceau $E \otimes L_{\lambda}$ est associé à la donnée de descente $(E', V_i \xrightarrow{\lambda_i u_i} W_i)$.

2.2.4. Notons $\mathcal{O}_P(1)$ le faisceau inversible canonique sur P de degré 1 et $\mathcal{O}_P(n)$ sa puissance n -ième. Soit r un entier > 0 et considérons le faisceau E sur X associé à la donnée de descente $(E', u_i : V_i \xrightarrow{\sim} W_i)$ avec $E' = \mathcal{O}_P(g-1)^r$ et V_i de dimension r pour tout i . Alors E est un fibré vectoriel sur X , de rang r et $\chi(E) = \chi(E') - gr = 0$. Montrons que E vérifie (\star) en calculant le diviseur thêta de E sur $T = G_m^g$. Notons que l'application canonique $H^0(\mathcal{O}_P(g-1)) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^g \mathcal{O}_P(g-1) \otimes k(a_i)$ est bijective. Par suite les applications canoniques :

$$\alpha : H^0(E') \rightarrow \bigoplus_{i=1}^g V_i \quad \text{et} \quad \beta : H^0(E') \rightarrow \bigoplus_{i=1}^g W_i,$$

sont bijectives. Par ailleurs, avec les notations de 2.2.2, $H^0(E \otimes L_{\lambda})$ est le noyau de la double flèche :

$$\begin{array}{ccc} & & \bigoplus_i V_i \\ & \nearrow \alpha & \downarrow \bigoplus_i \lambda_i u_i \\ H^0(P, E') & & \bigoplus_i W_i \\ & \searrow \beta & \end{array}$$

Autrement dit, posant $\underline{\lambda} u = \bigoplus_{i=1}^g \lambda_i u_i$ on a :

$$H^0(X, E \otimes L_{\lambda}) = \text{Ker}(\beta - (\underline{\lambda} u) \circ \alpha).$$

Considérons l'application linéaire $\beta - (\underline{\lambda} u) \circ \alpha$, pour $\underline{\lambda} \in k^g$. Pour $\underline{\lambda} = (0, \dots, 0)$, on trouve β qui est bijectif, donc $\beta - (\underline{\lambda} u)$ est bijectif pour $\underline{\lambda}$ dans un ouvert non vide de G_a^k , donc aussi de G_m^k . Il en résulte que E vérifie (\star) et plus précisément le diviseur thêta de E a pour équation sur G_m^g : $\det(\beta - (\underline{\lambda} u) \circ \alpha) = 0$.

Remarque. 2.2.4.1. — La courbe singulière X possède un revêtement universel $p : \tilde{X} \rightarrow X$, avec p étale, localement trivial pour la topologie de Zariski; le groupe de Galois G de ce revêtement est un groupe libre à g générateurs (cf. [6]). Soit V un k -vectoriel de rang r et ρ une représentation de G dans V . Il lui correspond de la manière habituelle un fibré vectoriel E_{ρ} .

sur X , de rang r , de degré 0. Signalons que les fibrés E que l'on vient d'étudier sont ceux de la forme $E_p \otimes N$, où N est un faisceau inversible sur X de degré $(g-1)$. Comme E vérifie (\star) , E est semi-stable et par suite E_p est donc aussi semi-stable.

2.3. L'application $(E, L_\lambda) \mapsto E \otimes L_\lambda$ définit, par passage au quotient, une action de $T = G_m^g$ sur le schéma de modules $M_{r,\chi}^{ss}$ associé aux faisceaux semi-stables sur X , de rang r , de caractéristique d'Euler-Poincaré χ (2.1). Soit Σ une orbite de T dans $M_{r,\chi}^{ss}$ et $\bar{\Sigma}$ son adhérence. Comme T est affine et $M_{r,\chi}^{ss}$ projectif, $\bar{\Sigma}$ contient des points fixes sous T .

DÉFINITION 2.3.1. — *Un faisceau E sans torsion sur X est fixe sous T si $\forall L_\lambda \in T$ on a $E \otimes L_\lambda \simeq E$.*

LEMME 2.3.2. — *Pour vérifier que tout faisceau semi-stable sur X , de rang ≤ 3 , vérifie (\star) , il suffit de montrer que tout faisceau stable sur X , de rang ≤ 3 , tel que $\chi(E) = 0$ et qui est fixe par T , vérifie (\star) .*

Démonstration. — La réduction aux faisceaux stables tels que $\chi(E) = 0$ se fait comme dans le cas des courbes lisses (1.7.2). Soit donc E stable de rang ≤ 3 , tel que $\chi(E) = 0$. Soient Σ son orbite dans $M_{r,0}^s$ et $\bar{\Sigma}$ l'adhérence de Σ dans $M_{r,0}^{ss}$. Si $\bar{\Sigma} \subset M_{r,0}^s$ il existe un faisceau stable \bar{E} , fixe par T , dans l'adhérence de Σ . La propriété (\star) étant ouverte, pour voir que les points de Σ vérifient (\star) , il suffit de montrer que \bar{E} vérifie (\star) . Si maintenant $\bar{\Sigma}$ contient des points de $M_{r,0}^{ss} - M_{r,0}^s$, on peut trouver sur $R = k[[T]]$, un faisceau semi-stable \mathcal{E} sur $X \times_k R$, dont la fibre générique \mathcal{E}_i provient d'un point de Σ , et dont la fibre spéciale \mathcal{E}_s est semi-stable, non stable. Par récurrence sur le rang, on peut supposer que \mathcal{E}_s vérifie (\star) , donc aussi \mathcal{E}_i et E .

2.4. Dans ce numéro, on décrit certains faisceaux sur X , fixes par T . Soit E un faisceau sans torsion sur X , simple (i. e. $\mathcal{E}nd(E) = k$), fixe par T . Pour tout $L \in \text{Pic}^0(X)$, on choisit un isomorphisme $\tau_L : E \otimes L \simeq E$. Soit x_0 un point lisse de X . On représente chaque élément de $\text{Pic}(X)$ par un faisceau inversible L muni d'une trivialisations en x_0 . Si L et L' sont des éléments de $\text{Pic}^0(X)$, on dispose de deux isomorphismes : $\tau_{L \otimes L'}$ et $\tau_{L'} \circ (\tau_L \otimes \text{id}_{L'})$ entre $E \otimes L \otimes L'$ et E . Montrons d'abord que l'on peut choisir les τ_L de façon à satisfaire la condition de cocycle $\tau_{L \otimes L'} = \tau_{L'} (\tau_L \otimes \text{id}_{L'})$. Considérons sur $X \times T$ le faisceau inversible de Poincaré \mathcal{L} rigidifié par des trivialisations le long de $X \times \{0\}$ et $\{x_0\} \times T$. Notons $p_1 : X \times T \rightarrow X$ et $p_2 : X \times T \rightarrow T$ les 2 projections. Soient $E_1 = p_1^*(E)$, $E'_1 = E_1 \otimes_{\mathcal{O}_{X \times T}} \mathcal{L}$. Considérons le faisceau $\mathcal{E}nd(E_1, E'_1)$. L'hypothèse que E est fixe par T signifie que toutes les fibres fermées de E'_1

sont isomorphes, donc il en est de même des fibres de $\mathcal{E}nd(E_1, E'_1)$. Il en résulte que $(p_2)_* \mathcal{E}nd(E_1, E'_1)$ est localement libre et commute aux passages aux fibres. Comme E est simple et fixe, $(p_2)_* \mathcal{E}nd(E_1, E'_1)$ est un faisceau inversible N . Mais $T = G_m^g$, donc N est le faisceau trivial. Le choix d'une trivialisations de N , revient à faire un choix des isomorphismes τ_L qui dépend algébriquement de L . On ajuste s de façon que $\tau_{\theta_X} = \text{id}$. Alors, comme toute fonction inversible sur $T \times T$ qui vaut 1 sur $T \times \{0\}$ et $\{0\} \times T$ est égale à 1, τ_L satisfait à la condition de cocycle.

Rappelons (2.2.2) que le choix des paires ordonnées (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, g$ détermine un isomorphisme $G_m^g \simeq T$ qui, à $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_g)$ associe $L_{\underline{\lambda}}$. On note Γ le groupe des caractères de G_m^g , γ_i le caractère $\underline{\lambda} \mapsto \lambda_i$.

Partons d'un faisceau sans torsion E sur X , défini par la donnée de descente $(E', u_i : V_i \rightarrow W_i)$ et muni d'isomorphismes $\tau_{\underline{\lambda}} : E \otimes L_{\underline{\lambda}} \simeq E$ satisfaisant à la condition de cocycle. On a $E' = \pi^*(E)/\text{torsion}$ et d'autre part un isomorphisme canonique $\pi^*(L_{\underline{\lambda}}) \simeq \mathcal{O}_P$ qui respecte les trivialisations en x_0 .

On déduit alors de $\tau_{\underline{\lambda}}$ un automorphisme $\tau'_{\underline{\lambda}} : E' \simeq E' \otimes^* (L_{\underline{\lambda}})^{\pi^*(\tau_i)} \longrightarrow E'$. La condition de cocycle vérifiée par $\tau_{\underline{\lambda}}$ entraîne que l'application $\underline{\lambda} \mapsto \tau'_{\underline{\lambda}}$ définit une action de G_m^g sur E' . Cette action équivaut à une décomposition de E' en somme directe $E' = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} E'_{\gamma}$ telle que, pour tout $\underline{\lambda} \in G_m^g$, $\underline{\lambda}$ agit sur E'_{γ} par l'homothétie $\gamma(\underline{\lambda})$.

Le faisceau $E \otimes L_{\underline{\lambda}}$ est associé à la donnée de descente $(E', \lambda_i u_i : V_i \rightarrow W_i)$. Le fait que l'automorphisme $\tau'_{\underline{\lambda}}$ provienne de l'isomorphisme $\tau_{\underline{\lambda}}$ entraîne que sur les fibres de E' en a_i (resp. b_i), $\tau'_{\underline{\lambda}}$ respecte les quotients V_i (resp. W_i) et définit, par passage au quotient des isomorphismes $\tau_{\underline{\lambda}, i}^v : V_i \simeq V_i$ et $\tau_{\underline{\lambda}, i}^w : W_i \simeq W_i$ qui rendent commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\tau_{\underline{\lambda}, i}^v} & V_i \\ \lambda_i u_i \downarrow & & \downarrow u_i \\ W_i & \xrightarrow{\tau_{\underline{\lambda}, i}^w} & W_i \end{array}$$

Le fait que l'action de G_m^g sur E' respecte les quotients V_i et W_i , donne des décompositions $V_i = \bigoplus_{\gamma} V_{i, \gamma}$ et $W_i = \bigoplus_{\gamma} W_{i, \gamma}$ quotients de celle de E , et la commutativité du diagramme ci-dessus exprime que pour tout $i = 1, \dots, g$ et tout γ , u_i induit une bijection de $V_{i, \gamma}$ sur $W_{i, \gamma \gamma_i^{-1}}$.

Pour mieux visualiser les relations d'identification données par les u_i , on peut associer à E un graphe Λ_E de la façon suivante :

- les sommets de Λ_E sont les γ tels que $E_\gamma \neq 0$;
- 2 sommets γ et γ' sont liés par une arête si l'on est dans l'un des deux cas suivants :

(a) $\exists i \in [1, g]$ tel que $\gamma' = \gamma \gamma_i^{-1}$, $V_{i, \gamma}$ et $W_{i, \gamma'} \neq 0$;

(b) $\exists j \in [1, g]$ tel que $\gamma = \gamma' \gamma_j^{-1}$, $V_{j, \gamma'}$ et $W_{j, \gamma} \neq 0$.

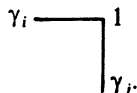
Notons que, les sommets γ et γ' étant donnés, il existe au plus un indice i (resp. j) satisfaisant aux conditions énoncées dans (a) (resp. b) et les conditions (a) et (b) ne sont pas simultanément réalisées. Enfin, notons que modifier l'action de G_m^g par un caractère ne change pas E , mais revient à faire une translation (dans Γ) sur les sommets de Λ_E ; en particulier, on peut toujours supposer que le caractère unité est l'un des sommets.

2.5. Soit E un faisceau semi-stable sur X de rang 3 et montrons que E vérifie (\star) . D'après 2.3.2, on peut se limiter au cas où E est stable, fixe par T et tel que $\chi(E) = 0$. Soit $(E', u_i : V_i \rightarrow W_i)$ une donnée de descente associée à E . Comme E est stable, donc simple, et est fixe par T , les considérations de 2.4 s'appliquent. On trouve une action de T sur E' , donnant des décompositions $E' = \bigoplus E'_\gamma$, $V_i = \bigoplus V_{i, \gamma}$, $W_i = \bigoplus W_{i, \gamma}$ telles que u_i induise un isomorphisme de $V_{i, \gamma}$ sur $W_{i, \gamma \gamma_i^{-1}}$:

(a) si $V_i = 0, \forall i$, alors $E = \pi_\star(E')$, $\chi(E) = \chi(E')$, E' est stable sur P , donc de rang 1 et vérifie (\star) ;

(b) si un seul des V_i est non nul, notons X_i la courbe intermédiaire entre X et P obtenue en identifiant a_i et b_i . Alors E est l'image directe d'un faisceau E_i sur X_i . On a $\chi(E) = \chi(E_i) = 0$ et E_i est stable sur X_i . Si E_i (donc E) n'a pas de sections non nulles, E vérifie (\star) . Si E_i possède une section non nulle, E_i contient un sous-faisceau F_i de rang 1, de degré ≥ 0 . Comme X_i est de genre 1, on a $\chi(F_i) \geq 0$. Mais E_i est stable, donc $E_i = F_i = \mathcal{O}_{X_i}$ et il est clair que \mathcal{O}_{X_i} vérifie (\star) ;

(c) reste le cas où il existe i et $j, i \neq j$, tels que V_i et $V_j \neq 0$. Alors le graphe Λ_E associé à E a au moins trois sommets, donc E est de rang 3 et chaque $E_\gamma \neq 0$ est de rang 1. Comme E est stable, Λ_E est connexe. Après translation et réindexation éventuelle des points a_i, b_i, a_j, b_j , on voit que l'on peut se ramener au cas où Λ_E est du type :



Soient $E'_{\gamma_i} = \mathcal{O}_P(d_i)$, $E'_{\gamma_j} = \mathcal{O}_P(d_j)$, $E_1 = \mathcal{O}_P(d)$. On a $\chi(E) = \chi(E') - 2 = d + d_i + d_j + 1$. Donc $d + d_i + d_j = -1$. Par ailleurs $E \subset E_i = \pi_*(E'(-a_i))$ et $\chi(E_i) = d_i$, donc $d_i < 0$ et de même $d_j < 0$. Enfin $E \subset E_1 = \pi_*(E'_1(-b_i - b_j))$ et $\chi(E_1) = d - 1$, d'où $d \leq 0$. On trouve $d + d_i + d_j \leq -2$, d'où une contradiction. Ceci achève de prouver que les faisceaux semi-stables sur X , de rang 3, vérifient (\star) .

2.6. Il existe sur X un faisceau stable E , fixe par T , de rang 4, tel que $\chi(E) = 0$ et qui ne vérifie pas (\star) . Il a pour diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & \gamma_i & 1 \\ & \square & \\ \gamma_i \gamma_j & & \gamma_j \end{array}$$

et chacun des $E'_{\gamma} \neq 0$ est égal à \mathcal{O}_P . On a bien $\chi(E) = 0$ et par ailleurs la section $(1, 1, 1, 1)$ de E' est une section globale de E . Comme E est fixe, on a $h^0(E \otimes L_{\lambda}) = h^0(E) \neq 0$. Donc E ne vérifie pas (\star) . Reste à voir que E est stable. Il suffit de montrer que E est semi-stable, car on vient de voir que les faisceaux semi-stables de rang ≤ 3 vérifient (\star) et on applique (1.3). Si E n'était pas semi-stable, le premier cran de la filtration de Harder de E (1.5) serait un sous-faisceau semi-stable E_1 de E , tel que $\chi(E_1) > 0$. L'isomorphisme $\tau_{\lambda} : E \otimes L_{\lambda} \rightarrow E$ induirait un isomorphisme $E_1 \otimes L_{\lambda} \xrightarrow{\sim} E_1$ de sorte que le fibré vectoriel \bar{E}_1 sur P associé à E_1 serait un sous-fibré d'un facteur direct strict de la décomposition $E' = \bigoplus_{\gamma} E'_{\gamma}$, donc ne contiendrait pas $(1, 1, 1, 1)$. On aurait alors $h^0(E_1) = 0$ en contradiction avec $\chi(E_1) > 0$.

3. Exemples de fibrés stables qui ne vérifient pas (\star)

On reprend les notations de l'introduction, en particulier X est une courbe lisse de genre g , de jacobienne J . On identifie canoniquement J à la variété abélienne duale grâce à la polarisation principale provenant du diviseur thêta associé à X . On note \mathcal{L} le faisceau inversible de Poincaré sur $J \times J$ trivialisé sur $J \times \{0\}$ et $\{0\} \times J$, p_1 et $p_2 : J \times J \rightarrow J$ la première et deuxième projection.

3.1. Dans [5] MUKAI a défini une « transformée de Fourier » $F : D(J) \rightarrow D(J)$, où $D(J)$ est la catégorie dérivée associée aux faisceaux cohérents sur J :

$$M \mapsto F(M) = R p_{2*} [(p_1^*)(M) \otimes^L \mathcal{L}].$$

Cette transformation F satisfait à $F \circ F = (-1_J)^*[-g]$, où $[-g]$ désigne la translation de g degrés vers la droite dans $D(J)$.

Soit $N = \mathcal{O}_J(D)$ un faisceau ample sur J . Alors $H^i(N) = 0$ pour $i \neq 0$ et $h^0(N) = l$, avec $l = \chi(N) = D^g/g$. Notons $\Phi_N : J \rightarrow J$ l'isogénie qui à $x \in J$ associe $T_x^*(N) \otimes N^{-1} \in \text{Pic}^0(J) = J$, où T_x est la translation par x dans J . Alors Φ_N est de degré l^2 . MUKAI a établi les points suivants ([5], prop. 3.11) :

- (a) $F(N^{-1})[g]$ est un fibré vectoriel M sur J , de rang l ;
- (b) $F(M) = (-1_J)^*(N^{-1})$;
- (c) $\Phi_N^*(M) \simeq N^{\oplus l}$.

Soit U un ouvert non vide de J au-dessus duquel $(-1_J)^*(N)$ est trivial. Alors d'après (b), il existe une section s non nulle de $p_1^*(M) \otimes \mathcal{L} | p_2^{-1}(U)$. Soit $x_0 \in J$, tel que la restriction de s à $\{x_0\} \times U$ soit non nulle. Supposons $g \geq 1$ et considérons un plongement de X dans J passant par x_0 . Soit E la restriction de M à X ; c'est un fibré vectoriel sur X de rang l . Par construction, l'image de s dans $(p_1^*(M) \otimes \mathcal{L})|X \times U$ est non nulle, de sorte que $h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) \neq 0$.

Étudions la pente λ de E . Notons Y la courbe (non nécessairement réduite) image réciproque de X par Φ_N . D'après (c) on a $\Phi_N^*(E) | Y \simeq (N | Y)^{\oplus l}$. On en déduit d'abord que E est semi-stable, puis que $\lambda l^2 = \deg(N | Y)$.

Soit n un entier > 0 et prenons pour faisceau ample $N \equiv \mathcal{O}_J(n\Theta)$ où Θ est un diviseur thêta de la courbe X . On a $\Theta^g/g! = 1$, $l = n^g$, Φ_N est la multiplication par n dans J et $\Theta \cdot X = g$, donc $\deg(N) | X = ng$. Enfin $\Phi_N^*(N) \equiv N^{n^2}$. D'où :

$$n^2 \deg(N | Y) = \deg \Phi_N^*(N) | Y = l^2 \deg(N | X) = l^2 ng$$

et finalement $\lambda = \deg(N | Y) / l^2 = l^2 ng / l^2 n^2 = g/n$.

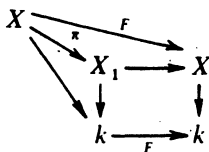
En résumé E est un fibré semi-stable sur X , de rang n^g , de pente g/n , tel que $h^0(E \otimes L_{\text{gen}}) > 0$. Alors pour $g \geq 2$ et $n \geq 2$, on a $g/n \leq g-1$ et par suite E met la propriété (\star) en défaut. D'après (1.4), il existe aussi un fibré stable de pente g/n qui ne vérifie pas (\star) . Quand $n \rightarrow +\infty$, on trouve des fibrés stables de pente > 0 , arbitrairement petite, qui ne vérifient pas (\star) .

Remarques. 3.2. — Soit $r(X)$ le plus grand entier tel que les fibrés semi-stables sur X , de pente $\leq r(X)$ vérifient (\star) . Pour $g \leq 1$, on a $r(X) = +\infty$ (1.7.3). Supposons $g \geq 2$. On a $r(X) \geq 2$ (1.6.2) et $r(X) \geq 3$ pour X générale de genre $g(2)$. Vu ce qui précède on a $r(X) < 2^g$ et pour $g=2$, $r(X)=3$ (1.7.4). Que peut-on dire de $r(X)$ pour $g \geq 3$? Étant donné E fibré vectoriel stable sur X , de pente $g-1$, peut-on trouver un revêtement fini étale $Y \xrightarrow{f} X$, tel que $f^*(E)$ possède un diviseur thêta?

4. Le faisceau des différentielles localement exactes en caractéristique $p > 0$.

Dans ce paragraphe, le corps k est supposé de caractéristique $p > 0$.

4.1. Considérons le diagramme commutatif :



dans lequel les flèches F désignent des Frobenius et le carré de droite est cartésien. Comme k est parfait, la projection $X_1 \rightarrow X$ est un isomorphisme au-dessus de $F : k \rightarrow k$. Le k -morphisme $\pi : X \rightarrow X_1$ est le Frobenius relatif. Comme X est une courbe lisse de genre g , X_1 est aussi une courbe lisse de genre g et π est radiciel de degré p .

La différentielle $d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1$ est \mathcal{O}_{X_1} -linéaire. Le noyau de $\pi_*(d)$ est \mathcal{O}_{X_1} , son image B est le \mathcal{O}_{X_1} -module des différentielles localement exactes. On a la suite exacte :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_1} \rightarrow \pi_*(\mathcal{O}_X) \rightarrow B \rightarrow 0.$$

Comme $B \subset \pi_*(\Omega_X^1)$, B est un fibré vectoriel sur X_1 et il est de rang $(p-1)$. Le conoyau de $\pi_*(d)$ s'insère dans la suite exacte :

$$(2) \quad 0 \rightarrow B \rightarrow \pi_*(\Omega_X^1) \xrightarrow{c} \Omega_{X_1}^1 \rightarrow 0.$$

où c est l'opération de Cartier.

L'application $(f, g) \mapsto c(fdg)$ de $\pi_*(\mathcal{O}_X) \times \pi_*(\mathcal{O}_X) \rightarrow \Omega_{X_1}^1$, définit, par passage au quotient, une application bilinéaire antisymétrique :

$$B \times B \rightarrow \Omega_{X_1}^1.$$

Un calcul local montre que cet accouplement définit un isomorphisme canonique $B \simeq \check{B} \otimes \Omega_{X_1}^1$, autrement dit, B est autodual pour la dualité de Serre. En particulier, pour $p=2$, le faisceau inversible B est une racine carrée canonique de $\Omega_{X_1}^1$.

Comme X et X_1 ont même genre g , on a $\chi(B)=0$, donc B est de pente $g-1$.

THÉORÈME 4.1.1. — *Le fibré B possède un diviseur thêta θ_B (1.8), en particulier, B est semi-stable.*

Remarques. 4.1.2. — (1) Pour $p=2$, B est inversible et le théorème est clair. Le théorème est clair également si X est ordinaire, car alors $H^0(X_1, B)=0$ (cf. 4.3).

(2) Considérons le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X \times_{X_1} X & \xrightarrow{p_2} & X \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\pi} & X_1. \end{array}$$

L'image réciproque par π de la suite exacte (1) donne la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow (p_1)_*(\mathcal{O}_{X \times_{X_1} X}) \rightarrow \pi^*(B) \rightarrow 0.$$

Mais $X \times_{X_1} X$ est le voisinage infinitésimal d'ordre $p-1$ de la diagonale de $X \times X$ et $\pi^*(B)$ est l'idéal d'augmentation définissant la diagonale X . Par suite, $\pi^*(B)$ admet une filtration canonique par des sous-fibrés sur X :

$$0 = B_p \subset B_{p-1} \subset \dots \subset B_1 = \pi^*(B),$$

telle que $B_i/B_{i+1} \simeq (\Omega_X^1)^{\otimes i}$.

En particulier, pour $p > 2$ et $g \geq 2$, $\pi^*(B)$ n'est plus semi-stable. Pour d'autres exemples de fibrés semi-stables qui ne restent pas semi-stables par image inverse par π (voir [3]).

4.2. Dans ce numéro nous démontrons 4.1.1

Soient J et J_1 les jacobiniennes de X et X_1 . On a deux k -isogénies de degré p^g entre J et J_1 ; le Verschiebung $V: J_1 \rightarrow J$ et le Frobenius $F: J \rightarrow J_1$. La première correspond, sur les faisceaux inversibles, à l'image réciproque par $\pi: L_1 \mapsto \pi^*(L_1)$, la seconde à la norme: $L \mapsto \text{Norme}_{X/X_1}(L)$. Soit $L_1 \in \text{Pic}^0(X_1) = J_1$. Par tensorisation de (1) avec L_1 , on obtient la suite exacte :

$$(3) \quad 0 \rightarrow L_1 \rightarrow \pi_*(\pi^*(L_1)) \rightarrow B \otimes L_1 \rightarrow 0.$$

Nous devons montrer que pour L_1 général sur J_1 , $h^0(B \otimes L_1) = 0$. Nous allons étudier la situation universelle sur J_1 , au voisinage de 0. Notons \mathcal{L} (resp. \mathcal{L}_1) le faisceau de Poincaré sur $X \times J$ (resp. $X_1 \times J_1$) et considérons le

diagramme commutatif suivant, dans lequel, f, g et f_1 désignent les deuxièmes projections :

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times J & \xleftarrow{1_X \times V} & X \times J_1 & \xrightarrow{\pi \times 1_{J_1}} & X_1 \times J_1 \\
 \downarrow f & & \downarrow g & \nearrow f_1 & \\
 J & \xleftarrow{v} & J_1 & &
 \end{array}$$

Par définition de $V : J_1 \rightarrow J$, le faisceau $(\pi \times 1_{J_1})^* \mathcal{L}_1$ est isomorphe à $(1_X \times V)^* (\mathcal{L})$, de sorte que l'analogue universel de (3) sur $X_1 \times J_1$ est la suite exacte courte :

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow (\pi \times 1_{J_1})_* ((1_X \times V)^* \mathcal{L}) \rightarrow B \otimes \mathcal{L}_1 \rightarrow 0.$$

On a

$$(Rf_1)_* (\pi \times 1_{J_1})_* (1_X \times V)^* (\mathcal{L}) = (Rg)_* (1_X \times V)^* (\mathcal{L}) = V^* (Rf_*(\mathcal{L})),$$

de sorte que si on applique $(Rf_1)_*$ à la suite exacte (3), on obtient un triangle distingué dans la catégorie dérivée $D(J_1)$ des faisceaux sur J_1 :

$$(4) \quad \begin{array}{ccc}
 & (Rf_1)_* (B \otimes \mathcal{L}_1) & \\
 +1 \swarrow & & \searrow \\
 (Rf_1)_* (\mathcal{L}_1) & \xrightarrow{a} & V^* (Rf_*(\mathcal{L})).
 \end{array}$$

LEMME 4.2.1. — *Au voisinage de l'origine de J , $(Rf_*)(\mathcal{L})$ est représentable par la résolution minimale :*

$$(5) \quad \mathcal{O}_{J,0} \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{J,0}^q,$$

où $u(1) = (x_1, \dots, x_g)$ est un système de coordonnées de J en 0.

En effet, représentons $(Rf_*)(\mathcal{L})$, au voisinage de 0, par une résolution minimale $u : L^0 \rightarrow L^1$. Donc L^i est un $\mathcal{O}_{J,0}$ -module libre de rang $h^i(\mathcal{O}_x)$. On obtient un complexe $u : \mathcal{O}_{J,0} \rightarrow \mathcal{O}_{J,0}^q$. Dire que $u(1)$ est un système de coordonnées de J en 0, équivaut, par dualité, à dire que l'image I de $\tilde{u} : \mathcal{O}_{J,0}^q \rightarrow \mathcal{O}_{J,0}$ est l'idéal maximal m de $\mathcal{O}_{J,0}$. Or l'idéal I définit le plus grand sous-schéma fermé S de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{J,0})$ au-dessus duquel \mathcal{L} est trivial donc $I = m$.

Notons R l'anneau local $\mathcal{O}_{J,0}$ et explicitons le morphisme $a : (Rf_1)_* (\mathcal{L}_1) \rightarrow V^* (Rf_*(\mathcal{L}))$ de (4) au moyen des résolutions minimales. Compte tenu de 4.2.1, on obtient un diagramme commutatif du type :

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{a_0} & R \\ u' \downarrow & & \downarrow v' \\ R^g & \xrightarrow{a_1} & R^g \end{array}$$

où $u'(1)=(x_1, \dots, x_g)$ est un système de coordonnées de R et $v'(1)=(y_1, \dots, y_g)$ est une suite régulière de R qui fournit des équations de $\text{Ker}(V)$ au voisinage de zéro. De plus, par réduction modulo l'idéal maximal \mathfrak{m} de R , la flèche $a_0 : R \rightarrow R$ devient la bijection canonique $H^0(\mathcal{O}_{X_1}) \simeq H^0(\mathcal{O}_X)$, donc a_0 est un isomorphisme et on peut supposer que a_0 est l'identité. Le lemme suivant m'a été communiqué par Serre :

LEMME 4.2.3. — Soit R un anneau local régulier, de dimension g et considérons un diagramme commutatif de R -modules, à colonnes exactes, du type suivant :

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} R^g & \xrightarrow{h_1} & R^g \\ v \downarrow & & \downarrow u \\ R & \xrightarrow{\text{id}} & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{h} & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

avec M et N de longueur finie.

Alors l'image de $\det(h_1)$ dans N engendre un sous-module isomorphe à M .

En particulier, cette image est nulle si et seulement si $M=0$ et est de longueur 1 (i.e. engendre le socle de N) si et seulement si M est isomorphe au corps résiduel k de R .

Démonstration du lemme. — Rappelons que l'application $M \mapsto M' = \text{Ext}_R^g(M, R)$ induit une dualité entre R -modules de longueur finie. L'application $h : N \rightarrow M$ étant surjective, sa duale $h' : \text{Ext}_R^g(M, R) \rightarrow \text{Ext}_R^g(N, R)$ est injective. Considérons le complexe de Koszul $K^*(u)$ construit sur la forme linéaire $u : R^g \rightarrow R$. C'est une résolution du R -module M ; en effet, si $M=0$, $K^*(u)$ est homotope à zéro, sinon, comme M est de longueur finie, l'image par u de la base canonique de R^g est une suite régulière d'éléments de l'idéal maximal \mathfrak{m} de R . De même $K^*(v)$ est une

résolution de R -module N et $\Lambda^*(h_1)$ est un morphisme de complexes $K^*(v) \rightarrow K^*(u)$ qui relève $h : N \rightarrow M$. En degré g , $\Lambda^g(h_1) : R \rightarrow R$ est la multiplication par $\det(h_1)$. Appliquons le foncteur $\text{Hom}_R(., R)$. Le complexe $K^*(u)$ (resp. $K^*(v)$) étant auto-dual, redonne après dualité, le complexe $K^*(u)$ (resp. $K^*(v)$), de sorte que l'on a des isomorphismes de R -modules :

$$\text{Ext}_R^g(M, R) \simeq M \quad \text{et} \quad \text{Ext}_R^g(N, R) \simeq N.$$

Enfin, l'application injective $h' : M \rightarrow N$, duale de h , se déduit par passage au quotient de la multiplication par $\det(h_1)$ dans R , d'où le lemme.

Ceci étant, appliquons d'abord le lemme 4.2.3 en prenant pour diagramme (7), le diagramme déduit de (6) par application du foncteur $\text{Hom}_R(., R)$. On a $M = \mathcal{O}_{J_1,0}/(x_1, \dots, x_g)\mathcal{O}_{J_1,0} = k$ et $N = \mathcal{O}_{J_1,0}/(y_1, \dots, y_g)\mathcal{O}_{J_1,0}$ est l'anneau local à l'origine de $\text{Ker}(V)$. Enfin $h_1 : R^g \rightarrow R^g$ est le dual de a_1 . D'après 4.2.3, l'image de $\det(h_1) = \det(a_1)$ dans N est non nulle et engendre le socle de N . Il en résulte d'abord que $\det(a_1) \neq 0$ et donc que l'application a de (4) est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert non vide de J_1 . Par suite le troisième sommet $(Rf_1)_*(B \otimes \mathcal{L}_1)$ de (4) est nul sur cet ouvert, donc B vérifie la propriété (\star) . Alors, la longue suite exacte de cohomologie déduite de (4) se réduit à la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow (R^1 f_1)_*(\mathcal{L}_1) \rightarrow V^*(R^1 f_*(\mathcal{L})) \rightarrow (R^1 f_1)_*(B \otimes \mathcal{L}_1) \rightarrow 0$$

et la flèche injective $a_1 : R^g \rightarrow R^g$ de (5) est une résolution de $(R^1 f_1)_*(B \otimes \mathcal{L}_1)$ à l'origine, donc $\det(a_1)$ est une équation du diviseur thêta de B à l'origine. En fait, nous allons voir que l'on peut décrire, *a priori*, la restriction du diviseur thêta de B , à $\text{Ker}(V)$.

RAPPEL ([8] Appendice). — Soient G un k -schéma en groupes fini, commutatif, de bigèbre A , G' son dual de Cartier de bigèbre A' , \langle, \rangle l'accouplement naturel entre A et A' . Considérons les éléments de A comme des fonctions sur G et les éléments de A' comme des formes linéaires sur A , c'est-à-dire des mesures sur G ; le produit dans A' devenant la convolution \star . Il existe un idéal \mathcal{H} de longueur 1 dans A' , formé des mesures de Haar μ sur G (i. e. des mesures invariantes par translation). Ces mesures sont caractérisées par la formule :

$$\mu \star v = \langle 1, v \rangle \mu, \quad \forall v \in A'.$$

On en déduit que \mathcal{H} , sur le composant local de G' à l'origine induit le socle et est 0 sur les autres composants locaux.

Rappelons enfin que les isogénies F et V entre J et J_1 s'échangent par dualité, de sorte que $\text{Ker}(V)$ est canoniquement le dual de Cartier de $\text{Ker}(F)$.

PROPOSITION 4.2.4. — *La restriction du diviseur thêta du faisceau B à $\text{Ker}(V)$ engendre l'idéal des mesures de Haar sur $\text{Ker}(F)$.*

Notons θ_B le diviseur thêta de B . Soient x un point de $\text{Ker}(V)$ et A_x l'anneau local de $\text{Ker}(V)$ en x . On a déjà remarqué que la restriction de θ_B à A_0 engendre le socle de A_0 . Il reste à voir que la restriction de θ_B à A_x , pour $x \neq 0$, est nulle. La méthode est analogue à celle utilisée en 0, simplement on note que $(R^1 f_1)_*(\mathcal{L}_1)$ est libre de rang $g-1$ au voisinage de x et on applique le lemme 4.2.3 dans le cas où $M=0$.

Exemple 4.2.5. — Supposons la courbe X ordinaire de sorte que $\text{Ker}(F)$ est de type multiplicatif et $\text{Ker}(V)$ est étale d'ordre p^g . La proposition 4.2.4 signifie simplement dans ce cas que θ_B contient les points de J_1 d'ordre p mais ne contient pas 0, ce qui est immédiat à vérifier directement.

4.3. APPLICATIONS

Soit A une k -variété abélienne de dimension d . Rappelons que si la partie étale du noyau de l'élévation à la puissance p dans A est d'ordre p^h , h est le p -rang de A . On a $h \leq d$ et on dit que A est ordinaire si $h=d$; cette dernière condition équivaut au fait que le morphisme de Frobenius sur $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ est injectif.

Soit $f: Y \rightarrow X$ un revêtement fini étale, connexe de X . Il lui correspond un morphisme sur les jacobiniennes $J_X \rightarrow J_Y$, à noyau fini. Nous dirons que la variété abélienne quotient $A = J_Y / \text{Im}(J_X)$ est la partie nouvelle de J_Y (relativement à f).

THÉORÈME 4.3.1. — *Pour tout nombre premier l , $l \neq p$ et $l+1 \geq (p-1)g$, il existe un revêtement étale cyclique de degré $l: Y \xrightarrow{f} X$, tel que la partie nouvelle de J_Y soit ordinaire.*

Indiquons d'abord quelques corollaires. On note $\pi_1(X)$ le groupe fondamental de X .

COROLLAIRE 4.3.2. — *Supposons $g \geq 2$, alors les pro- p -groupes de Sylow de $\pi_1(X)$ sont différents du groupe unité.*

En effet, soit $f: Y \rightarrow X$ comme dans 4.3.1. Si g' est le genre de Y , on a $g' - 1 = l(g - 1)$. Comme $J_Y / \text{Im}(J_X)$ est ordinaire, le p -rang de J_Y est au moins

$g' - g = (l-1)(g-1) > 0$, donc \overline{Y} possède un revêtement étale non triviale de degré p , d'où le corollaire.

Remarque. — 4.3.3. En fait, d'après un résultat de ŠAFARÉVIČ ([9], § 3, th. 2), si le p -rang de Y est h , le plus grand pro- p -groupe quotient de $\pi_1(Y)$ est un pro- p -groupe libre à h générateurs.

COROLLAIRE 4.3.4. — *Supposons $g \geq 2$. Alors il existe un entier $m > 0$ et un revêtement fini étale connexe de X , de degré p^m .*

Si le p -rang de J_X n'est pas nul, X admet un revêtement cyclique de degré p . Sinon, soit $f: Y \rightarrow X$ comme dans 4.3.1. Comme $g \geq 2$, le p -rang m de Y n'est pas nul, et il existe un revêtement galoisien $Y' \rightarrow Y$ de groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$. Le revêtement composé $Y' \rightarrow Y \rightarrow X$ est galoisien de groupe H , produit semi-direct de $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ et de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$. Alors le revêtement $Z \rightarrow X$ de X associé à un l -sous-groupe de Sylow de H est de degré p^m .

Démontrons maintenant le théorème 4.3.1.

LEMME 4.3.5 (Serre). — *Soient A une k -variété abélienne de dimension $d \geq 2$, D un diviseur > 0 sur A et C une courbe sur A . Alors, pour tout nombre premier $l, l \neq p$ et $l+1 \geq C.D.$, il existe un sous-groupe cyclique G de A , d'ordre l , tel que $D \wedge G \subset \{0\}$.*

Soit l un nombre premier, $l \neq p$ et notons $l_A: A \rightarrow A$ le morphisme d'élévation à la puissance l -ième. On a $(l_A)^*(D) \equiv l^2 D$ et d'autre part : $(l_A)_*(l_A)^*(D) = (\deg l_A) D = l^{2d} D$. Par suite $(l_A)_*(D) \equiv l^{2d-2}(D)$.

Ceci étant, après translation, on peut supposer que la courbe C contient 0. Si $\alpha(l)$ est le nombre de points de $D \cap \text{Ker}(l_A)$ on a alors :

$$\alpha(l) \leq D \cdot (l_A)^*(C) = (l_A)_*(D) \cdot C = l^{2d-2}(D \cdot C).$$

Par ailleurs, $\text{Ker}(l_A)$ est un espace vectoriel de dimension $2d$ sur le corps premier \mathbb{F}_l et les sous-groupes cycliques d'ordre l sont les droites de cet espace vectoriel; elles sont en nombre $(l^{2d}-1)/(l-1)$. Si donc on a $\alpha(l) < (l^{2d}-1)/(l-1)$, et, *a fortiori*, si $l^{2d-2}(D \cdot C) < (l^{2d}-1)/(l-1)$, il existera une droite de $\text{Ker } l_A$ qui rencontre D , au plus à l'origine. Cette dernière condition est réalisée pour $l+1 > C.D$ et pour $l+1 \geq C.D$ si $d \geq 2$.

Pour établir le théorème 4.3.1, on peut supposer $g \geq 2$. Appliquons le lemme 4.3.5 en prenant pour A la jacobienne J_1 de X_1 , pour D le diviseur θ du faisceau B et $C = X_1$ plongé dans J de la façon habituelle. On a $C.D = (p-1)g$. Donc pour l premier, $l \neq p$ et $l+1 \geq (p-1)g$, on peut trouver

$L \in J_1$, d'ordre l tel que $L^i \in D$ pour $0 < i < l$. Soit $f: Y \rightarrow X$ le revêtement étale cyclique de degré l associé à L . Donc $f_*(\mathcal{O}_Y) = \bigoplus_{0 \leq i < l} L^i$. Si A est la partie nouvelle de J_Y , $H^1(A, \mathcal{O}_A) = \bigoplus_{0 < i < l} H^1(X, L^i)$ et le noyau de Frobenius dans $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ est $\bigoplus_{0 < i < l} H^0(X_1, L^i \otimes B)$ qui est 0, vu le choix de L . Donc A est ordinaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ATIYAH (M. F.). — Vector bundles over an elliptic curve, *Proc. London Math. Soc.*, t. 7, 1957.
- [2] DIGNE (F.). — Sections des fibrés vectoriels sur une courbe, *Bull. Soc. Math. France*, t. 102, 1974.
- [3] GIESECKER (D.). — Stable vector bundles and the Frobenius morphism, Notes I.H.E.S., 1972.
- [4] HARDER (G.) ET NARASIMHAN (M. S.). — On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves, *Math. Annalen*, vol. 212, 1975.
- [5] MUKAI (S.). — Duality between $D(X)$ and $D(\tilde{X})$ with its application to Picard sheaves (à paraître au *Journal de Nagoya*).
- [6] MUMFORD (D.). — An analytic construction of degenerating curves over a complete local rings, *Compositio Math.*, vol. 24, 1972.
- [7] NARASIMHAN (M. S.) et SESHADRI (C. S.). — Holomorphic vector bundles on a compact Riemann surface, *Math. Ann.*, vol. 155, 1964.
- [8] RAYNAUD (M.). — Schémas en groupes de type (p, \dots, p) , *Bull. Soc. Math. France*, t. 102, 1974.
- [9] SAFAREVIC (I.). — On p -Extensions, *A.M.S. translations*, séries 2, vol. 4, 1956.
- [10] SESHADRI (C. S.). — Space of unitary vector bundles on a compact Riemann surface, *Ann. of Maths.*, vol. 85 1967.