

BULLETIN DE LA S. M. F.

LASZLO LEMPert

La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 427-474

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__427_0

© Bulletin de la S. M. F., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA MÉTRIQUE DE KOBAYASHI ET LA REPRÉSENTATION DES DOMAINES SUR LA BOULE

PAR

LÁSZLÓ LEMPERT (*)

RÉSUMÉ. — Étant donné un domaine convexe $D \subset \mathbb{C}^n$, on considère certaines applications extrémales du disque d'unité de \mathbb{C} dans D , liées à la métrique de Kobayashi. Les propriétés de ces applications sont utilisées à l'étude des applications biholomorphes ainsi qu'à la solution d'une équation de Monge-Ampère particulière.

ABSTRACT. — Given a convex domain $D \subset \mathbb{C}^n$, in connection with the Kobayashi metric we consider certain extremal maps of the unit disc of \mathbb{C} into D . These maps are then used to the study of biholomorphic maps and to the solution of a particular Monge-Ampère equation.

1. Introduction

Soit D un domaine borné dans \mathbb{C}^n , U le disque d'unité dans \mathbb{C} ; pour définir la métrique de Kobayashi de D , on définit d'abord la fonction $\delta(Z_1, Z_2) = \delta_D(Z_1, Z_2)$ où $Z_1, Z_2 \in D$, par :

$$(1) \quad \delta(Z_1, Z_2) = \inf \{ \text{dist hyp}(\zeta_1, \zeta_2) : \\ \exists f : U \rightarrow D \text{ holomorphe telle que } f(\zeta_j) = Z_j (j=1, 2) \}.$$

Ici dist hyp désigne la distance hyperbolique dans U . On a tout d'abord :

THÉOREME 1. — Si D est convexe, alors δ_D est une métrique.

Toutefois, en général, δ ne satisfait pas à l'inégalité du triangle. On définit alors la distance de Kobayashi $K = K_D$ comme la plus grande métrique inférieure à δ , c'est-à-dire :

$$(2) \quad K(Z_1, Z_2) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^k \delta(w_{j-1}, w_j) : w_j \in D (j=0, \dots, k), \right. \\ \left. w_0 = Z_1, w_k = Z_2 \right\}.$$

(*) Texte reçu le 1^{er} juillet 1980, révisé le 12 janvier 1981.

László LEMPERT, Département de l'Analyse I, Université Eötvös Lóránd, Budapest, 1088, Múzeum Krt. 6-8, Hongrie.

C'est une distance invariante par rapport aux applications biholomorphes et comme telle, elle peut être utilisée à l'étude des propriétés invariantes des domaines, aussi qu'à l'étude des applications holomorphes.

Si la borne inférieure dans (1) fait un si bon service, on peut espérer que les applications extrémales $f: U \rightarrow D$ qui réalisent l'infimum seront encore plus intéressantes pour l'analyse complexe. Cet article est destiné à justifier cet espoir. Malheureusement, la plupart de nos résultats ne sont valables que pour des domaines convexes. A l'heure actuelle, nous ne comprenons pas du tout ce qui se passe si D est seulement (strictement) pseudoconvexe. Des contre-exemples (comme par exemple la couronne dans \mathbb{C}) montrent quand même, que dans le cas général des domaines pseudoconvexes la situation est beaucoup moins harmonieuse.

Nous dirons qu'une applications holomorphe $f: U \rightarrow D$ est extrémale par rapport aux points $Z_1, Z_2 \in D (Z_1 \neq Z_2)$, si $f(0) = Z_1, f(\xi) = Z_2$ avec un ξ réel positif, et :

$$\delta(Z_1, Z_2) = \text{dist hyp}(0, \xi) (= \log \{ (1 + \xi)/(1 - \xi) \}).$$

On va considérer aussi le cas où Z_1 et Z_2 sont infinitésimalement proches : ceci consiste en se donnant un point $Z \in D$ et une direction $v \in T_Z(D) = \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$. Nous dirons que l'application holomorphe $f: U \rightarrow D$ est extrémale par rapport à Z et v , si $f(0) = Z, f'(0) = \lambda v$ avec $\lambda > 0$, et pour toute application holomorphe $g: U \rightarrow D$ telle que $g(0) = Z, g'(0) = \mu v$ ($\mu > 0$), on a $\mu \leq \lambda$. Finalement, si f est extrémale, nous appellerons le disque analytique $f(U)$ disque extrémale (par rapport à Z_1, Z_2 , resp. Z, v).

Avec ces notions, on a :

THÉOREME 2. — Soit $D \subset \mathbb{C}^n$ strictement convexe et borné. Alors pour tout couple $Z, z \in D (Z \neq z)$, resp. $Z \in D, v \in T_Z(D) (v \neq 0)$ il existe une application $f: U \rightarrow D$ et une seule qui est extrémale par rapport à Z, z , resp. Z, v . En plus, le disque extrémal correspondant, $f(U)$, est extrémal par rapport à n'importe quel couple de points $w_1, w_2 \in f(U) (w_1 \neq w_2)$ et par rapport à n'importe quel point $w = f(\omega) \in f(U)$ et la direction $f'(\omega) \in T_w(D)$.

Stricte convexité veut dire que si $z_1, z_2 \in \overline{D}$, alors les points intérieurs du segment $z_1 z_2$ sont à l'intérieur de D . On va utiliser aussi la notion de forte convexité : D est fortement convexe, s'il est borné, à frontière C^2 , et toutes les courbures normales de ∂D sont positives.

L'état des choses décrit dans le théorème 2 permet de construire un homéomorphisme entre D et la boule d'unité $B_n \subset \mathbb{C}^n$ de la façon suivante.

Fixons un point $Z \in D$; soit $z \in D$ quelconque. Désignons par f l'application extrémale $U \rightarrow D$ déterminée par Z, z , et faisons correspondre à z le point $z^* \in B_n$ tel que $\delta_{B_n}(0, z^*) = \delta_D(Z, z)$ et tel que $f'(0)$ soit parallèle à (et de même direction que) le rayon Oz^* . Autrement dit, $z^* = \xi f'(0)$, si $f(\xi) = z$. D'après le théorème 2, la correspondance $z \mapsto z^* = \Phi_Z(z) = \Phi(Z, z)$ est une bijection entre D et B_n ; il est facile à vérifier qu'elle est un homéomorphisme (elle est même lipschitzienne sur les compacts de D).

Nous pensons que cette application Φ_Z est une généralisation intéressante de la représentation conforme en dimension 1. Si $n > 1$, elle n'est pas, bien entendu, holomorphe. Toutefois, elle est invariante par rapport aux transformations biholomorphes. En particulier, s'il existe une application biholomorphe $F: D \rightarrow B_n$ telle que $F(Z) = 0, F'(Z) = \text{identité}$, alors $F = \Phi_Z$. En outre, comme le théorème suivant le montre, Φ_Z a des propriétés semblables à celles des applications conformes, ce qui permet de l'utiliser aux plusieurs problèmes de l'analyse complexe.

THÉORÈME 3. — *Soit D fortement convexe, ∂D de classe C^k ($k = 6, 7, \dots, \infty, \omega$). Alors pour tout Z fixé, l'application Φ_Z se prolonge en un homéomorphisme entre \bar{D} et \bar{B}_n ; ce prolongement est même un difféomorphisme de classe C^{k-4} entre $\bar{D} \setminus \{Z\}$ et $\bar{B}_n \setminus \{0\}$. En outre, Φ est de classe C^{k-4} sur $D \times D \setminus \text{diagonale}$.*

Ici C^ω désigne la classe analytique réelle; pour $k = \infty, \omega$ on entend par $k-4$ ∞ , resp. ω . Le résultat n'est pas trop précis; il serait facile d'abaisser les nombres 6 et 4. Cependant, une perte de différentiabilité d'ordre $1 + \varepsilon$ semble être inévitable, et nous ne pouvons pas démontrer le théorème pour des domaines à frontière seulement C^2 .

D'autre part, Φ_Z n'est pas forcément différentiable dans le point Z ; en effet, si elle est C^∞ en Z , alors elle est même biholomorphe (partout dans D). Nous retournerons à ce problème dans une prochaine publication.

Un corollaire immédiat en est :

COROLLAIRE 1. — *Pour un domaine comme dans le théorème précédent, la distance de Kobayashi est une fonction de classe C^{k-4} ($D \times D \setminus \text{diagonale}$).*

Remarquons que $\delta(Z, z)$ n'est pas forcément différentiable en $z = Z$ (ni son carré, d'ailleurs), comme l'exemple d'un domaine de Reinhardt différent d'un ellipsoïde le montre. Ensuite, si $D \subset \mathbb{C}$ est la couronne, la fonction $d(z) = \delta(Z, z)$ n'est pas différentiable dans un point z diamétralement opposé à Z .

Une autre conséquence du théorème 3 est le théorème de Ch. Fefferman sur le prolongement au bord des applications biholomorphes (voir [5]), au moins pour le cas où les deux domaines sont fortement convexes. En utilisant des résultats obtenus au cours de la démonstration du théorème 3, on pourra néanmoins redémontrer le théorème de Ch. Fefferman dans toute sa généralité (chapitre X).

Pour souligner l'analogie entre l'application Φ_Z et la représentation conforme, nous rappelons que si $\varphi : E \rightarrow U$ est la représentation conforme d'un domaine planaire simplement connexe sur le disque, $\varphi(Z)=0$, alors $\log |\varphi|$ est la fonction de Green de E , à pôle en Z : c'est-à-dire elle satisfait à l'équation :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 & \text{si } z \in E \setminus \{Z\}, \\ u(z) = 0 & \text{si } z \in \partial E, \\ u(z) - \log |z - Z| = O(1) & \text{si } z \rightarrow Z. \end{array} \right.$$

Comme base d'une théorie du potentiel dans \mathbb{C}^n , E. Bedford et B. A. Taylor ont proposé en [2] d'utiliser l'équation de Monge-Ampère comme un substitut à l'équation de Laplace. L'analogue de (3) dans ce cadre est :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \det \left| \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right| = 0 & \text{si } z \in D \setminus \{Z\}, \\ u \text{ est pluri-sousharmonique dans } D, \\ u(z) = 0 & \text{si } z \in \partial D, \\ u(z) - \log |z - Z| = O(1) & \text{si } z \rightarrow Z. \end{array} \right.$$

THEOREME 4. — Si D est strictement convexe et borné, alors $u = \log |\Phi_Z|$ satisfait à l'équation (4).

Ici $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{C}^n .

Si ∂D n'est pas suffisamment lisse pour assurer que Φ soit de classe C^2 , le sens du déterminant dans (4) n'est pas évident; il faut l'interpréter comme précisé en [2] (sur les sous-domaines relativement compacts de $\bar{D} \setminus \{Z\}$).

2. Démonstration du théorème 1

Il s'agit de démontrer que δ satisfait à l'inégalité du triangle. Soient donc z , w et s trois points dans D , f et g deux applications holomorphes $U \rightarrow D$ telles que :

$$f(\zeta) = z, \quad f(\omega) = g(\omega') = w, \quad g(\sigma) = s \quad (\zeta, \omega, \omega', \sigma \in U),$$

et :

$$\delta(z, w) > \text{dist hyp}(\zeta, \omega) - \varepsilon,$$

$$\delta(w, s) > \text{dist hyp}(\omega', \sigma) - \varepsilon,$$

avec un $\varepsilon > 0$ préalablement donné. En composant f et g avec des automorphismes convenables de U , on peut faire de sorte que $\zeta = 0$, $\omega = \omega' > 0$, $\sigma > \omega$ (donc ω et σ sont réels). De plus, nous pouvons prendre pour f et g des applications continues sur \overline{U} . Posons :

$$h(\xi) = \lambda(\xi) f(\xi) + (1 - \lambda(\xi)) g(\xi) \quad (\xi \in \overline{U}),$$

où :

$$\lambda(\xi) = (\xi - \sigma) \left(\xi - \frac{1}{\sigma} \right) (\xi - \omega)^{-1} \left(\xi - \frac{1}{\omega} \right)^{-1}.$$

On vérifie qu'à un pôle simple en ω près, λ est holomorphe sur \overline{U} , $\lambda(0) = 1$, $\lambda(\sigma) = 0$, qu'elle est réelle sur ∂U et y prend des valeurs entre 0 et 1. Il en suit que $h : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ est holomorphe, $h(0) = z$, $h(\sigma) = s$, $h(\partial U) \subset \overline{D}$; et alors en vertu du principe du maximum, $h(U) \subset D$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \delta(z, s) &\leq \text{dist hyp}(0, \sigma) = \text{dist hyp}(0, \omega) + \text{dist hyp}(\omega, \sigma) \\ &\leq \delta(z, w) + \delta(w, s) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

ε étant arbitrairement petit, cela achève la démonstration.

Nous remarquons que pour un D non convexe, δ_D ne satisfait pas toujours à l'inégalité du triangle. Soient par exemple :

$$D_\varepsilon = \{ z \in \mathbb{C}^2, |z_1|, |z_2| < 2, |z_1 z_2| < \varepsilon \},$$

$0 = (0, 0)$, $P = (1, 0)$, $Q = (0, 1)$. Alors $\delta_{D_\varepsilon}(0, P)$ et $\delta_{D_\varepsilon}(0, Q)$ ne dépendent pas de ε , mais on vérifie facilement que $\delta_{D_\varepsilon}(P, Q) \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$). Donc, pour ε petit, δ_{D_ε} n'est pas une métrique. D'ailleurs il n'est pas difficile à montrer que $\delta_{D_\varepsilon} \neq K_{D_\varepsilon}$ que si D_ε est convexe, c'est-à-dire $\varepsilon \geq 4$.

3. L'idée de la démonstration des théorèmes 2 et 3

Soit $f : U \rightarrow D$ une application extrémale, disons, par rapport au point $Z \in D$ et direction $v \in T_Z(D)$; autrement dit, f est la solution du problème extrémal :

$$(5) \quad \sup \{ |g'(0)| : g : U \rightarrow D \text{ holomorphe}, g(0) = Z, g'(0) = \lambda v, \lambda > 0 \}.$$

Pour déterminer f , il est naturel de tenter la méthode usuelle du calcul variationnel : considérer f comme un membre d'une famille des applications $f_t : U \rightarrow D$, etc. Ainsi on obtient une caractérisation assez implicite, qui se simplifie cependant si on fait certaines hypothèses concernant l'application extrémale. Ces hypothèses sont assez plausibles (comme par exemple que f se prolonge continuellement à \overline{U}), mais sont difficiles (sinon impossibles) à vérifier *a priori*. Pour énoncer cette caractérisation hypothétique, introduisons le vecteur normal (extérieur) $v(z) = (v_1(z), \dots, v_n(z))$ à ∂D dans $z \in \partial D$. La dite caractérisation est la suivante : $f : U \rightarrow D$ est extrémale si et seulement si :

(6) f se prolonge en une fonction continue sur \overline{U} (qu'on va désigner par la même lettre f), $f(\partial U) \subset \partial D$, et il existe une fonction $p : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^+$ positive et continue, telle que l'application :

$$\zeta p(\zeta) \overline{v(f(\zeta))} = \zeta p(\zeta) (\overline{v_1(f(\zeta))}, \dots, \overline{v_n(f(\zeta))}),$$

définie pour $\zeta \in \partial U$, se prolonge en une application continue $\tilde{f} : \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$, holomorphe dans U .

Malheureusement, les arguments qui nous ont amenés à cette caractérisation ne démontrent rigoureusement ni la partie « si », ni la partie « seulement si » de cet énoncé. Pour le moment nous nous contentons de baptiser stationnaires les applications holomorphes f possédantes la propriété (6). Dans le chapitre IV nous démontrerons que les applications stationnaires sont extrémales. Nous verrons également que l'application \tilde{f} introduite plus haut ne prend pas la valeur $0 \in \mathbb{C}^n$, et par conséquent, on peut la considérer comme une application $\overline{U} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ dans l'espace projectif (complexe). Donc, pour une application stationnaire f , l'application $(\overline{v_1 \circ f} : \dots : \overline{v_n \circ f}) : \partial U \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ se prolonge en une application holomorphe $\hat{f} : U \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$.

Cette remarque nous permet de donner une interprétation géométrique aux applications stationnaires. Considérons le plongement $\psi : \partial D \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{n-1}^*$ défini par :

$$\psi(z) = (z, T_z^{\mathbb{C}}(\partial D)),$$

où \mathbb{P}_{n-1}^* est l'espace projectif des hyperplans de \mathbb{C}^n et $T_z^{\mathbb{C}}(\partial D)$ désigne l'hyperplan complexe tangent à ∂D en z . Les coordonnées homogènes de $T_z^{\mathbb{C}}(\partial D)$ sont $(\overline{v_1(z)} : \dots : \overline{v_n(z)})$. Donc l'application $(f, \hat{f}) : U \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{P}_{n-1}^*$

est holomorphe et $(f, \hat{f})(\partial U) \subset \psi(\partial D)$; c'est-à-dire à toute application stationnaire f correspond un disque analytique $(f, \hat{f})(U)$ dont le bord est contenu dans la variété $\psi(\partial D)$. (L'inverse n'est pas vrai; cependant tous les disques analytiques à bord dans $\psi(\partial D)$ correspondent à des solutions de certains problèmes extrémaux dans D .)

D'autre part, il se trouve que si (et seulement si) la forme de Levi de ∂D en z est non dégénérée, alors $\psi(\partial D)$ est totalement réelle en $\psi(z)$. De ce fait on déduira que les applications stationnaires sont à peu près aussi régulières que ∂D (chapitre V).

Jusqu'ici nous n'avons aucune évidence de l'existence des applications stationnaires. Cependant, nous savons que leur existence est liée à l'existence des disques analytiques à bord dans une sous-variété compacte, totalement réelle, de dimension $2n-1$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{n-1}^*$. Or, des problèmes de cette dernière sorte ont déjà été examinés par plusieurs personnes, dont le premier, paraît-il, E. Bishop (voir [4]). Chez eux, on se donne une sous-variété M de \mathbb{C}^k , $\dim_{\mathbb{R}} M \geq k$ et on cherche un disque analytique dont le bord est dans M . On a su résoudre ce problème d'une façon satisfaisante si $\dim_{\mathbb{R}} M > k$ ou si $\dim_{\mathbb{R}} M = k$ et M est totalement réelle sauf dans un point (où elle cesse de l'être). Parmi ces conditions on peut construire des petits disques à bord dans M ; la construction étant locale, les propriétés globales de M ne jouent aucun rôle. Dans le cas où M est totalement réelle (partout) et compacte, la situation est complètement différente : des petits disques ne peuvent pas exister, ce qui fait que le problème devient beaucoup plus subtil et on sait très peu de sa solution. Cependant, en faisant usage de l'idée de E. Bishop (c'est-à-dire essentiellement en utilisant le théorème des fonctions implicites) on trouve que si $g(\bar{U})$ est un disque analytique dont le bord est contenu dans la variété totalement réelle M , alors souvent on peut perturber M un peu et la variété perturbée M' contiendrait toujours le bord d'un disque analytique. — Le mot « souvent » sans signification précise, veut dire quelque chose entre « génériquement » et « exceptionnellement ». — En tout cas, cela suggère l'application de la méthode de continuité, et c'est bien le chemin qu'on va suivre pour démontrer l'existence des disques stationnaires dans des domaines fortement convexes. Dans le chapitre VI, nous démontrerons que si D_t est une famille des domaines dépendant d'une lisse du paramètre réel t et s'il y a un disque stationnaire dans D_0 , qui passe par deux points $z, w \in D_0$, alors pour t petit, z_t et w_t proche de z , resp. w , il existe un disque stationnaire dans D_t qui passe par z_t, w_t ; de plus, ce disque stationnaire dépend d'une façon lisse de t .

Pour faire marcher la méthode de continuité nous aurons encore besoin d'une estimation *a priori* des applications stationnaires; elle sera obtenue dans le chapitre VII. La démonstration des théorèmes 2 et 3 sera achevée dans les chapitres VIII et IX.

4. Applications stationnaires et applications extrémales

Dans les chapitres suivants, jusqu'au VIII^e, D désignera toujours un domaine fortement convexe, à bord au moins C^3 ; $\nu(z) = (\nu_1(z), \dots, \nu_n(z))$ est la normale extérieure de ∂D en $z \in \partial D$. Pour $0 < p < \infty$ nous définissons les classes de Hölder $C^p(K)$ où $K \subset \mathbb{C}^m$ est compact, comme l'ensemble des fonctions (et des applications) h $[p]$ -fois dérivable à l'intérieur de K , telles que 1. Si p est entier, les dérivées d'ordre $\leq p$ se prolongent continûment à K ; 2. si $\theta = p - [p] > 0$, toutes les dérivées $h^{(\alpha)}$ d'ordre $\leq [p]$ de la fonction en question satisfont $|h^{(\alpha)}(z) - h^{(\alpha)}(w)| \leq C|z - w|^\theta$ ($z, w \in \text{int } K$). Bien entendu, $C^\infty(K) = \bigcap_{p < \infty} C^p(K)$ et $C^\omega(K)$ est l'ensemble des fonctions analytiques réelles dans un voisinage de K . Si $E \subset \mathbb{C}^m$ est un ensemble quelconque, nous posons $C^p(E) = \bigcap \{ C^p(K) : K \subset E \text{ compact} \}$.

Modifiant légèrement la définition donnée dans le chapitre III, nous dirons que :

DÉFINITION. — Une application holomorphe propre $f: U \rightarrow D$ est stationnaire si elle se prolonge en une application $1/2$ -hölderienne de \overline{U} (qui sera également désignée par f), $f(\partial U) \subset \partial D$, et il existe une fonction positive $p: \partial U \rightarrow \mathbb{R}^+$ $1/2$ -hölderienne, telle que l'application $\zeta \mapsto p(\zeta) \nu(f(\zeta))$, définie pour $\zeta \in \partial U$, se prolonge en une application \tilde{f} continue sur \overline{U} et holomorphe dans U . Ensuite, si f est stationnaire, nous appellerons le disque analytique $f(\overline{U})$ disque stationnaire.

Remarquons que d'après un théorème de Hardy et Littlewood, les conditions plus haut entraînent que \tilde{f} est même $1/2$ -hölder-continue sur \overline{U} .

PROPOSITION 1. — Une application stationnaire f est l'application extrémale unique par rapport au point $z = f(0)$ et direction $v = f'(0)$. (En particulier $f'(0) \neq 0$.)

Démonstration. — Soit $g: U \rightarrow D$ une application holomorphe telle que $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = \lambda f'(0)$, $\lambda \geq 0$. g étant bornée, on peut définir pour presque tout $\zeta \in \partial U$, $g(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 1-0} g(r\zeta)$. Alors $g(\zeta) \in \overline{D}$ pour presque tout

$\zeta \in \partial U$. En raison de la stricte convexité de D :

$$(7) \quad \operatorname{Re} \langle f(\zeta) - g(\zeta), \overline{v(f(\zeta))} \rangle \geq 0 \quad \text{p. p. sur } \partial U,$$

ou $\langle z, w \rangle$ veut dire $\sum z_j w_j$ pour $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$. De plus, si $f \neq g$, que nous supposons désormais, on a stricte inégalité dans (7). En multipliant (7) par $p(\zeta)$ on a :

$$0 < \operatorname{Re} \langle f(\zeta) - g(\zeta), p(\zeta) \overline{v(f(\zeta))} \rangle \\ = \operatorname{Re} \langle (f(\zeta) - g(\zeta)) \zeta^{-1}, \tilde{f}(\zeta) \rangle \quad \text{p. p. sur } U.$$

D'ici, vu que le dernier membre est harmonique et borné dans U :

$$(8) \quad 0 < \operatorname{Re} \langle f'(0) - g'(0), \tilde{f}(0) \rangle = (1 - \lambda) \operatorname{Re} \langle f'(0), \tilde{f}(0) \rangle.$$

Posons $g(\zeta) \equiv z$: alors $\lambda = 0$ et on constate que :

$$(9) \quad \operatorname{Re} \langle f'(0), \tilde{f}(0) \rangle > 0.$$

Donc pour une g générale $1 - \lambda > 0$, c'est-à-dire $|g'(0)| < |f'(0)|$.

La démonstration a montré en plus, que $\tilde{f}(0) \neq 0$. On verra tout de suite que pour $\zeta \in U$, $\tilde{f}(\zeta) \neq 0$.

PROPOSITION 2. — *Si f est une application stationnaire et $a : U \rightarrow U$ est un automorphisme de U , alors $f_a = f \circ a$ est une application stationnaire.*

Démonstration. — Il faut démontrer l'existence d'une fonction $p_a : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^+$, $1/2$ -höllder-continue, telle que $\zeta p_a(\zeta) \overline{v(f_a(\zeta))}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans U . Dans ce but, remarquons que l'indice de la fonction $\zeta/a(\zeta)$ sur ∂U étant zéro, il y a une fonction $q : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^∞ telle que $q(\zeta) \zeta/a(\zeta)$ se prolonge en une fonction h holomorphe et non nulle dans U . En effet, si on choisit une ϕ holomorphe dans U telle que $\operatorname{Im} \phi(\zeta) = \operatorname{Im} \log(\zeta/a(\zeta))$ pour $\zeta \in \partial U$, alors $q(\zeta) = (\exp \phi(\zeta)) a(\zeta)/\zeta$ fera le service. En posant $p_a(\zeta) = q(\zeta) p(a(\zeta))$, on a :

$$\zeta p_a(\zeta) \overline{v(f_a(\zeta))} = h(\zeta) a(\zeta) p(a(\zeta)) \overline{v(f(a(\zeta)))} = h(\zeta) \tilde{f}(a(\zeta)),$$

qui se prolonge bien en une application holomorphe $U \rightarrow \mathbb{C}^n$.

De plus, vu que $\tilde{f}_a = h \tilde{f} \circ a$, les fonctions \tilde{f}_a et $\tilde{f} \circ a$ s'annulent simultanément; en raison de la remarque suivante la démonstration de la proposition 1, on a :

COROLLAIRE 2. — *Pour une application stationnaire f , l'application $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ ne prend pas la valeur de $0 \in \mathbb{C}^n$. En effet, $\langle f'(\zeta), \tilde{f}(\zeta) \rangle \neq 0$ pour $\zeta \in U$.*

Une autre conséquence des propositions 1 et 2 est :

PROPOSITION 3. — *Un disque stationnaire $f(\overline{U})$ est le disque extrémal unique par rapport au point $z = f(\zeta)$ et direction $v = f'(\zeta)$, pour $\zeta \in U$ quelconque.*

PROPOSITION 4. — *Un disque stationnaire $f(\overline{U})$ est le disque extrémal unique par rapport à n'importe quel couple $z_1 = f(\zeta_1)$, $z_2 = f(\zeta_2)$, ($\zeta_1 \neq \zeta_2$, $\zeta_1, \zeta_2 \in U$).*

Démonstration. — En vertu de la proposition 2, on peut supposer $\zeta_1 = 0$ et $\zeta_2 > 0$. Nous allons démontrer qu'alors f est l'application extrémale unique par rapport à z_1, z_2 .

Soit $g : U \rightarrow D$ holomorphe, $g(0) = z_1$, $g(\omega) = z_2$, $\omega > 0$, $g \neq f$. Il nous faut démontrer qu'alors $\omega < \zeta_2$. Supposons, au contraire, que $\omega \geq \zeta_2$, et soit $G(\zeta) = g(\zeta\omega/\zeta_2)$. Donc $G : U \rightarrow D$, $G(0) = z_1$, $G(\zeta_2) = z_2$ (et, bien entendu, $G \neq f$). Alors pour presque tout $\zeta \in \partial U$:

$$\operatorname{Re} \langle f(\zeta) - G(\zeta), \overline{v(f(\zeta))} \rangle > 0,$$

d'où

$$\operatorname{Re} \langle (f(\zeta) - G(\zeta))\zeta^{-1}, \tilde{f}(\zeta) \rangle > 0,$$

ce qui contredit bien au principe de minimum, puisque la fonction harmonique à gauche s'annule en $\zeta = \zeta_2$.

Cette démonstration montre aussi que les applications stationnaires sont injectives; en y ajoutant le corollaire 2, on obtient :

COROLLAIRE 3. — *Les applications stationnaires plongent U dans \mathbb{C}^n .*

5. Régularité des applications stationnaires

Si S est une hypersurface réelle dans \mathbb{C}^n , de classe C^2 , on définit un plongement $\psi : S \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{n-1}^*$ par :

$$\psi(z) = (z, T_z^{\mathbb{C}}(S)).$$

LEMME 1. — *La variété $\psi(S)$ est totalement réelle au point $\psi(z_0)$ si et seulement si la forme de Lévi de S en z_0 ne se dégénère pas.*

Une sous-variété réelle M d'une variété complexe est dite totalement réelle en $z \in M$ si $T_z(M) \cap iT_z(M) = (0)$.

Démonstration. — Par calcul direct, ou voir S. M. WEBSTER [12].

LEMME 2. — *Soient $E \subset U$ un domaine borné par une courbe de Jordan dont un sous-arc ouvert A est contenu dans ∂U , M une sous-variété totalement réelle d'une variété complexe X , $\dim_{\mathbb{R}} M = \dim_{\mathbb{C}} X = m$. Soit ensuite $g : E \cup A \rightarrow X$*

une application hölder-continue d'ordre $1/2$, holomorphe dans E et telle que $g(A) \subset M$. Supposons que M est de classe C^r ($r=2, 3, \dots, \omega$). Alors $g \in C^{r-\varepsilon}(E \cup A)$ avec $\varepsilon > 0$ arbitraire.

Nous remarquons, qu'il serait facile d'affaiblir l'hypothèse $g \in C^{1/2}(E \cup A)$   $g \in C^p(E \cup A)$ avec $p > 0$ quelconque; nous ne savons cependant pas si la condition $g \in C(E \cup A)$ suffit pour la même conclusion

Démonstration. — Le lemme étant de caractère local, on peut supposer que $X = \mathbb{C}^m$. Nous allons démontrer une petite modification du lemme, où $E \subset U^+ = \{\zeta \in \mathbb{C} : \text{Im } \zeta > 0\}$ et $A \subset \partial E \cap \partial U^+$ est un segment. Il va sans dire que les deux versions sont équivalentes.

Si $r = \omega$, on peut supposer qu'il existe un difféomorphisme analytique $\Phi : V \rightarrow M$ où V est un ouvert de \mathbb{R}^m . Φ est la restriction d'une application biholomorphe $\tilde{\Phi}$ d'un voisinage de V dans $\mathbb{C}^m \supset \mathbb{R}^m$. Alors l'application $\tilde{\Phi}^{-1} \circ g$ est holomorphe dans E proche de A , elle est continue sur A et y prend des valeurs réelles (c'est-à-dire valeurs dans \mathbb{R}^n). En vertu du principe de réflexion, elle se prolonge analytiquement à travers A ; par suite il en est de même pour g .

Soit maintenant $r < \omega$. De nouveau, il est permis de supposer qu'il existe un C^r -difféomorphisme Φ d'un ouvert V de $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$ sur M . D'après un résultat de F. R. HARVEY et R. O. WELLS Jr (voir [7]), on peut construire un C^r -prolongement $\tilde{\Phi}$ de Φ à un voisinage de V dans \mathbb{C}^m , qui est presque holomorphe au sens que toutes les dérivées d'ordre $\leq r-1$ de $\partial \tilde{\Phi}$ s'annulent sur V . Il en suit que $\tilde{\Phi}$ est un difféomorphisme d'un voisinage de V sur un voisinage de M et que les dérivées d'ordre $\leq r-1$ de $\partial \tilde{\Phi}^{-1}$ s'annulent sur M .

Considérons la fonction $h = \tilde{\Phi}^{-1} \circ g$, définie sur $\Omega \cap U^+$, où Ω est un voisinage de A (qu'on va supposer symétrique par rapport à l'axe réel et tel que $\Omega \cap \mathbb{R} = A$), et définissons :

$$H(\zeta) = \begin{cases} h(\zeta) & \text{si } \zeta \in \Omega, \text{ Im } \zeta \geq 0, \\ \overline{h(\bar{\zeta})} & \text{si } \zeta \in \Omega, \text{ Im } \zeta \leq 0. \end{cases}$$

C'est une fonction continue sur Ω , de classe C^r sur $\Omega \setminus \mathbb{R}$. Si l'on pose :

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} H_{\bar{\zeta}}(\zeta) & \text{si } \zeta \in \Omega \setminus A, \\ 0 & \text{si } \zeta \in A, \end{cases}$$

alors φ , elle aussi, sera continue. En effet, seule la continuité sur A est contestable. Or, dans $\Omega \cap U^+$, on a :

$$(10) \quad H_{\bar{\zeta}}(\zeta) = \frac{\partial \tilde{\Phi}^{-1}}{\partial \bar{z}}(g(\zeta)) \cdot g'(\zeta);$$

le premier facteur à droite étant $o(1) \cdot (1 - |\zeta|)^{1/2}$ ($\zeta \rightarrow \zeta_0 \in A$) et le second, d'après un théorème de Hardy et Littlewood (voir [6], p. 453-455) étant $O(1)(1 - |\zeta|)^{-1/2}$, on a $\varphi(\zeta) \rightarrow 0$ si $\zeta \in \Omega \setminus A$ tend vers un point $\zeta_0 \in A$.

Par suite, pour tout $\Omega' \subset \subset \Omega$ il existe une $\psi \in C^{1-\varepsilon}(\Omega')$ telle que $\psi_{\bar{\zeta}} = \varphi$. Ici $\varepsilon > 0$ est arbitraire; au cours de la démonstration on va éventuellement changer sa valeur. Alors $H - \psi$ est holomorphe dans $\Omega' \setminus A$, continue dans Ω' , donc holomorphe même dans les points de $\Omega' \cap A$. Par conséquent $H \in C^{1-\varepsilon}(\Omega')$. Cela étant pour tout $\Omega' \subset \subset \Omega$, $h \in C^{1-\varepsilon}(\Omega \cap \bar{U}^+)$ et $g \in C^{1-\varepsilon}(\Omega \cap \bar{U}^+)$.

Ceci entraîne à son tour que :

$$\frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial \bar{z}}(g(\zeta)) = o(1)(1 - |\zeta|)^{1-\varepsilon}$$

et :

$$g'(\zeta) = O(1)(1 - |\zeta|)^{-\varepsilon} \quad (\zeta \rightarrow \zeta_0 \in A),$$

d'où $\varphi = H_{\bar{\zeta}} \in C^{1-\varepsilon}(\Omega')$ et $\psi \in C^{2-\varepsilon}(\Omega')$, et finalement $h, g \in C^{2-\varepsilon}(\Omega \cap \bar{U}^+)$. Si $r = 2$, on a donc terminé. Si $r > 2$, on procède d'une façon pareille : on sait déjà que $g' \in C^{1-\varepsilon}(\Omega \cup \bar{U}^+)$, et qu'en vertu du théorème de Hardy et Littlewood déjà cité, $g''(\zeta) = O(1)(1 - |\zeta|)^{-\varepsilon}$. En dérivant (10) on constate que $\varphi \in C^{2-\varepsilon}(\Omega)$, donc $\psi \in C^{3-\varepsilon}(\Omega')$, par suite $h \in C^{3-\varepsilon}(\Omega \cap \bar{U}^+)$ et $g \in C^{3-\varepsilon}(E \cup A)$, etc., jusqu'à $g \in C^{r-\varepsilon}(E \cup A)$.

PROPOSITION 5. — Soit ∂D de classe C^k ($3 \leq k \leq \omega$), $f: \bar{U} \rightarrow \bar{D}$ une application stationnaire. Alors $f, \tilde{f} \in C^{k-2}(\bar{U})$.

Ici \tilde{f} est l'application qui figure dans la définition des applications stationnaires. Elle n'est pas définie d'une façon univoque, mais la proposition est vraie pour tout choix possible de \tilde{f} .

Démonstration. — Soit $\hat{f} = \pi \circ \tilde{f}: \bar{U} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}^*$, où $\pi: \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}^*$ est la projection canonique (\mathbb{C}^n et $(\mathbb{C}^n)^*$ étant considérés comme identiques). D'après le corollaire 2 \tilde{f} ne s'annule pas sur \bar{U} , donc \hat{f} est bien définie. Or l'application $(f, \hat{f}): \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{n-1}^*$ est $1/2$ -höldérienne, holomorphe dans U , et $(f, \hat{f})(\partial U) \subset \psi(\partial D)$, cette dernière variété étant totalement réelle d'après le lemme 1. Alors, en vertu du lemme 2, $(f, \hat{f}) \in C^{k-1-\varepsilon}(\bar{U})$, en particulier $f \in C^{k-2}(\bar{U})$. Puisqu'il en suit aussi que $v \circ f \in C^{k-1-\varepsilon}(\partial U)$, il ne reste qu'à montrer que $p \in C^{k-2}(\partial U)$.

Dans ce but, soit $\zeta_0 \in \partial U$; on peut supposer que $v_1(f(\zeta_0)) \neq 0$. Soit $\varphi : \partial U \rightarrow \mathbb{C}$ hölder-continue d'ordre $k-1-\varepsilon$ telle que $\overline{v_1(f(\zeta))} = e^{\varphi(\zeta)}$ dans un voisinage $V \cap \partial U$ de ζ_0 sur ∂U . Soit enfin $\gamma : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction conjuguée à $\text{Im } \varphi$, c'est-à-dire telle que $\gamma + i \text{Im } \varphi$ se prolonge en une fonction holomorphe dans U . D'après un théorème de Privaloff (voir, par exemple GOLUZIN [6], p. 456) $\gamma \in C^{k-1-\varepsilon}(\partial U)$. Vu que les fonctions :

$$\overline{v_1(f(\zeta))} \exp \{ \gamma(\zeta) - \text{Re } \varphi(\zeta) \} \quad \text{et} \quad p(\zeta) \overline{v_1(f(\zeta))}$$

se prolongent en des fonctions holomorphes dans $U \cap V$, il en est de même pour $p(\zeta) \exp \{ \text{Re } \varphi(\zeta) - \gamma(\zeta) \}$.

Or, cette dernière fonction étant réelle sur $V \cap \partial U$, elle se prolonge analytiquement à travers cet arc, autrement dit, elle est analytique sur $V \cap \partial U$. Vu la régularité connue de $\exp \{ \text{Re } \varphi - \gamma \}$, cela entraîne $p \in C^{k-1-\varepsilon}(\partial U \cap V)$. ζ_0 étant arbitrairement choisi, $p \in C^{k-1-\varepsilon}(\partial U)$, donc $\tilde{f} \in C^{k-1-\varepsilon}(\overline{U})$.

PROPOSITION 6. — *Pour une application stationnaire $f : U \rightarrow D$, $\langle f'(\zeta), \tilde{f}(\zeta) \rangle$ est une fonction constante positive.*

Démonstration. — Puisque la courbe $\{ f(\omega) : \omega \in \partial U \}$ est contenue dans ∂D , son tangent en $f(\zeta)$ est orthogonal à $v(f(\zeta))$, d'où :

$$0 = p(\zeta) \text{Re} \langle i \zeta f'(\zeta), \overline{v(f(\zeta))} \rangle \\ = \text{Im} \langle f'(\zeta), \zeta p(\zeta) \overline{v(f(\zeta))} \rangle = \text{Im} \langle f'(\zeta), \tilde{f}(\zeta) \rangle,$$

pour tout $\zeta \in \partial U$. D'autre part, la fonction du dernier membre est harmonique dans U et continue dans \overline{U} ; par suite, elle est identiquement zéro, et $\langle f'(\zeta), \tilde{f}(\zeta) \rangle$ est une constante réelle, qui est même positive à cause de (9).

Cette proposition montre que pour une application stationnaire $f : U \rightarrow D$ les fonctions p, \tilde{f} sont déterminées à des constantes multiplicatives près. Dès maintenant, p désignera toujours la fonction définie par :

$$p(\zeta) = \langle \zeta f'(\zeta), \overline{v(f(\zeta))} \rangle^{-1} \quad (\zeta \in \partial U),$$

de sorte qu'alors $\langle f'(\zeta), \tilde{f}(\zeta) \rangle \equiv 1$.

PROPOSITION 7. — *Une application stationnaire f plonge \overline{U} dans \mathbb{C}^n .*

Démonstration. — f est une immersion d'après proposition 6. Quant à l'injectivité, en raison du corollaire 3 du chapitre IV, il suffit de démontrer que si $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial U$, $\zeta_1 \neq \zeta_2$, alors $f(\zeta_1) \neq f(\zeta_2)$. Supposons au contraire

l'égalité, et considérons les points $f(t\zeta_1)$, $f(t\zeta_2)$ lorsque le nombre réel t croît vers 1. Les deux points approchent alors $f(\zeta_1) \in \partial D$ d'une façon non tangentielle car $\langle \zeta f'(\zeta), \overline{v(f(\zeta))} \rangle > 0$. Il en résulte que les deux trajectoires ne s'éloignent pas trop dans la métrique de Kobayashi, au sens que pour tout t il existe un t' tel que $\delta(f(t\zeta_1), f(t'\zeta_2))$ reste borné, lorsque $t \rightarrow 1$. (On s'en convainc en construisant des petits disques qui coupent les deux trajectoires simultanément.) Pourtant, c'est contradictoire, parce que :

$$\delta(f(t\zeta_1), f(t'\zeta_2)) = \text{dist hyp}(t\zeta_1, t'\zeta_2) \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow 1).$$

PROPOSITION 8. — Soient $f \neq g$ deux applications stationnaires $\overline{U} \rightarrow \overline{D}$, ∂D de classe C^4 , $z = f(0) = g(0)$. Alors $f(\overline{U})$ et $g(\overline{U})$ se coupent dans le seul point z .

Démonstration. — Que $f(U) \cap g(U) = \{z\}$ découle déjà des résultats du chapitre IV. Il suffit donc de démontrer que $f(\zeta_1) \neq g(\zeta_2)$ si $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial U$; ou encore seulement si $\zeta_1 = \zeta_2 = 1$. Supposons le contraire, $f(1) = g(1)$. Par stricte convexité :

$$\text{Re} \langle f(\zeta) - g(\zeta), \overline{v(f(\zeta))} \rangle > 0 \quad \text{p.p. sur } \partial U.$$

Puisque :

$$-(\zeta - 1)^2 / \zeta = 2 - \zeta - \zeta^{-1} > 0 \quad \text{si } \zeta \in \partial U, \quad \zeta \neq 1,$$

on a aussi :

$$\text{Re} \left\langle \frac{g(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - 1)^2}, \tilde{f}(\zeta) \right\rangle > 0 \quad \text{p.p. sur } \partial U.$$

D'où :

$$0 < \text{Re} \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{iU} \left\langle \frac{g(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - 1)^2}, \tilde{f}(\zeta) \right\rangle \frac{d\zeta}{i\zeta} = \text{Re} \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{iU} \langle h(\zeta), \tilde{f}(\zeta) \rangle \frac{d\zeta}{\zeta - 1},$$

où $h(\zeta) = (g(\zeta) - f(\zeta))\zeta^{-1}(\zeta - 1)^{-1}$ est selon l'hypothèse holomorphe dans U et $\in C^1(\overline{U})$. D'après la formule de Sohotski-Plemelj, la valeur de cette dernière expression est :

$$\text{Re} \langle h(1), \tilde{f}(1) \rangle = \text{Re} \langle g'(1) - f'(1), \tilde{f}(1) \rangle.$$

Donc l'angle entre $g'(1) - f'(1)$ et $v(f(1))$ est aigu. Le rôle de f et g étant symétrique, l'angle entre $f'(1) - g'(1)$ et $v(g(1)) = v(f(1))$ lui-aussi est aigu, ce qui est une contradiction.

6. Perturbation des domaines

Dans ce chapitre, on se donnera une famille D_t des domaines, dépendante régulièrement du paramètre réel t ; on supposera que pour $t=0$, il existe un disque stationnaire dans D_0 , et on démontrera l'existence des disques stationnaires dans D_t pour t petit.

La démonstration utilisera un résultat assez précis concernant le problème de Riemann-Hilbert. Il y a plusieurs problèmes portant ce nom-ci; dans notre version, il s'agit de trouver une fonction $R : \partial U \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$ (multiplicateur) à une fonction donnée $W : \partial U \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$, telle que le produit WR se prolonge en une fonction $H : \bar{U} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$, holomorphe dans U . Un tel multiplicateur n'existe pas toujours (une condition nécessaire, mais non suffisante étant que l'indice de $\det W : \partial U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ soit nulle), pourtant on verra que si une W_0 admet un tel multiplicateur, alors toute W proche de W_0 en admet un. Pour énoncer un théorème précis, nous introduisons la notation suivante. Si M est une matrice carrée d'ordre m à éléments complexes :

$$[M] = \sup \{ |Mv| : v \in \mathbb{R}^m, |v| = 1 \}.$$

THÉOREME A. — *Supposons que pour une fonction $W_0 : \partial U \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$, de classe C^p ($1 < p < \infty$ non entier), il existe $R_0 : \partial U \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$ de la même régularité telle que la fonction $W_0 R_0$ se prolonge en une fonction $H_0 : \bar{U} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ de classe C^p , holomorphe dans U . Si $W_1 : \partial U \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$, de classe C^p , est telle que :*

$$(11) \quad \sup_{\zeta \in \partial U} [H_0^{-1}(W_1 - W_0)R_0(\zeta)] < 1/\sqrt{2},$$

alors il existe un couple unique $R_1 : \partial U \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$, $H_1 : \bar{U} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$, de régularité C^p , H_1 holomorphe dans U , $R_1(1) = I$ (=matrice d'unité), telle que $W_1 R_1 = H_1$ sur ∂U .

La fonction $W_1 \mapsto H_1$ est analytique, si on la regarde comme une application d'un ouvert de l'espace de Banach des matrices, dont les éléments sont des fonctions de $C^p(\partial U)$, dans le même espace.

Finalement, si (11) est satisfait, on a pour tout $\zeta \in \bar{U}$, $v \in \mathbb{R}^m$, $v \neq 0$:

$$(11') \quad |\operatorname{Re} H_0^{-1} H_1(\zeta)v| > |\operatorname{Im} H_0^{-1} H_1(\zeta)v|.$$

Une application φ d'un ouvert G d'un espace de Banach X dans un autre espace de Banach Y , est dite analytique, si dans le complexifié de X , $X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, il existe un ouvert $\tilde{G} \supset G$ et une application holomorphe $\tilde{\varphi} : \tilde{G} \rightarrow Y \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ telle que $\tilde{\varphi}|_G = \varphi$.

Nous aurons encore besoin d'un autre théorème du même type.

THÉORÈME B. — Soit $W : \partial U \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ de classe C^p , $p > 0$ non entier ou ∞ , telle que pour chaque $\zeta \in \partial U$, $W(\zeta)$ est une matrice auto-adjointe positive définie. Alors il existe une fonction $H : \bar{U} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ de classe C^p , holomorphe dans U , telle que $H^* H = W$ sur U .

Ici, H^* désigne l'adjoint de H . Pour la démonstration de ces théorèmes voir l'appendice.

Retournons à la perturbation des domaines. Un point essentiel de la démonstration sera le calcul plus ou moins explicite de certaines matrices; afin de simplifier ces calculs, nous introduisons un système de coordonnées dans lequel la fonction qui définit D_0 est aussi simple (= aussi proche de la fonction $\sum |z_j|^2 - 1$) que possible.

PROPOSITION 9. — Soit $f : \bar{U} \rightarrow \bar{D}$ une application stationnaire, ∂D de classe C^4 . Etant donné un $\varepsilon > 0$, on peut choisir une fonction r de classe C^4 définissant D , et introduire des coordonnées w_1, \dots, w_n dans un voisinage de $f(\bar{U})$, telles que dans ce système de coordonnées la distance (dans $C^1(\partial U)$) des fonctions :

1. $f(\zeta)$ et $(\zeta, 0, \dots, 0)$;
 2. $r_w(f(\zeta))$ et $(\zeta, 0, \dots, 0)$;
 3. $r_{w\bar{w}}(f(\zeta))$ et la matrice constante $M(\zeta) \equiv I_n$ (=matrice unité carrée d'ordre n);
 4. $r_{w_1 w} (f(\zeta))$ et $(0, \dots, 0)$,
- soit inférieure à ε ; et en chaque $\zeta \in \partial U$ la norme de la matrice $(r_{w_i w_j}(f(\zeta)))_{2 \leq i, j \leq n}$ soit inférieure à $\sigma < 1$, où σ ne dépende pas de ε (mais peut dépendre de D et de f).

Ici et dans la suite $r_w = (r_{w_1}, \dots, r_{w_n})$, $r_{w\bar{w}} = (r_{w_i \bar{w}_j})_{i, j}$, etc.

Démonstration. — Désignons les coordonnées affines de \mathbb{C}^n par z_1, \dots, z_n . Supposons d'abord que ∂D est analytique. Alors f et \bar{f} se prolongent en des fonctions holomorphes (notées par les mêmes lettres) dans un voisinage U' de \bar{U} . En appliquant au besoin un changement linéaire des coordonnées, on peut supposer que les premières deux coordonnées de $f = (f_1, \dots, f_n)$ ne

s'annulent pas simultanément dans U' , et alors on peut trouver g, h holomorphes dans U' telles que $gf_1 + hf_2 \equiv 1$.

L'application $z = z(Z)$ définie par :

$$\begin{aligned} z_1 &= f_1(Z_1) - Z_2 \tilde{f}_2(Z_1) - g(Z_1) \sum_{j=3}^n Z_j \tilde{f}_j(Z_1), \\ z_2 &= f_2(Z_1) + Z_2 \tilde{f}_1(Z_1) - h(Z_1) \sum_{j=3}^n Z_j \tilde{f}_j(Z_1), \\ z_i &= f_i(Z_1) + Z_i \quad (i=3, \dots, n) \end{aligned}$$

est holomorphe dans $U' \times \mathbb{C}^{n-1}$, son jacobien est non nul sur $\bar{U} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^n$ (elle est précisément $\langle f'(Z_1), \tilde{f}(Z_1) \rangle = 1$), par suite elle est une immersion dans un voisinage de $\bar{U} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^n$. Puisqu'elle est aussi injective sur $\bar{U} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^n$, un raisonnement évident (indirect) donne qu'elle est biholomorphe dans un voisinage de $\bar{U} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^n$, et alors $z \mapsto Z$ est un changement holomorphe de coordonnées dans un voisinage V de $f(\bar{U})$.

Dans les nouvelles coordonnées Z on a $f(\zeta) = (\zeta, 0, \dots, 0)$. Soit R une fonction qui définit D dans le voisinage V de $f(\bar{U})$, c'est-à-dire $R : V \rightarrow \mathbb{R}$, $V \cap D = \{Z \in V : R(Z) < 0\}$, $dR \neq 0$ sur $V \cap \partial D$. Puisque dans le système z :

$$\tilde{f}(\zeta) = \zeta p(\zeta) \overline{\nu(f(\zeta))} = \zeta q(\zeta) R_z(f(\zeta)) \quad (\zeta \in \partial U),$$

où q est positive, on vérifie facilement que :

$$\begin{aligned} R_z(f(\zeta)) &= R_z(f(\zeta)) \frac{\partial z}{\partial Z}(f(\zeta)) \\ &= (\langle \tilde{f}(\zeta), f'(\zeta) \rangle \zeta^{-1} q(\zeta)^{-1}, 0, \dots, 0) \\ &= (\zeta^{-1} q(\zeta)^{-1}, 0, \dots, 0) \quad (\zeta \in \partial U). \end{aligned}$$

En posant $\hat{R}(Z) = q(Z_1) R(Z)$, on a $\hat{R}_z(f(\zeta)) = (\bar{\zeta}, 0, \dots, 0)$ pour $\zeta \in \partial U$. Donc, quant aux conditions 1 et 2, on pourrait prendre $w = Z$. Pourtant, pour satisfaire aux autres conditions, il faudra changer une nouvelle fois les coordonnées, tout en gardant les bonnes propriétés du système Z .

Supposons que $w = (w_1, \dots, w_n) = w(Z)$ sont des nouvelles coordonnées telles que $w = Z$ sur $f(\bar{U})$, c'est-à-dire $w(\zeta, 0, \dots, 0) = (\zeta, 0, \dots, 0)$. Alors :

$$(12) \quad w_{Z_i}(f(\zeta)) = (1, 0, \dots, 0)^t$$

(où t désigne transposé. Normalement nous ne distinguerons pas entre un vecteur et son transposé, mais à cette étape-ci ce formalisme sera utile). Si on

fait attention aussi à ce que :

$$(13) \quad (w_1)_Z(f(\zeta)) = (1, 0, \dots, 0),$$

sur \bar{U} , on aura dans le système w :

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= (\zeta, 0, \dots, 0) \quad (\zeta \in \bar{U}), \\ \hat{R}_w(f(\zeta)) &= (\bar{\zeta}, 0, \dots, 0) \quad (\zeta \in \partial U). \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\hat{R}_{w\bar{w}} = \left(\frac{\partial Z}{\partial w} \right)^* \hat{R}_{z\bar{z}} \frac{\partial Z}{\partial w},$$

où l'argument des fonctions (comme aussi dans la suite) est $f(\zeta)$, $\zeta \in \partial U$.
Vu (12) et (13) :

$$(14) \quad \hat{R}_{w'\bar{w}'} = \left(\frac{\partial Z'}{\partial w'} \right)^* \hat{R}_{z'\bar{z}'} \frac{\partial Z'}{\partial w'},$$

où on a posé :

$$w' = (w_2, \dots, w_n), \quad Z' = (Z_2, \dots, Z_n),$$

$$\hat{R}_{w'\bar{w}'} = (\hat{R}_{w_i\bar{w}_j})_{2 \leq i, j \leq n}, \quad \dots$$

La matrice $W = \hat{R}_{Z'\bar{Z}'}$ étant auto-adjointe et positive définie, d'après le théorème B, il y a une fonction H holomorphe dans un voisinage de \bar{U} , à valeurs dans $GL(n-1, \mathbb{C})$, telle que $W = H^* H$ sur ∂U . Définissons donc les nouvelles coordonnées par :

$$w_1 = Z_1, (w_2, \dots, w_n)^t = H(Z_1)(Z_2, \dots, Z_n)^t,$$

et soit :

$$r(w) = \beta(w) \hat{R}(w) \quad \text{où} \quad \beta(\zeta, 0, \dots, 0) = 1 \quad \text{si} \quad |\zeta| = 1,$$

et $\beta_{w_j}(\zeta, 0, \dots, 0)$ ($j = 1, \dots, n$) sont telles que $r_{w_i\bar{w}_j}(f(\zeta)) = 1$, resp. 0 si $j = 1$, resp. $j > 1$, $|\zeta| = 1$. Alors on a d'après (12), (13) et (14) $r_{w\bar{w}}(f(\zeta)) = I_n$ si $\zeta \in \partial U$.

Cela entraîne déjà $r_{w,w}(f(\zeta)) = 0$ si $\zeta \in \partial U$. En effet, choisissons un autre $\zeta' \in \partial U$. Alors :

$$\begin{aligned} (\zeta', 0, \dots, 0) &= r_w(f(\zeta')) = r_w(f(\zeta)) + r_{w\bar{w}_1}(f(\zeta))(\bar{\zeta}' - \bar{\zeta}) \\ &\quad + r_{w\bar{w}_1}(f(\zeta))(\zeta' - \zeta) + o(\zeta' - \zeta) \\ &= (\bar{\zeta}', 0, \dots, 0) + r_{w\bar{w}_1}(f(\zeta))(\zeta' - \zeta) + o(\zeta' - \zeta), \end{aligned}$$

si $\zeta' \rightarrow \zeta$, d'où $r_{w\bar{w}_1}(f(\zeta)) = 0$.

Donc, les conditions 1, ..., 4 sont satisfaites. Reste encore à estimer $\|r_{w'w'}(f(\zeta))\|$. Pour cela remarquons que la forte convexité de D entraîne :

$$\tau |v^* r_{z\bar{z}}(f(\zeta)) v| \geq |v^t r_{zz}(f(\zeta)) v|,$$

pour $v \in T_{f(\zeta)}^c(\partial D)$, avec un $\tau < 1$. Pour commodité supposons que pour un point ζ fixé $T_{f(\zeta)}^c(\partial D) = \{z : z_1 = 0\}$; alors on a :

$$(15) \quad \tau |u^* r_{z\bar{z}} u| \geq |u^t r_{zz} u|,$$

si $u \in \mathbb{C}^{n-1}$. (Les matrices sont toujours considérées dans le point $f(\zeta)$.) On vérifie que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z'}{\partial w'} \right)^* r_{z\bar{z}} \frac{\partial z'}{\partial w'} &= r_{w'\bar{w}'} = I_{n-1}, \\ \left(\frac{\partial z'}{\partial u'} \right)^t r_{z\bar{z}} \frac{\partial z'}{\partial u'} &= r_{u'u'}, \end{aligned}$$

d'où, en vertu de (15) :

$$|v^t r_{w'w'} v| \leq \tau |v|^2$$

pour $v \in \mathbb{C}^{n-1}$. $r_{w'w'}$ étant symétrique, cette inégalité équivaut à $\|r_{w'w'}\| \leq \sqrt{\tau} = \sigma$, ce qui achève la démonstration de la proposition 9 dans le cas analytique. Dans ce cas là les fonctions prétendument proches (selon 1, ..., 4) sont même identiques.

Si ∂D est seulement de classe C^4 , les mêmes formules définissent un changement de coordonnées $z \leftrightarrow w$ dans un voisinage fermé de $f(U)$. Pour obtenir un nouveau système de coordonnées dans un voisinage de $f(\bar{U})$, il sera plus commode de considérer $w \mapsto z$ comme une application F de l'ensemble $V_0 = \{w : |w_1| \leq 1, |w'| \leq \varepsilon_1\} \subset \mathbb{C}_w^n$ dans \mathbb{C}_z^n . Alors $F(w_1, 0, \dots, 0) = f(w_1)$. On vérifie sans peine que F est un C^1 -difféomorphisme sur V_0 et par suite elle préserve transversalité. En particulier, $f(\bar{U})$ est transverse à $\partial(F(V_0))$, où plus précisément la direction $\zeta f'(\zeta)$ est transverse à $\partial(F(V_0))$ dans le point $f(\zeta)$ ($\zeta \in \partial U$). Il en suit qu'en posant :

$$G(w) = F(w) + \varepsilon_2 w_1 f'(w_1),$$

avec $\varepsilon_2 > 0$ assez petit, $G(V_0)$ est un voisinage de $\overline{f(U)}$. On peut même choisir ε_2 si petit que G soit difféomorphe sur V_0 , et alors $W = G^{-1}(z)$ est un changement de coordonnées satisfaisant aux conditions de la proposition 9.

Dans la suite nous dirons qu'une famille $\{D_t\}$ des domaines à bord C^k dépend d'une façon C^k de $t \in (-a, a)$ s'il existe une fonction $\rho : \mathbb{C}^n \times (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k , telle que $D_t = \{z : \rho(z, t) < 0\}$ et $\text{grad}_z \rho(z, t) \neq 0$ si $z \in \partial D_t$.

PROPOSITION 10. — Soit $\{D_t\}_{|t| < b}$ une famille des domaines fortement convexes, à bord de classe C^k ($k=6, 7, \dots, \infty, \omega$), dépendant du paramètre t d'une façon C^k . Supposons que $f : \bar{U} \rightarrow \bar{D}_0$ est une application stationnaire. Alors pour t petit il existe des applications stationnaires $f_t : \bar{U} \rightarrow \bar{D}_t$ telles que $f_t(0) = f(0)$, $f'_t(0) = \lambda_t f'(0)$ ($\lambda_t > 0$). Ensuite, si $z_t \in \bar{D}_t \setminus \{f(0)\}$ dépend d'une façon C^{k-4} de t et $z_0 = f(\xi_*)$ avec $0 < \xi_* \leq 1$, alors il existe des applications stationnaires $\varphi_t : \bar{U} \rightarrow \bar{D}_t$, telles que $\varphi_t(0) = f(0)$, $\varphi_t(\xi_t) = z_t$ avec $0 < \xi_t \leq 1$. Finalement, l'application $t \mapsto f_t$, et, sous réserve que $\xi_* < 1$, les applications $t \mapsto \varphi_t$ et $t \mapsto \xi_t$, d'un voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ dans l'espace de Banach des n -uples des fonctions de $C^{5/2}(\bar{U})$ — resp. dans \mathbb{R} — sont de classe C^{k-4} . Sans l'hypothèse $\xi_* < 1$ on a encore que $t \mapsto \varphi_t$ et $t \mapsto \xi_t$ sont de classe C^1 .

Démonstration. — Puisque tout se passe dans un voisinage de $f(\bar{U})$, d'après la proposition 9, il est permis de supposer qu'en désignant par r une fonction définissant D_0 , les fonctions $f(\zeta)$ et $(\zeta, 0, \dots, 0)$, $r_z(f(\zeta))$ et $(\zeta, 0, \dots, 0)$, $r_{\bar{z}\bar{z}}(f(\zeta))$ et I_n , $r_{z\bar{z}}(f(\zeta))$ et $(0, \dots, 0)$ sont aussi proche qu'on veut, et $\|r_{z\bar{z}}(f(\zeta))\| < \sigma < 1$ pour $\zeta \in \partial U$. En particulier, l'indice de la fonction $v_1(f(\zeta)) \approx r_{z_1}(f(\zeta))$ est -1 , par suite $\tilde{f}_1(\zeta)$ ne s'annule pas dans \bar{U} , et \tilde{f}_j/\tilde{f}_1 est holomorphe ($j=1, \dots, n$).

Désignons par $v' = (v'_1, \dots, v'_n)$ le normal extérieur à ∂D_t ; pour t petit et $z \in \partial D_t$ dans un voisinage de $f(\partial U)$, l'application $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$ donnée par :

$$z \mapsto \left(z, \frac{\bar{v}'_2(z)}{\bar{v}'_1(z)}, \dots, \frac{\bar{v}'_n(z)}{\bar{v}'_1(z)} \right),$$

est définie. Soit M_t l'image de $\partial D_t \cap$ voisinage; c'est une famille de C^{k-1} -variétés, totalement réelles et difféomorphes à $\partial U \times \mathbb{R}^{2n-2}$. Vu la dépendance régulière de D_t en t , on peut trouver pour t petit des difféomorphismes $F_t : \mathbb{C}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$ tels que $F_t(M_t) = M_0$, que F_0 soit l'identité et que F_t soit de classe C^{k-1} par rapport à la variable t et aux variables de \mathbb{C}^{2n-1} .

Supposons que g_t est une famille continue des applications $1/2$ -hölderiennes $\bar{U} \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$, holomorphes dans U , telles que :

$$(16) \quad g_0 = f_* \stackrel{\text{def}}{=} (f, \tilde{f}_2/\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n/\tilde{f}_1)$$

et :

$$(17) \quad g_t(\partial U) \subset M_t.$$

On vérifie facilement qu'alors en désignant les premières n coordonnées d'un point $w \in \mathbb{C}^{2n-1}$ par w_a , $(g_t)_a$ est une application stationnaire $\bar{U} \rightarrow \bar{D}_t$ pour t petit. En effet, $(g_t)_a(\partial U) \subset \partial D_t$, la projection de $M_t \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n-1}$ sur \mathbb{C}^n étant D_t . Ensuite, les dernières $n-1$ coordonnées de g_t donnent des prolongements holomorphes $h_t^j : U \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions $\overline{v_1^j \{(g_t(\zeta))_a\}} / v_1^j \{(g_t(\zeta))_a\}$ définies pour $\zeta \in \partial U$ ($j=2, \dots, n$). Puisque l'indice de $v_1^1 \circ f : \partial U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est -1 , on peut définir $\log \overline{v_1^1 \{(g_t(\zeta))_a\}}$, et il existe une fonction $p_t : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\log \overline{v_1^1 \{(g_t(\zeta))_a\}} + \log p_t(\zeta)$ admet un prolongement holomorphe $\hat{h}_t : U \rightarrow \mathbb{C}$. Alors l'application :

$$(1, h_t^2, \dots, h_t^n) \exp \hat{h}_t : U \rightarrow \mathbb{C},$$

fournit un prolongement holomorphe de l'application $\zeta p_t(\zeta) \overline{v_1^1 \{(g_t(\zeta))_a\}}$.

Dans la suite nous démontrerons l'existence de familles g_t satisfaisantes à (16) et (17).

L'idée de la démonstration est linéariser (17), c'est-à-dire la dériver par rapport à t , et résoudre l'équation résultante. Cette dernière sera une équation différentielle à valeurs dans l'espace de Banach X des applications $\partial U \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$ de classe $C^{5/2}(\partial U)$, donc sa solution ne représentera aucune difficulté.

Introduisons quelques notations supplémentaires. Soit Y l'espace de Banach des matrices carrées d'ordre $2n-1$ dont les éléments sont des fonctions $\partial U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $C^{5/2}$. Les éléments de Y opèrent sur X : si $A \in Y$ et $x \in X$, alors $Ax \in X$ si l'on définit Ax par $(Ax)(\zeta) = A(\zeta)x(\zeta)$. Si h est une application $\mathbb{R} \rightarrow X$ ou Y , on écrit $\dot{h} = \dot{h}_t = dh/dt$. Enfin, si $H : \mathbb{C}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}^m$, posons pour bréveté $H' = \partial H / \partial w$ et $H^T = \partial H / \partial \bar{w}$, w étant la variable de \mathbb{C}^{2n-1} .

Dans la suite, pour t fixe, les fonctions g_t seront considérées comme des éléments de X (c'est-à-dire définies seulement sur ∂U), qui ont des prolongements holomorphes dans U . (Néanmoins, on va parler de $g_t(\zeta)$ même si $\zeta \in U$, cela signifiant la valeur du prolongement en ζ .) Alors la famille $\{g_t\}$ est une application $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$.

(17) s'écrit encore $F_t \circ g_t \in M_0$. Par suite, $(\partial(F_t \circ g_t) / \partial t)(\zeta)$ est un vecteur tangent à M_0 pour $\zeta \in \partial U$. Soient T_1, \dots, T_{2n-1} $2n-1$ champs de vecteurs

tangents à M_0 , indépendants en chaque point de M_0 , de régularité C^{k-2} . Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F_t \circ g_t) &= \dot{F}_t \circ g_t + (F'_t \circ g_t) \dot{g}_t + (\overline{F'_t \circ g_t}) \cdot \overline{\dot{g}_t} \\ &= \sum_{j=1}^{2n-1} \gamma_j (T_j \circ F_t \circ g_t) = (T \circ F_t \circ g_t) \gamma, \end{aligned}$$

où T est la matrice carrée d'ordre $2n-1$ dont les colonnes sont T_1, \dots, T_{2n-1} et les γ_j sont des fonctions réelles. Vu que M_0 est totalement réelle, les T_j sont indépendants sur \mathbb{C} et T est invertible. Donc :

$$\begin{aligned} (18) \quad 0 &= \text{Im} \{ (T^{-1} \circ F_t \circ g_t) (\dot{F}_t \circ g_t + (F'_t \circ g_t) \dot{g}_t + (\overline{F'_t \circ g_t}) \overline{\dot{g}_t}) \} \\ &= \text{Im} \{ (T^{-1} \circ F_t \circ g_t) (\dot{F}_t \circ g_t) + ((T^{-1} \circ F_t \circ g_t) (F'_t \circ g_t) \\ &\quad - \overline{(T^{-1} \circ F_t \circ g_t)} (\overline{F'_t \circ g_t})) \dot{g}_t \}. \end{aligned}$$

Définissons une application B d'un voisinage de $(0, f_*) \in \mathbb{R} \times X$ dans X par :

$$B(t, x) = (T^{-1} \circ F_t \circ x) (\dot{F}_t \circ x) \quad (t \in \mathbb{R}, x \in X)$$

et une application A d'un voisinage de $(0, f^*) \in \mathbb{R} \times X$ dans Y par :

$$A(t, x) = (T^{-1} \circ F_t \circ x) (F'_t \circ x) - \overline{(T^{-1} \circ F_t \circ x)} (\overline{F'_t \circ x}).$$

On vérifie que A et B sont de classe C^{k-5} . (18) s'écrit maintenant :

$$(19) \quad \text{Im} \{ A(t, g) \dot{g} + B(t, g) \} = 0.$$

Pour chaque solution $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ de cette équation telle que $g_0 = f_*$ et que $g_t : \partial U \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans U , $(g_t)_a$ est une application stationnaire $U \rightarrow D_t$. Donc il suffit de démontrer que (19) possède de telles solutions (qui satisfont encore à certaines conditions supplémentaires : $(g_t(0))_a = f(0)$, et $(g'_t(0))_a = \lambda_t f'(0)$ avec $\lambda_t > 0$ dans l'un des cas, $(g_t(\xi_t))_a = z_t$ dans l'autre).

Pour simplifier (19) nous cherchons un multiplicateur réel $R_1(t, x) : \partial U \rightarrow GL(2n-1, \mathbb{R})$ tel que (pour t, x fixé) l'application $R_1(t, x) A(t, x) : \partial U \rightarrow GL(2n-1, \mathbb{C})$ se prolonge en une application holomorphe $U \rightarrow GL(2n-1, \mathbb{C})$. Malheureusement, comme on le vérifiera plus loin, l'indice de $\det A(0, f_*(\zeta))$ est $-n$ au lieu d'être zéro, et par conséquent un tel R_1 ne peut pas exister même pour $(t, x) = (0, f^*)$.

Cependant, désignons par $E = E(\zeta)$ la matrice diagonale :

$$\begin{bmatrix} \zeta^{-1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \zeta^{-1} & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

où sur la diagonale il y a successivement n fois ζ^{-1} puis $n-1$ fois 1. Alors l'indice du déterminant de la matrice $E(\zeta) A^{-1}(0, f_*(\zeta))$ est zéro. De plus, on va montrer plus loin le :

Premier énoncé auxiliaire. — Il existe $R_1: \partial U \rightarrow GL(2n-1, \mathbb{R})$ et $H_1: \bar{U} \rightarrow GL(2n-1, \mathbb{C})$, de classe $C^{5/2}$, H_1 holomorphe dans U , telles que $EA^{-1}(0, f_*) R_1 = H_1$ sur ∂U .

En acceptant cet énoncé pour le moment, on conclut que, d'après le théorème A, pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times X$ proche de $(0, f_*)$ ils existent $R(t, x): \partial U \rightarrow GL(2n-1, \mathbb{R})$ et $H(t, x): \bar{U} \rightarrow GL(2n-1, \mathbb{C})$, de classe $C^{5/2}$, $H(t, x)$ holomorphe dans U , $R(t, x)(1) = I_{2n-1}$, telles que

$$EA^{-1}(t, x) R(t, x) = H(t, x).$$

En plus l'application $(t, x) \mapsto H(t, x) \in Y$ est C^{k-5} .

(19) équivaut à :

$$(20) \quad \text{Im } H^{-1}(t, g) E \dot{g} = \beta(t, g),$$

avec $\beta(t, x) = -\text{Im } R^{-1}(t, x) B(t, x)$. Or les solutions de (20) qui nous intéressent sont telles que g_t est holomorphe dans \bar{U} et $(g_t(0))_a = f(0)$, donc $(\dot{g}_t(0))_a = 0$. Ceci entraîne que $E \dot{g}_t$ est holomorphe dans U et par suite le premier membre de (20) est la partie imaginaire d'une application holomorphe.

Pour (t, x) fixé, complétons $i\beta(t, x)$ en une fonction holomorphe $\gamma(t, x)$, i.e. soit $\gamma(t, x): \partial U \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$ la fonction qui se prolonge en une fonction holomorphe dans U , $\text{Re } \gamma(t, x)(0) = 0$ et $\text{Im } \gamma(t, x)(\zeta) = \beta(t, x)(\zeta)$ si $\zeta \in \partial U$. Des propriétés bien connues de la transformation de Hilbert assurent que γ est une application de classe C^{k-5} d'un voisinage de $(0, f_*) \in \mathbb{R} \times X$ dans X .

(car β l'est). Alors (20) équivaut à :

$$(21) \quad H^{-1}(t, g) E \dot{g} = \gamma(t, g) + u(t),$$

où $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ est une application arbitrairement choisie.

Occupons-nous d'abord de l'existence des applications f_t de la proposition. Pour cela il faudrait choisir $u(t)$ de telle façon que $(Eg)_a(0) = \mu_t f'(0)$ ($\mu_t \in \mathbb{R}$). Considérons pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times X$ proche de $(0, f_*)$ l'application affine $L = L(t, x)$ définie par :

$$(22) \quad L: \mathbb{R}^{2n-1} \quad u \mapsto (H(t, x) \gamma(t, x))_a(0) + (H(t, x)(0)u)_a \in \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}.$$

On va montrer plus loin le :

Deuxième énoncé auxiliaire. — Pour $(t, x) = (0, f_*)$ le sous-espace $L(\mathbb{R}^{2n-1}) \subset \mathbb{R}^{2n}$ est de dimension $2n-1$ et n'est pas parallèle à $f'(0)$.

Autrement dit, $L(\mathbb{R}^{2n-1})$ et $f'(0)$ engendrent \mathbb{R}^{2n} . Par suite il en est de même pour (t, x) proche de $(0, f_*)$; donc pour un tel couple il existe $u(t, x) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tel que :

$$(H(t, x) \gamma(t, x) + H(t, x) u(t, x))_a(0) = \mu f'(0),$$

avec $\mu = \mu(t, x) \in \mathbb{R}$. Cette dernière formule détermine $u(t, x)$ sans équivoque et l'application $\mathbb{R} \times X \quad (t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbb{R}^{2n-1} \subset X$ est C^{k-5} , proche de $(0, f_*)$. ($\mathbb{R}^{2n-1} \subset X$ car on peut considérer un $u_0 \in \mathbb{R}^{2n-1}$ comme une application constante $\partial U \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$.)

Tout compte fait, si $g = g_t$ est une solution de l'équation :

$$(23) \quad \begin{cases} \dot{g} = E^{-1} H(t, g) (\gamma(t, g) + u(t, g)), \\ g_0 = f_*. \end{cases}$$

alors $(g_t)_a = f_t$ est une famille des applications stationnaires $\overline{U} \rightarrow \overline{D}_t$ telles que $f_t(0) = f(0)$ et $f'_t(0) = \lambda_t f'(0)$ ($\lambda_t > 0$).

(23) est une équation différentielle ordinaire dans un espace de Banach dont le deuxième membre est une fonction de classe C^{k-5} de t et g . Donc elle admet une solution (unique) $g: (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow X$, de classe C^{k-4} , ce qui achève la démonstration du premier cas de la proposition.

Occupons-nous maintenant des applications stationnaires $\varphi_t: U \rightarrow D_t$ telles que $\varphi_t(0) = f(0)$, $\varphi_t(\xi_t) = z$, avec $\xi_t > 0$. Le fait que la valeur initiale de ξ_t , ξ_* peut se trouver éventuellement au bord du domaine de définition de $\varphi_0 = f$, nous obligera de procéder d'une façon circonstanciée. Ainsi, au lieu de X

nous introduisons l'espace de Banach X_0 des applications $U' = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq 2\} \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$, de classe $C^{3/2}$, qui sont holomorphes dans U et de classe $C^{5/2}$ sur \bar{U} ; la norme dans X_0 étant la somme de la $C^{3/2}$ norme sur U' et de la $C^{5/2}$ norme sur \bar{U} . Nous allons transformer légèrement l'équation (21) afin qu'elle puisse être regardée comme une équation différentielle dans X_0 . Posons $K(t; x) = E^{-1} H(t, x) \gamma(t, x)$, $J(t, x) = E^{-1} H(t, x)$, alors (21) s'écrit encore :

$$(24) \quad \dot{g} = K(t, g) + J(t, g) u(t).$$

Puisque la restriction d'une fonction $x \in X_0$ à ∂U appartient à X , K et J peuvent être considérées comme des applications $\mathbb{R} \times X_0 \rightarrow X$. En plus, pour t, x fixé, les applications $K(t, x)$ et $J(t, x)$ se prolongent en des applications holomorphes dans U . Prolongeons-les aussi à $U \setminus \bar{U}$ de telle manière que pour $\zeta \in \partial U$, $K(t, x)(r\zeta)$ et $J(t, x)(r\zeta)$ soient des fonctions différentiables de $r \in (0, 2)$, linéaires si $r \in [1, 2]$. On utilisera les mêmes lettres, $K(t, x)$ et $J(t, x)$ pour désigner les prolongements. Il est facile de vérifier qu'alors $K(t, x)$ et $J(t, x)$ sont de classe $C^{3/2}$ dans U' ; de plus, K et J sont maintenant des applications $\mathbb{R} \times X_0 \rightarrow X_0$, de classe C^{k-5} (car H et γ sont C^{k-5} , et la restriction et le prolongement, étant des opérations linéaires, sont C^∞).

Pour considérer (24) comme une équation dans X_0 il suffit maintenant de prolonger g_t de la même façon que $K(t, x)$ et $J(t, x)$, c'est-à-dire en une fonction holomorphe dans U , linéaire sur les « rayons » $\{r\zeta : 1 \leq r \leq 2\}$ ($\zeta \in \partial U$). Nous allons démontrer qu'avec une $u(t)$ bien choisie, (24) admet une solution g telle que $(g_t(\xi_t))_a = z_t$ avec $0 < \xi_t \leq 1$.

En dérivant cette dernière égalité on obtient :

$$(\dot{g}_t(\xi_t) + \xi_t g'_t(\xi_t))_a = \dot{z}_t.$$

Motivés par ceci, considérons pour $(t, x, \xi) \in \mathbb{R} \times X_0 \times \mathbb{R}$ fixé, proche de $(0, f_*, \xi_*)$, l'application affine $L' = L'(t, x, \xi) : \mathbb{R}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$$v \mapsto (K(t, x)(\xi) + J(t, x)(\xi) v)_a.$$

Deuxième énoncé auxiliaire bis. — Pour $(t, x, \xi) = (0, f_*, \xi_*)$, $L'(\mathbb{R}^{2n-1})$ est un hyperplan non parallèle à $f'(\xi_*)$.

Par conséquent, si $(t, x, \xi) \in \mathbb{R} \times X_0 \times \mathbb{R}$ est assez proche de $(0, f_*, \xi_*)$, ils existent $v(t, x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ et $\rho(t, x, \xi) \in \mathbb{R}$ tels que :

$$(K(t, x)(\xi) + J(t, x) v(t, x, \xi) + \rho(t, x, \xi) x'(\xi))_a = \dot{z}_t.$$

Les fonctions ρ, v sont en général seulement $C^{1/2}$, mais elles sont de classe C^{k-5} dès que ξ reste dans le segment $(0, 1)$ (car il en est de même pour les fonctions $(t, x, \xi) \mapsto K(t, x)(\xi), J(t, x)(\xi)$ et $x'(\xi)$). On les a choisies de telle façon que la solution de l'équation :

$$(25) \quad \begin{cases} \dot{g} = K(t, g) + J(t, g) v(t, g, \xi), \\ \dot{\xi} = \rho(t, g, \xi), \\ g_0 = f_*, \quad \xi_0 = \xi_*, \end{cases}$$

détermine des applications stationnaires $\varphi_t (= (g_t)_a|_{\bar{U}}) : \bar{U} \rightarrow \bar{D}_t$, et que pour cette solution $(g_t(0))_a = f(0)$ et $(g_t(\xi_t))_a = z_t, \xi_t > 0$.

Puisque (25) est une équation différentielle ordinaire dans $X_0 \times \mathbb{R}$, avec K, J, v, ρ de classe $C^{1/2}$, elle admet une solution $(g, \xi) : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow X_0 \times \mathbb{R}$ de classe $C^{3/2}$. Nous prétendons que $\xi_t \leq 1$. En effet $\varphi_t = (g_t)_a|_{\bar{U}}$ étant stationnaire, la courbe $\{(g_t(r))_a : 0 < r \leq 2\}$ est transverse à ∂D_t (voir la proposition 6). Puisque D_t est convexe, et $\{(g_t(r))_a : 1 < r \leq 2\}$ est un segment, ce segment ne rencontre pas \bar{D}_t . Vu que $(g_t(\xi_t))_a = z_t \in \bar{D}_t$, cela entraîne $\xi_t \leq 1$. Donc $\varphi_t(\bar{U})$ est stationnaire dans \bar{D}_t et passe par les points $f(0)$ et z_t .

Finalement, remarquons que si $\xi_* < 1$, alors K, J, v et ρ sont de classe C^{k-5} au voisinage de $(0, f_*, \xi_*)$; par suite l'application $t \mapsto (g_t, \xi_t)$ est même de classe C^{k-4} , et il en est de même pour l'application $t \rightarrow \varphi_t$. Cela termine la démonstration de l'existence et de la régularité (comme fonctions de t) de φ_t, ξ_t .

Démonstration du premier énoncé auxiliaire. — On va calculer $EA^{-1}(0, f_*) = E(T \circ f_*)$. Dans le cas spécial où D_0 est la boule d'unité, il sera facile de trouver un multiplicateur explicite R_0 à $W_0 = E(T \circ f_*)$ et puis pour un D_0 quelconque on verra que le théorème A est applicable.

Pour calculer T , considérons les $2n-1$ champs de vecteurs tangents à ∂D_0 :

$$\begin{aligned} v_1 &= ir_{\bar{z}}, \\ v_j &= (-r_{z_j}, 0, \dots, r_{z_j}, 0, \dots, 0), \\ v_{n+j-1} &= (-ir_{z_j}, 0, \dots, ir_{z_j}, 0, \dots, 0), \quad j=2, \dots, n \end{aligned}$$

(dans l'expression de v_j , resp. v_{n+j-1}, r_{z_j} , resp. ir_{z_j} , vient après $j-1$ zéros). Le différentiel du plongement $D_0 \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$ les envoie dans les vecteurs :

$$\tilde{v}_1 = \left(v_1, \sum_h \left(ir_{\bar{z}_h} \frac{\partial}{\partial z_h} - ir_{z_h} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h} \right) \left(\frac{r_{z'}}{r_{z_1}} \right) \right),$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}_j &= \left(v_j, \left(r_{z_1} \frac{\partial}{\partial z_j} + r_{\bar{z}_1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - r_{z_j} \frac{\partial}{\partial z_1} - r_{\bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) \left(\frac{r_{z'}}{r_{z_1}} \right) \right), \\ \tilde{v}_{n+j-1} &= \left(v_{n+j-1}, i \left(r_{z_1} \frac{\partial}{\partial z_j} - r_{\bar{z}_1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - r_{z_j} \frac{\partial}{\partial z_1} + r_{\bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) \left(\frac{r_{z'}}{r_{z_1}} \right) \right),\end{aligned}$$

pour $j=2, \dots, n$. Ici on a posé $r_z = (r_{z_1}, \dots, r_{z_n})$.

T est la matrice, dont les colonnes sont les transposes des vecteurs $\tilde{v}_j (j=1, 2, \dots, 2n-1)$. Par exemple, lorsque D_0 est la boule d'unité et $f(\zeta) = (\zeta, 0, \dots, 0)$, cela donne :

$$E(\zeta) T(f_*(\zeta)) = W_0(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} i & & & & & \\ & \zeta^{-2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \zeta^{-2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \zeta^2 \\ & i\zeta^{-2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & i\zeta^{-2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -i\zeta^2 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & -i\zeta^2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} n-1 \\ \\ \\ n-1 \end{array} \right.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n-1}$

où à part les $4n-3$ éléments indiqués on n'a que des zéros. Dans la suite une telle matrice sera écrite en blocs, par exemple :

$$W_0(\zeta) = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^{-2} I_{n-1} & i\zeta^{-2} I_{n-1} \\ 0 & \zeta^2 I_{n-1} & -i\zeta^{-2} I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Posons :

$$\zeta^2 = e^{i\vartheta} \quad \text{et} \quad R_0(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \cos \vartheta & -I_{n-1} \sin \vartheta \\ 0 & I_{n-1} \sin \vartheta & I_{n-1} \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

On vérifie que $W_0 R_0 = H_0$ est holomorphe dans U (en effet, elle est constante). On a :

$$H_0^{-1}(\zeta) = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I_{n-1} & \frac{1}{2} I_{n-1} \\ 0 & -\frac{i}{2} I_{n-1} & \frac{i}{2} I_{n-1} \end{pmatrix}$$

Si D_0 est arbitraire, l'expression de $W_1(\zeta) = E(\zeta) T(f_*(\zeta))$ est assez compliquée. Afin de la simplifier, supprimons-y les dérivées r_{z_j} pour $j=2, \dots, n$, $r_{z_j \bar{z}_k}$ pour $j \neq k$, et $r_{z_j \bar{z}_j}$ pour $j=1, \dots, n$; remplaçons ensuite r_{z_j} par ζ et $r_{z_j \bar{z}_j}$ par 1 pour $j=1, \dots, n$. Ainsi on obtient la matrice :

$$W(\zeta) = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^{-2} I_{n-1} & i\zeta^{-2} I_{n-1} \\ 0 & \zeta^2 I_{n-1} + r_{z'z'}(f(\zeta)) & -i\zeta^2 I_{n-1} + ir_{z'z'}(f(\zeta)) \end{pmatrix}$$

$$= W_0(\zeta) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(\zeta) & iP(\zeta) \end{pmatrix},$$

où $P(\zeta) = r_{z'z'}(f(\zeta))$. D'après la proposition 9, pour un choix approprié des coordonnées, $\|P(\zeta)\| \leq \sigma < 1$ et $\|W_1(\zeta) - W(\zeta)\| < \varepsilon$, avec σ fixe et ε arbitrairement petit. On vérifie par un calcul immédiat que :

$$\sup_{\zeta \in \partial U} [H_0^{-1}(W - W_0)(\zeta)] \leq \sigma/\sqrt{2}.$$

Si $\varepsilon < 1 - \sigma$, on conclut que :

$$\sup_{\zeta \in \partial U} [H_0^{-1}(W_1 - W_0)(\zeta)] < 1/\sqrt{2}.$$

Vu que $R_0(\zeta)$ est une matrice orthogonale, cela entraîne la condition (11) du théorème A, et, selon ce théorème, l'existence du multiplicateur R_1 pour W_1

C.Q.F.D.

Démonstration du deuxième énoncé auxiliaire. — Il suffit de montrer que l'application linéaire :

$$\Lambda : \mathbb{R}^{2n-1} \ni u \mapsto (H_1(0)u)_a \in \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n},$$

est injective et que $f'(0) \notin \Lambda(\mathbb{R}^{2n-1})$, H_1 étant le prolongement holomorphe de $W_1 R_1$ de plus haut. Puisque $f(\zeta) \approx (\zeta, 0, \dots, 0)$, $f'(0)$ et $(1, 0, \dots, 0)$ sont très proches; en modifiant un petit peu le système de coordonnées, on peut supposer que $f'(0) = (1, 0, \dots, 0)$. En ce cas-là il nous faut démontrer que si $(H(0)u)_a = (s_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ avec $s_1 \in \mathbb{R}$, alors $u = 0$.

Supposons que $H_1(0)u = (s_1, 0, \dots, 0, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^{2n-1}$. Alors :

$$H_0^{-1} H_1(0)u = (-is_1, s_2/2, \dots, s_n/2, is_2/2, \dots, is_n/2),$$

par suite :

$$|\operatorname{Im} H_0^{-1} H_1(0) u|^2 = |\operatorname{Re} H_0^{-1} H_1(0) u|^2 + |s_1|^2,$$

ce qui contredit à (11') à moins que $u=0$.

La démonstration du deuxième énoncé auxiliaire *bis* se faisant par une voie complètement analogue, elle sera omise.

En choisissant D_t de la forme spéciale $D_t = f(0) - Z_t + D_0$, où $\{Z_t\}$ est une courbe de classe C^k dans D_0 , $Z_0 = f(0)$, on conclut que pour t petit il existe des applications stationnaires $\varphi_t: \bar{U} \rightarrow \bar{D}_0$ telles que $\varphi_t(0) = Z_t$, $\varphi_t(\xi_t) = z_t$ avec $\xi_t > 0$. De plus les applications $t \mapsto \varphi_t \in C^{5/2}(\bar{U})$, $t \mapsto \xi_t \in \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , et même de classe C^{k-4} si $z_0 \in D$.

Ajoutons encore que dans la proposition 10 il est possible de donner une minoration du domaine de définition des fonctions $t \mapsto f_t$, $t \mapsto \varphi_t$, $t \mapsto \xi_t$, ainsi que d'estimer localement leurs dérivées d'ordre j ($1 \leq j \leq k-4$, si $\xi_* < 1$, $j \leq 1$ dans le cas général) en termes de D_0 , f , ξ_* et les dérivées d'ordre $\leq j+1$ de $F_t(w)$ et z_t . Il en est de même pour les applications φ_t , ξ_t de la remarque précédente, ce qui entraîne la :

PROPOSITION 11. — Soit D fortement convexe, ∂D de classe C^k ($k=6, \dots, \infty, \omega$). Pour $Z \in D$, $z \in \bar{D}$, $z \neq Z$, soit $\varphi_{Z,z}: \bar{U} \rightarrow \bar{D}$ l'application stationnaire telle que $\varphi_{Z,z}(0) = Z$, $\varphi_{Z,z}(\xi) = z$, avec $\xi = \xi_{Z,z} > 0$. Alors les applications $(Z, z) \mapsto \varphi_{Z,z} \in C^{5/2}(\bar{U})$ et $(Z, z) \mapsto \xi_{Z,z} \in \mathbb{R}$ sont définies sur un sous-ensemble relativement ouvert de $D \times \bar{D} \setminus \text{diagonal}$, et elles sont de classe C^1 . A l'intérieur de cet ouvert relatif elles sont même de classe C^{k-4} .

Remarquons que d'après la proposition 8, $\varphi_{Z,z}$, si elle existe, est unique.

Démonstration. — Considérons l'application $(Z, z) \mapsto \varphi_{Z,z}$ comme une application Φ définie sur un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^{4n} \approx \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. D'après ce qu'on vient de remarquer, les dérivées partielles d'ordre $j \leq k-4$ de Φ existent et sont localement uniformément bornées à l'intérieur de S . Il en suit que $\Phi \in C^{k-4}(\text{int } S)$. D'une manière analogue on montre $\Phi \in C^1(S)$.

On a également la :

PROPOSITION 11'. — Soit D fortement convexe, ∂D de classe C^k ($k=6, \dots, \infty, \omega$). Pour $z \in D$, $0 \neq v \in T_z(D)$ soit $f_{z,v}: \bar{U} \rightarrow \bar{D}$ l'application stationnaire telle que $f_{z,v}(0) = z$, $f'_{z,v}(0) = \lambda v$, $\lambda > 0$. Alors pour z fixé, l'application $0 \neq v \mapsto f_{z,v} \in C^{5/2}(\bar{U})$ est de classe C^{k-4} .

L'application $(z, v) \mapsto f_{z,v}$ est C^{k-4} , elle aussi, mais nous n'avons pas besoin de ce fait.

7. Estimation hölderienne des applications stationnaires

Dans ce chapitre on va donner une estimation uniforme de la norme hölderienne d'ordre $1/2$ des applications stationnaires en fonction des courbures et du diamètre de ∂D et de la distance de $f(0)$ à ∂D .

PROPOSITION 12. — Soit $f: \bar{U} \rightarrow \bar{D}$ une application stationnaire. Alors :

$$(26) \quad \text{dist}(f(\zeta), \partial D) \leq C_1 (1 - |\zeta|) \quad (\zeta \in U),$$

la constante C_1 étant uniforme lorsque le diamètre et les courbures normales de ∂D ainsi que la distance de $f(0)$ à ∂D restent entre deux nombres positifs.

Démonstration. — Soit $\rho > 0$ plus petit que les courbures normales de ∂D . Il est facile à voir qu'il existe une constante C_2 telle que $\delta(f(0), z) < C_2$ si $\text{dist}(z, \partial D) \geq \rho$.

Soit maintenant $\zeta \in U$. Si $\text{dist}(f(\zeta), \partial D) \geq \rho$, on a :

$$(27) \quad \delta(f(0), f(\zeta)) < C_3 - \log \text{dist}(f(\zeta), \partial D),$$

avec $C_3 = C_2 + \log \text{diam } D$. Si $\text{dist}(f(\zeta), \partial D) < \rho$, désignons par Z le point le plus proche de $f(\zeta)$ sur ∂D , et par z le centre de la boule $b \subset D$, de rayon ρ , tangent à ∂D en Z . Alors :

$$(28) \quad \begin{aligned} \delta(f(0), f(\zeta)) &\leq \delta(f(0), z) + \delta(z, f(\zeta)) \\ &< C_2 + \delta_b(z, f(\zeta)) < C_4 - \log \text{dist}(f(\zeta), \partial D). \end{aligned}$$

Puisque $f(U)$ est le disque extrémal déterminé par $f(0)$ et $f(\zeta)$:

$$\delta(f(0), f(\zeta)) = \log \frac{1 + |\zeta|}{1 - |\zeta|} \geq -\log(1 - |\zeta|).$$

En vertu de cela, (27) et (28) entraînent (26).

PROPOSITION 13. — Soit $f: \bar{U} \rightarrow \bar{D}$ stationnaire. Alors :

$$(29) \quad |f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq C_5 |\zeta_1 - \zeta_2|^{1/2} \quad (\zeta_1, \zeta_2 \in U),$$

où C_5 est uniforme sous les mêmes conditions que dans la proposition 12.

Démonstration. — On fait observer d'abord que si g est une application holomorphe de U dans la boule :

$$B = \{z : |z - z_0| < R\} \quad \text{et} \quad |g(0) - z_0| = r,$$

alors $|g'(0)| \leq (R^2 - r^2)^{1/2}$. C'est le lemme de Schwarz si $r=0$; le cas général se ramène à ce cas spécial à l'aide d'un automorphisme de B .

Soit maintenant $\zeta_0 \in U$. Désignons par Z le point le plus proche de $f(\zeta_0)$ sur ∂D , et par B la plus petite boule tangente à ∂D en Z , qui contient D . Soit ensuite :

$$h(\zeta) = f\left(\frac{\zeta_0 - \zeta}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}\right).$$

Alors $h(U) \subset B$, $h(0) = f(\zeta_0)$. La remarque précédente permet d'estimer $h'(0)$:

$$|h'(0)| \leq C_6 |f(\zeta_0) - Z|^{1/2},$$

d'où :

$$|f'(\zeta_0)| = \frac{1}{1 - |\zeta_0|^2} |h'(0)| \leq C_7 \frac{\text{dist}(f(\zeta_0), \partial D)^{1/2}}{1 - |\zeta_0|}.$$

En raison de la proposition 12, on a donc :

$$(30) \quad |f'(\zeta)| \leq C_8 (1 - |\zeta|)^{-1/2} \quad (\zeta \in U).$$

Or, d'après un théorème de Hardy et Littlewood déjà cité, pour n'importe quelle fonction holomorphe dans U cette dernière inégalité et (29) sont équivalentes (voir G. M. GOLUZIN [6], p. 453-455). (D'ailleurs, pour l'implication (30) \Rightarrow (29) il n'est même pas nécessaire que f soit holomorphe.)

PROPOSITION 14. — Soit $f: \bar{U} \rightarrow \bar{D}$ stationnaire. Alors :

$$(31) \quad 0 < C_9 < \langle f'(\zeta), \overline{\zeta v(f(\zeta))} \rangle = p(\zeta)^{-1} < C_{10} \quad (\zeta \in \partial U),$$

C_9 et C_{10} étant uniformes sous les mêmes conditions que dans la proposition 12.

Démonstration. — Pour l'estimation supérieure considérons deux points, $\zeta \in \partial U$ et $\zeta_1 = (1 - \varepsilon)\zeta$ avec $\varepsilon > 0$ petit. On peut supposer que $v(f(\zeta)) = (1, 0, \dots, 0)$ et $f(\zeta) = 0$. Alors les points $z = (z_1, \dots, z_n) \in D$ satisfont à $\text{Re } z_1 < 0$, et si f_1 est la première composante de f , $f_1(U) \subset \{z_1 \in \mathbb{C} : \text{Re } z_1 < 0\}$. D'après (la forme invariante du) lemme de Schwartz :

$$|f'_1(\zeta_1)| \leq 2 \frac{|\text{Re } f_1(\zeta_1)|}{1 - |\zeta_1|^2} \sim 2 \frac{\text{dist}(f(\zeta_1), \partial D)}{1 - |\zeta_1|^2},$$

lorsque $\zeta_1 \rightarrow \zeta$. Or cette dernière quantité est $\leq 2C_1$ en raison de la proposition 12. En faisant $\zeta_1 \rightarrow \zeta$, on obtient l'estimation supérieure de (31), car $\langle f'(\zeta), \overline{v(f(\zeta))} \rangle = f'_1(\zeta)$.

Quant à l'autre moitié de (31), considérons la fonction sous-harmonique $v: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $v(\zeta) = -\text{dist}(f(\zeta), \partial D)$. Alors v atteint son maximum dans les points de la circonférence ∂U , où il est différentiable. Nous allons reprendre une démonstration d'un lemme de E. Hopf sur la dérivée normale d'une telle v , en explicitant les constantes qui y interviennent.

Désignons par d le diamètre de D et par b la distance entre $f(0)$ et ∂D . D'après le lemme de Schwarz :

$$|f(\zeta) - f(0)| \leq b/2 \quad \text{si} \quad |\zeta| \leq b/2d;$$

donc :

$$M(x) = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} v(e^{x+it}) \leq -b/2 \quad \text{si} \quad x \leq \log(b/2d).$$

M étant une fonction convexe de $x \leq 0$, qui s'annule pour $x=0$, on a pour $\log(b/2d) \leq x \leq 0$:

$$M(x) \leq -\frac{xb}{2 \log(b/2d)}.$$

Par suite, si on choisit un $\zeta \in \partial U$ fixé, la fonction $v(\zeta e^x)$ satisfait à la même inégalité. D'ici :

$$\frac{-b}{2 \log(b/2d)} \leq \left. \frac{dv(\zeta e^x)}{dx} \right|_{x=0} = \langle \zeta f'(\zeta), \overline{v(f(\zeta))} \rangle,$$

C.Q.F.D.

PROPOSITION 15. — Si $f: \bar{U} \rightarrow \bar{D}$ est stationnaire, alors :

$$(32) \quad |p(\zeta_1) - p(\zeta_2)| \leq C_{11} |\zeta_1 - \zeta_2|^{1/2} \quad (\zeta_1, \zeta_2 \in \partial D),$$

C_{11} étant uniforme sous les conditions précisées dans la proposition 12.

Démonstration. — Il suffit de démontrer qu'il existe une $C_{12} > 0$ uniforme telle que (32) est vrai sous réserve que $|\zeta_1 - \zeta_2| < C_{12}$. Soit donc $\zeta_1 \in \partial U$. Il est permis de supposer que $v_1(f(\zeta_1)) = 1$.

Choisissons $C_{12} \in (0, 1/4)$ de telle façon que $|v_1(f(\zeta)) - 1| < 1/2$ si $|\zeta - \zeta_1| \leq 2C_{12}$. Vu la uniforme hölder-continuité de f , et donc de $v \circ f$, C_{12} sera uniforme.

Construisons ensuite une $\varphi : \partial U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

1. $\varphi(\zeta) = \overline{v_1(f(\zeta))}$ si $|\zeta - \zeta_1| \leq 2C_{12}$;
2. $|\varphi(\zeta) - 1| < 1/2$ si $\zeta \in \partial U$;
3. la norme hölderienne d'ordre $1/2$ de φ soit égale à celle de $v \circ f$.

Soit $r : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction conjuguée à $\text{Im log } \varphi$, c'est-à-dire telle que $r + i \text{Im log } \varphi$ se prolonge en une fonction holomorphe dans U , qui prend une valeur imaginaire à l'origine. D'après le théorème de Privaloff déjà cité, la $1/2$ -hölder-continuité de $\log \varphi$ entraîne celle de r ; de plus, la $1/2$ -hölder norme de r sera uniformément bornée. Donc en posant :

$$q = r - \text{Re log } \varphi, \quad |q(\zeta) - q(\zeta')| \leq C_{13} |\zeta - \zeta'|^{1/2},$$

et en outre $q + \log \varphi$ se prolonge en une fonction $h : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$, $1/2$ -hölder-continue, holomorphe dans U .

Considérons les fonctions $g = \tilde{f}_1 \exp(-h)$ et $G(\zeta) = g(\zeta)/\zeta$. Elles sont holomorphes dans U (à un pôle près en ce qui concerne G). En outre, vu que :

$$\tilde{f}_1(\zeta) = \zeta p(\zeta) \overline{v_1(f(\zeta))} \quad \text{si } \zeta \in \partial U,$$

et que p est uniformément bornée, g elle-même est uniformément bornée. Par conséquent, il en est de même pour G sur l'ensemble $\bar{U} \cap U_1$, où $U_1 = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \zeta_1| < 2C_{12}\}$.

Observons que G se prolonge holomorphiquement à travers l'arc $U_1 \cap \partial U$, car elle y prend des valeurs réelles. Le prolongement sera uniformément borné sur U_1 . Par suite, G est uniformément lipschitzienne sur les sous-ensembles compacts de U_1 , en particulier :

$$|G(\zeta_1) - G(\zeta_2)| \leq C_{14} |\zeta_1 - \zeta_2|^{1/2} \quad \text{si } |\zeta_2 - \zeta_1| < C_{12}.$$

D'ici, vu la hölder-continuité uniforme de $\exp h$ et de $v_1 \circ f$, on obtient l'estimation désirée pour $p = (G \exp h) / \overline{v_1 \circ f}$.

PROPOSITION 16. — Si $f : \bar{U} \rightarrow \bar{D}$ est stationnaire, alors :

$$(33) \quad |\tilde{f}(\zeta_1) - \tilde{f}(\zeta_2)| \leq C_{15} |\zeta_1 - \zeta_2|^{1/2} \quad (\zeta_1, \zeta_2 \in \bar{U}),$$

avec C_{15} uniforme sous les conditions précisées dans la proposition 12.

Démonstration. — D'après les propositions 13 et 15 on sait déjà (33) si $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial U$. En raison d'un théorème de Hardy et Littlewood ([6], p. 453-455), cela entraîne (33) pour $\zeta_1, \zeta_2 \in \bar{U}$.

8. Démonstration des théorèmes 2, 3 et 4 dans le cas où ∂D est fortement convexe et de classe C^6 au moins

Démonstration du théorème 2. — Soit D fortement convexe, ∂D de classe C^6 , $Z, z \in D$ ($Z \neq z$). On peut supposer que $0 \in D \subset B_n$. Considérons les domaines $D_t = tD + (1-t)B_n$, $0 \leq t \leq 1$. Alors $D_t \supset D$ est fortement convexe, ∂D_t est de classe C^6 ; de plus, le diamètre et les courbures normales de ∂D_t ainsi que la distance entre Z et ∂D_t sont compris entre deux constantes positives (indépendantes de t). Considérons l'ensemble T des $t \in [0, 1]$ tels qu'il existe une application stationnaire :

$$f_t : \bar{U} \rightarrow \bar{D}_t \quad \text{avec} \quad f_t(0) = Z, \quad f_t(\xi) = z (\xi = \xi_t > 0).$$

Évidemment $0 \in T$. D'après la proposition 10, T est ouvert dans $[0, 1]$. On va montrer qu'il est aussi fermé.

En effet, soient $t_j \in T$, $t_j \rightarrow t$. En raison des propositions 13 et 16, les applications f_{t_j}, \tilde{f}_{t_j} sont uniformément bornées dans l'espace $C^{1/2}(\bar{U})$. D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, on peut tirer une suite partielle $\{s_j\} \subset \{t_j\}$ telle que les limites $\lim f_{s_j} = g$ et $\lim \tilde{f}_{s_j} = G$ existent dans la topologie $C(\bar{U})$. On vérifie aisément qu'alors $g : \bar{U} \rightarrow \bar{D}_t$ est une application stationnaire, $g(0) = Z$, $g(\xi') = z$ avec un $\xi' > 0$.

Donc T est fermé, par suite $1 \in T$, i.e. il existe une application stationnaire $f : U \rightarrow D$ telle que $f(0) = Z$, $f(\xi'') = z$ ($\xi'' > 0$). Mais alors d'après la proposition 4, f est l'extrémale unique déterminée par Z, z ; ou d'une façon plus générale, le disque $f(U)$ est le disque extrémal unique déterminé par n'importe quel couple $w_1, w_2 \in f(U)$ ($w_1 \neq w_2$), ou encore par un point $f(\omega)$ quelconque et la direction $f'(\omega)$ (proposition 3).

Un raisonnement analogue s'applique aux applications extrémales par rapport à un point Z et une direction $v \in T_Z(D)$ donnés, dont nous omettrons les détails.

Démonstration du théorème 3. — Dans la démonstration précédente il aurait suffi de demander $z \in \bar{D}$ (au lieu de $z \in D$), et on aurait obtenu l'existence d'une application stationnaire (=extrémale) passant par Z et z . Ce qui montre que les applications $(Z, z) \mapsto \varphi_{Z,z} \in C^{5/2}(\bar{U})$ et $(Z, z) \mapsto \xi_{Z,z} \in (0, 1)$ de la proposition 11 sont définies sur $D \times \bar{D} \setminus \text{diagonal}$. Puisque Φ est donnée par :

$$(Z, z) \mapsto \xi_{Z,z} \varphi'_{Z,z}(0) / |\varphi'_{Z,z}(0)|,$$

étant la composition des applications de classe C^{k-4} sur $D \times D \setminus \text{diagonal}$ et de classe C^1 sur $D \times \bar{D} \setminus \text{diagonal}$, elle-même est de classe C^{k-4} sur $D \times D \setminus \text{diagonal}$ et de classe C^1 sur $D \times \bar{D} \setminus \text{diagonal}$.

Fixons maintenant Z . On sait déjà que $\Phi_Z \in C^1(\bar{D} \setminus \{Z\})$. Son inverse, $\Psi : \bar{B}_n \setminus \{0\} \rightarrow \bar{D} \setminus \{Z\}$ est donné par :

$$\bar{B}_n \setminus \{0\} \ni v \mapsto f_{Z,v}(|v|) \in \bar{D} \setminus \{Z\},$$

où $f_{Z,v}$ est la fonction définie dans la proposition 11'. Il résulte de cette proposition que Ψ est de classe C^2 . Nous allons montrer qu'elle est même C^{k-4} .

En effet, la restriction de Ψ sur ∂B_n étant donnée par :

$$\partial B_n \ni v \mapsto f_{Z,v}(1)$$

cette restriction est de classe C^{k-4} . Ensuite, Ψ restreinte aux disques $U_v = \{\zeta v : \zeta \in U\}$ ($v \in \partial B_n$) est harmonique (même holomorphe).

Or, si une application est de classe C^r sur ∂B_n et harmonique sur chaque U_v ($v \in \partial B_n$), alors elle est de classe C^r sur $\bar{B}_n \setminus \{0\}$. Ce fait se déduit de la représentation intégrale des fonctions harmoniques à l'aide du noyau de Poisson, si l'on regarde de près la représentation des dérivées radiales et tangentielles. Donc $\Psi \in C^{k-4}(\bar{B}_n \setminus \{0\})$ et $\Phi_Z = \Psi^{-1} \in C^{k-4}(\bar{D} \setminus \{Z\})$, ce qui achève la preuve.

Démonstration du théorème 4. — Fixons Z ; soit par exemple $Z=0$, et posons $u = \log |\Phi_0|$. Remarquons que $u(f(\zeta)) = \log |\zeta|$ si f est une application extrémale et $f(0)=0$. $u|_{\partial D} = 0$ est alors évident; pour voir que $u(z) - \log |z|$ est bornée, construisons deux boules B' et B'' de rayon r' resp. r'' , à centre en 0, de telle façon que $B' \subset D \subset B''$. Alors $\delta_{B'}(0, z) \geq \delta_D(0, z) \geq \delta_{B''}(0, z)$, si $z \in B'$, d'où :

$$\log \frac{|z|}{r'} \geq u(z) \geq \log \frac{|z|}{r''},$$

donc $u(z) - \log |z| = O(1)$.

Reste à examiner la matrice $(u_{z,\bar{z}})$. Pour cela remarquons que les « boules » de la métrique de Kobayashi :

$$D_r = \{z : |\Phi_0(z)| < r\} \quad (0 < r \leq 1)$$

sont à bord de classe C^{k-4} , car Φ_0 est difféomorphe sur $\bar{D} \setminus \{0\}$. Premièrement, nous allons démontrer que pour $z \in \partial D$, les coordonnées

homogènes du plan complexe tangent $T_z^c(\partial D_r)$ sont $(\tilde{f}_1(r): \dots: \tilde{f}_n(r))$, si $f: U \rightarrow D$ est l'application extrémale déterminée par le couple $0, z$.

En effet, soit z_t une courbe de classe C^{k-4} sur ∂D_r , $z_0 = z$, et soit f_t l'application extrémale déterminée par $0, z_t$. D'après la proposition 10 $g(\zeta) = (\partial f_t(\zeta)/\partial t)_{t=0}$ existe pour $\zeta \in \bar{U}$; c'est une application holomorphe dans U ,

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} \langle g(\zeta), \overline{v(f(\zeta))} \rangle = 0 \quad \text{si} \quad \zeta \in \partial U.$$

D'ici $\operatorname{Re} \langle g(\zeta) \zeta^{-1}, \tilde{f}(\zeta) \rangle = 0$ si $\zeta \in \partial U$, et alors en vertu du principe de maximum :

$$0 = \operatorname{Re} \langle g(r)/r, \tilde{f}(r) \rangle = \frac{1}{r} \operatorname{Re} \left\langle \left. \frac{dz_t}{dt} \right|_{t=0}, \tilde{f}(r) \right\rangle.$$

$(dz_t/dt)_{t=0}$ étant un vecteur tangent arbitraire, on en déduit que le plan (réel) tangent à ∂D_r en z est :

$$(34) \quad T_z(\partial D) = \{v \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} \langle v, \tilde{f}(r) \rangle = 0\}.$$

Par conséquent, le plan complexe tangent est :

$$(35) \quad T_z^c(\partial D) = \{v \in \mathbb{C}^n : \langle v, \tilde{f}(r) \rangle = 0\}.$$

Deuxièmement, observons que D_r est convexe; en effet si $z, w \in \partial D_r$, et f et g sont les applications extrémales correspondantes à $0, z$, resp. $0, w$, alors en posant $h = \lambda f + (1 - \lambda)g$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), on aura $h(U) \subset D$ et $h(r) = \lambda z + (1 - \lambda)w$, donc $\lambda z + (1 - \lambda)w \in \bar{D}_r$.

Soit maintenant $w \in D \setminus \{0\}$. On va montrer que la matrice $(u_{z, \bar{z}_j}(w))_{i, j}$ est positive semi-définie et de rang inférieur à n . Soit f l'application extrémale déterminée par $0, w$: $f(0) = 0$ et $f(r) = w$ avec $r > 0$. On peut choisir les coordonnées z_1, \dots, z_n de telle manière que dans le point w le vecteur $\partial/\partial z_1$ soit tangent au disque analytique $f(U)$ et les vecteurs $\partial/\partial z_j$ ($2 \leq j \leq n$) soient tangents à ∂D_r . (En effet, f et ∂D_r sont transverses comme le montrent (34) et $\langle f', \tilde{f} \rangle \neq 0$.) Vu la convexité de D_r , $(u_{z, \bar{z}_j}(w))_{2 \leq i, j \leq n}$ est positive semi-définie (en réalité elle est strictement définie, car D_r est fortement convexe). On va achever la démonstration en vérifiant $u_{z, \bar{z}_i}(w) = 0$ ($i = 1, \dots, n$). Comme on le verra, c'est essentiellement équivalent au fait que la fonction $z \mapsto T_z^c(\partial D_{|\Phi_0(z)|})$ est holomorphe sur $f(U)$, cf. aussi E. BEDFORD, M. KALKA [1].

Soient

$$X = \sum_1^n X_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in, \quad Y = \sum_1^n Y_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

deux champs de vecteurs holomorphes le long $f(U)$, Y tangent à $f(U)$.

Posons :

$$\alpha(\zeta) = \sum_1^n X_j(f(\zeta)) \tilde{f}_j(\zeta) / \sum_1^n Y_j(f(\zeta)) \tilde{f}_j(\zeta) \quad (\zeta \in U).$$

En vertu de (35) le vecteur :

$$V(\zeta) = X(f(\zeta)) - \alpha(\zeta) Y(f(\zeta)),$$

est tangent à $\partial D_{|\zeta|}$. Par suite $\langle du, V(\zeta) \rangle = 0$ si $\zeta \in U$. (Ici et jusqu'à la fin de cette démonstration, le crochet et celui de la dualité entre formes et vecteurs.)

Donc :

$$\langle du, X(\zeta) \rangle = \alpha(\zeta) \langle du, Y(\zeta) \rangle \quad (\zeta \in U).$$

Or, $u(f(\zeta)) = \log |\zeta|$ étant harmonique, le second membre ici est holomorphe sur $f(U) \setminus \{0\}$. Par suite, il en est de même pour le premier membre. En choisissant $X = \partial/\partial z_i$, on a donc que $u_{z_i}(f(\zeta))$ est holomorphe, d'où :

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} u_{z_i}(f(\zeta))|_{\zeta=r} = u_{z_i \bar{z}_1}(f(r)) \cdot f'_1(r),$$

c'est-à-dire $u_{z_i \bar{z}_1}(w) = 0$.

Montrons encore que $u = \log |\Phi_0|$ est la solution du problème variationnel :

$$\sup \{v : v \leq 0 \text{ est p. s. h. dans } D, v(z) - \log |z| = O(1)\}.$$

En effet, soit v une fonction admissible, $z \in D \setminus \{0\}$ quelconque, et f l'application extrémale déterminée par $0, z$. Alors $h = v \circ f$ est sous-harmonique dans U , $\limsup_{|\zeta| \rightarrow 1} h(\zeta) \leq 0$ et $h(\zeta) - \log |\zeta|$ est bornée.

Par suite $h(\zeta) - \log |\zeta|$ est sous-harmonique dans U , donc, selon le principe du maximum, elle est non positive. Autrement dit, $h(\zeta) \leq \log |\zeta|$ i.e. $v(z) \leq u(z)$.

Nous terminons ce chapitre avec deux remarques. Premièrement, il est facile de déduire de (34) le fait intéressant que si $f : U \rightarrow D$ est extrémale,

$f(0)=0$, alors en posant $f_r(\zeta)=f(r\zeta)$, $f_r: U \rightarrow D_r$, elle aussi sera extrémale. Autrement dit, les disques extrémaux dans D_r se prolongent en des disques extrémaux dans D .

Deuxièmement, si l'on définit une forme différentielle ω dans $D \setminus \{0\}$ en posant :

$$\omega(z) = \frac{1}{2\zeta} \sum \tilde{f}_j(\zeta) dz_j,$$

où f est une application extrémale telle que $f(0)=0$, $f(\zeta)=z$, on a $\partial u = \omega$. Cela se démontre par un calcul tout à fait analogue à ce qu'on a fait au cours de la démonstration précédente.

9. Le cas général

Démonstration du théorème 4. — Remarquons que, d'après la définition de la métrique de Kobayashi :

$$\log |\Phi(Z, z)| = \log \frac{\exp \delta(Z, z) - 1}{\exp \delta(Z, z) + 1}.$$

Nous allons démontrer que pour Z fixé, le deuxième membre (qui est défini pour tout domaine D) est la solution de (4) si D est convexe et borné. Les deux dernières conditions de (4) se vérifient facilement; nous montrerons seulement que les deux premières conditions sont satisfaites.

Pour cela, choisissons une suite $D_1 \subset D_2 \subset \dots$ des domaines fortement convexes, de classe C^∞ , telle que $\lim D_j = D$, et désignons par δ_j et δ les métriques de Kobayashi dans D_j resp. D . Alors pour $z, Z \in D$ on a $\delta_j(z, Z) \rightarrow \delta(z, Z)$.

En effet, soit f_j l'application extrémale $U \rightarrow D_j$ telle que $f_j(0)=Z$ et $f_j(\xi_j)=z$ ($\xi_j > 0$). On peut supposer (en tirant au besoin une suite partielle) que $f_j \rightarrow f$ uniformément sur les compacts de U . La suite $\{\xi_j\}$ étant décroissante, elle a une limite ξ , $f(\xi)=z$ (et, bien entendu, $f(0)=Z$). En raison du principe du maximum, $f(U) \subset D$; reste à démontrer que f est une application extrémale par rapport à Z, z . Supposons, par absurde, qu'il existe une $g: U \rightarrow D$ holomorphe, $g(0)=Z$, $g(\eta)=z$ et $0 < \eta < \xi$. Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit et j assez grand, l'existence de l'application $h: U \rightarrow D_j$ définie par $h(\zeta)=g((1-\varepsilon)\zeta)$ contredit à l'extrémalité de f_j .

Donc :

$$u_j(z) = \log \frac{\exp \delta_j(Z, z) - 1}{\exp \delta_j(Z, z) + 1} \rightarrow u(z) = \log \frac{\exp \delta(Z, z) - 1}{\exp \delta(Z, z) + 1}.$$

Vu que la convergence est monotone et que d'après les résultats du chapitre précédent les u_j satisfont à (4) dans D_j , il en est de même pour u (dans D).

Démonstration du théorème 3. — Soit maintenant D borné et strictement convexe. Définissons u comme plus haut. Soit f une application extrémale par rapport à Z, z (c'est-à-dire $f(0)=Z, f(\xi)=z, \xi > 0$) dont l'existence a été démontré au cours de la démonstration précédente. Tout d'abord nous allons montrer qu'alors f est propre.

En effet, la fonction $\varphi = u \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est sous-harmonique et négative dans U . Puisque $\psi(\zeta) = \varphi(\zeta) - \log |\zeta|$ est bornée, elle aussi est sous-harmonique dans U . Alors $\lim_{|\zeta| \rightarrow 1} \sup \psi(\zeta) \leq 0$ et $\psi(\xi) = 0$ entraînent $\psi \equiv 0$, c'est-à-dire :

$$(36) \quad u(f(\zeta)) = \varphi(\zeta) = \log |\zeta|.$$

u étant strictement négative dans D , f est propre.

Ceci entraîne l'unicité des applications extrémales comme suite : si $g : U \rightarrow D$ est une autre application telle que $g(0)=Z$ et $g(\xi)=z$, alors $1/2(f+g)$, elle aussi, est extrémale, donc propre. D étant strictement convexe, c'est impossible à moins que $f \equiv g$.

(36) montre également que $f(U)$ est le disque extrémal par rapport à Z et n'importe quel $w_1 \in f(U), w_1 \neq Z$; donc il l'est aussi par rapport à un couple quelconque $w_1, w_2 \in f(U) (w_1 \neq w_2)$. Nous prétendons qu'il est extrémal aussi par rapport au point Z et direction $f'(Z)$ (et alors par rapport à n'importe quel point $f(\omega)$ et direction $f'(\omega)$).

Supposons, par absurde, qu'il existe un $h : U \rightarrow D$ holomorphe telle que $h(0)=Z, h'(0)=\lambda f'(0)$ et $\lambda > 1$. En outre, par commodité, on va supposer $Z=0$. Posons :

$$H(\zeta) = \frac{2}{1+\lambda} h(\zeta).$$

Alors $\text{dist}(H(U), \partial D) > 0$, par suite, si $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ est une transformation unitaire proche de l'identité, alors $AH(U) \subset D$. Choisissons $A = A_\eta$ de telle façon que pour un $\eta > 0$ petit, $AH(\eta) \in f(U)$.

Vu que $\text{dist}(H(\eta), f(U)) = O(\eta^2)$, on peut faire de sorte que $A_\eta \rightarrow$ identité lorsque $\eta \rightarrow 0$. Désignons par $\zeta = \zeta_\eta \in U$ le point tel que $f(\zeta) = AH(\eta)$.

En vertu de l'extrémalité de $f, |\zeta| \leq \eta$.

Donc :

$$|f'(0)| = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| \geq \lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \frac{AH(\eta)}{\eta} \right| = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \frac{H(\eta)}{\eta} \right| = \frac{2\lambda}{1+\lambda} |f'(0)|,$$

ce qui contredit à $\lambda > 1$.

Jusqu'ici nous avons démontré les énoncés du théorème 3 concernant les applications (et disques) extrémaux par rapport à deux points. Restent les propriétés des applications qui sont extrémales *a priori* seulement par rapport à un point et une direction.

Soient donc $Z \in D, v \in T_Z(D)$. Dans un premier temps on va démontrer qu'il existe une application $f: U \rightarrow D$ extrémale par rapport à Z, v telle que :

$$\varphi(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} u(f(\zeta)) = \log |\zeta|.$$

En effet, choisissons une suite $D_1 \subset D_2 \subset \dots$ des domaines fortement convexes, de classe C^∞ , telle que $D_j \rightarrow D$, et des applications extrémales :

$$f_j: U \rightarrow D_j, \quad f_j(0) = Z, \quad f'_j(0) = \lambda_j v \quad (\lambda_j > 0).$$

Alors on vérifie comme dans la démonstration précédente qu'une suite partielle de f_j converge vers une f extrémale, $f(0) = Z, f'(0) = \lambda v$. En outre, f sera extrémale par rapport aux points, disons, $f(0), f(1/2)$ (car les f_j les sont par rapport à $f_j(0), f_j(1/2)$). Donc, d'après la première partie de cette démonstration $\varphi(\zeta) = \log |\zeta|$.

Soit maintenant $g: U \rightarrow D$ une autre application extrémale par rapport à Z, v . A cause de l'extrémalité : $g'(0) = f'(0)$, d'où $f(\zeta) - g(\zeta) = O(\zeta^2)$ ($\zeta \rightarrow 0$). De l'autre côté, il est facile à voir que $\delta(Z, w)$, et par suite $\exp u(w)$, sont lipschiziennes si w reste dans un voisinage de Z . Ainsi :

$$|u(f(\zeta)) - u(g(\zeta))| \leq \frac{|\exp u(f(\zeta)) - \exp u(g(\zeta))|}{\min \exp \{u(f(\zeta)), \exp u(g(\zeta))\}} = O(\zeta),$$

c'est-à-dire la fonction $s(\zeta) = u(g(\zeta)) - \log |\zeta|$ s'annule en $\zeta = 0$. Puisqu'elle est sous-harmonique et $\limsup_{|\zeta| \rightarrow 1} s(\zeta) \leq 0$, elle est identiquement 0. Donc $u(g(\zeta)) = \log |\zeta|$, et en particulier g est propre.

Il en est de même pour l'application extrémale $1/2(f + g)$; mais alors vu la stricte convexité de $D, f \equiv g$. Donc les applications extrémales sont uniques; la démonstration est terminée.

10. Applications biholomorphes

Dans [5], C. FEFFERMAN a démontré qu'une application biholomorphe entre deux domaines strictement pseudoconvexes, à frontières C^∞ , se prolonge en un C^∞ -difféomorphisme entre les adhérences des domaines. Dans [9], H. LEWY et dans [11], S. I. PINCUK ont démontré la version C^∞ de ce théorème. Depuis lors, la démonstration de C. FEFFERMAN a été substantiellement simplifiée (voir S. BELL et E. LIGOCKA [3]). Comme une application des résultats précédents, nous allons donner une autre démonstration de ces théorèmes.

THÉORÈME DE C. FEFFERMAN ET H. LEWY-S. I. PINCUK. — Soient D_1, D_2 deux domaines dans \mathbb{C}^n , F une application holomorphe entre les deux. Supposons qu'en un point $p_1 \in \partial D_1$, F a une limite $p_2 \in \partial D_2$, que F^{-1} a une limite en p_2 , et que dans un voisinage de p_i ($i=1, 2$) D_i est strictement pseudoconvexe et de classe C^k ($6 \leq k \leq \infty$). Alors il existe un voisinage V de p_1 tel que F se prolonge en une application de classe $C^{k-4}(\overline{D}_1 \cap V)$.

Ceci entraîne effectivement les théorèmes du premier paragraphe, car d'après un résultat premier de G. M. HENKIN [8], et I. NARUKI [10], une application biholomorphe entre deux domaines strictement pseudoconvexes, à frontières C^2 , se prolonge en un homéomorphisme entre les adhérences des domaines.

Esquisse de la démonstration. — Remarquons d'abord que si D_1, D_2 sont fortement convexes, le théorème découle du théorème 3. En effet, on peut supposer que $0 \in D_1, D_2$, que $F(0)=0$ et que $F'(0)=I_n$. Soit $\Phi_0^{(i)} : D_i \rightarrow B_n$ l'application Φ_0 construite dans l'introduction, D remplacé par D_i . Il est alors facile à voir que $\Phi_0^{(1)} = \Phi_0^{(2)} \circ F$. Puisque $\Phi_0^{(i)}$ se prolonge en un difféomorphisme de classe C^{k-4} entre $\overline{D}_i \setminus \{0\}$ et $\overline{B}_n \setminus \{0\}$, $F \in C^{k-4}(\overline{D}_1)$.

Dans le cas général on va faire la même chose localement. Ainsi, on peut supposer que $p_1 = (1, 0, \dots, 0)$, que dans un voisinage ouvert V_i de p_i ∂D_i est fortement convexe et de classe C^k , que $\partial(V_1 \cap D_1)$ est fortement convexe et de classe C^k , que $F(V_1 \cap D_1) = V_2 \cap D_2$ et finalement que la fonction r définissant D_1 satisfait à :

$$(37) \quad r(z) = -1 + |z|^2 + O(|z - p_1|^3) \quad (z \rightarrow p_1).$$

Premièrement, on va montrer qu'il existe une application stationnaire $f : U \rightarrow D_1$ telle que $f(1) = p_1$ et $f(U) \subset V_1$. A ce but, pour $0 < t < 1$,

introduisons les automorphismes de la boule unité B_n :

$$A_t : z = (z_1, z') \mapsto \left(\frac{z_1 + t}{1 + tz_1}, (1 - t^2)^{1/2} \frac{z'}{1 + tz_1} \right),$$

les fonctions :

$$r_t(z) = \frac{|1 + tz_1|^2}{1 - t^2} r(A_t(z))$$

et les domaines :

$$D^{(t)} = \{ z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_1 > -1/2, r_t(z) < 0 \}.$$

On vérifie que si $r(z) = \tilde{r}(z) \stackrel{\text{def}}{=} -1 + |z|^2$, alors $r_t = \tilde{r}$; et que pour une r générale comme dans (37) on a $r_t(z) \rightarrow \tilde{r}(z) (t \rightarrow 1)$ sur $S = \{ z : \operatorname{Re} z_1 \geq -1/2, |z| \leq 2 \}$, dans la topologie C^6 . Donc on est essentiellement dans une situation où la proposition 10 peut être appliquée : sachant qu'il existe une application extrémale $g : U \rightarrow B_n$ telle que $g(\overline{U})$ passe par $q = (1/2, 1/2, 0, \dots, 0)$ et p_1 , on conclut que pour t assez proche de 1, il existe une application extrémale $g_t : U \rightarrow D^{(t)}$, telle que $g_t(U)$ passe par q et p_1 ; de plus, $\overline{g_t(U)} \subset S$, car $\overline{g(U)} \subset S$. (Nous avons dit « essentiellement » parce que 1° $D^{(t)}$ ne tend pas vers B_n , seulement sa trace dans S [vers $B_n \cap S$], 2° en posant $D^{(1)} = B_n$, $D^{(t)}$ ne dépende pas d'une façon régulière de t au voisinage de $t = 1$. Cependant, ces objections ne sont pas sérieuses : quant à 1°, il est clair que c'est seulement l'intersection de $D^{(t)}$ avec un voisinage de $\overline{g(U)}$ qui compte; quant à 2°, dans ce voisinage $\partial D^{(t)}$ dépende régulièrement du paramètre $\tau = (1 - t^2)^{1/2}$.)

Posons $f_t = A_t \circ g_t$. Vu que $A_t(S \cap D^{(t)}) \rightarrow p_1 (t \rightarrow 1)$, pour t suffisamment proche de 1, $f_t : \overline{U} \rightarrow \overline{D}_1$ est stationnaire, $f(1) = p_1$ et $f(\overline{U}) \subset V_1 \cap \overline{D}_1$.

Choisissons maintenant deux voisinages ouverts de p_2 , V'_2 et V''_2 de telle manière que $V'_2 \subset \subset V_2 \subset \subset V''_2$, et que $\partial(V'_2 \cap D_2)$ et $\partial(V''_2 \cap D_2)$ soient fortement convexes et de classe C^k . Si t de plus haut est assez proche de 1, $F(f(\overline{U})) \subset V'_2 \cap \overline{D}_2$. Fixons un tel t .

Soit $\varphi_1 : V_1 \cap D_1 \rightarrow B_n$ (resp. $\varphi_2 : V'_2 \cap D_2 \rightarrow B_n$) l'application Φ_Z construite dans l'introduction, avec $Z = f(0)$ (resp. $Z = F(f(0))$) et D remplacé par $V_1 \cap D_1$ (resp. $V'_2 \cap D_2$). D'après le théorème 3, φ_1, φ_2 sont des difféomorphismes de classe C^{k-4} entre $\overline{V}_1 \cap \overline{D}_1 \setminus \{f(0)\}$ et $\overline{B}_n \setminus \{0\}$ resp. $\overline{V}'_2 \cap \overline{D}_2 \setminus \{F(f(0))\}$ et $\overline{B}_n \setminus \{0\}$. En supposant — ce qui n'est pas restrictif — que $F'(f(0)) = I_n$, il est facile de voir que $F \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2^{-1}$ dans un voisinage de $v_0 = f'(0)/|f'(0)|$. En effet, pour $v \in \partial B_n$ proche de v_0 ,

l'application extrémale $U \rightarrow V_1 \cap D_1$ (resp. $U \rightarrow V'_2 \cap D_2$) déterminée par le point $f(0)$ (resp. le point $F(f(0))$) et la direction v est $\zeta \mapsto \varphi_1^{-1}(\zeta v)$ (resp. $\zeta \mapsto \varphi_2^{-1}(\zeta v)$). $\zeta \mapsto \varphi_2^{-1}(\zeta v)$ étant stationnaire dans $V'_2 \cap D_2$ elle l'est aussi dans $V''_2 \cap D_2$; par suite elle est extrémale dans $V''_2 \cap D_2$, et alors aussi dans $V_2 \cap D_2$. F étant une application biholomorphe entre $V_1 \cap D_1$ et $V_2 \cap D_2$, les extrémales se correspondent, d'où $F \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2^{-1}$. Par conséquent, $F = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ est de classe C^{k-4} dans un voisinage de $p_1 = f(1)$.

C.Q.F.D.

Appendice : le problème de Riemann-Hilbert. — Nous allons donner brièvement les démonstrations des théorèmes A et B (chapitre VI). Soit $I = I_m$ la matrice unité carrée d'ordre m . Désignons par $|M|_p = |(\mu_{ij})|_p = \sum_{i,j} |\mu_{ij}|_p$ la norme p -hölderienne d'une matrice carrée d'ordre m dont les éléments sont des fonctions $\mu_{ij} : \partial U \rightarrow \mathbb{C}$, et soit $Y = \{M : |M|_p < \infty\}$. C'est une algèbre de Banach. Désignons la L^2 -norme de M par $\|M\|_2, \|M\|_2^2 = \sum \|\mu_{ij}\|_{L^2(\partial U)}^2$, et soit \mathcal{L} l'espace d'Hilbert des M telles que $\|M\|_2 < \infty$. $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ est le sous-espace formé des matrices dont les éléments se prolongent en des fonctions de la classe de Hardy $H^2(U)$.

Dans la suite p désignera toujours un nombre positif non entier.

LEMME A. — *Supposons que pour un $W_0 \in Y$, il existe $R_0 : \partial U \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$ p -hölder-continue et $H_0 : \bar{U} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$, p -hölder-continue, holomorphe dans U , telles que $W_0 R_0 = H_0$ sur ∂U . Alors il existe un voisinage B de W_0 dans Y tel que pour toute $W \in B$ on peut trouver une $R : \partial U \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$ et une $H : \bar{U} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$, p -hölder-continues, H holomorphe dans U , telles que $WR = H$ sur ∂U . En plus, R et H sont uniques à condition que $R(1) = I$, et la fonction $B \ni W \mapsto H \in Y$ est analytique réelle.*

Démonstration. — Désignons par $T_1 : Y \rightarrow Y' = \{M \in Y : M = \overline{M}\}$ la transformation qui fait correspondre à une $M \in Y$ une $T_1(M) \in Y'$ telle que $M - T_1(M)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans U , à valeur imaginaire dans 0. En vertu des propriétés connues de la transformation d'Hilbert, T_1 est continue (et \mathbb{R} -linéaire). Soit ensuite $T : Y \rightarrow Y'$ définie par $T(M) = T_1(M) + I - T_1(M)(1)$. Alors T est continue et \mathbb{R} -affine, et pour chaque $M \in Y$, $M - T(M)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans U et sa valeur en 1 est I .

Dans la situation du lemme, soit $w = W - W_0$, $R = R_0 r$; en supposant que $R_0(1) = I$, il faut donc chercher $r \in Y'$ inversible tel que $r(1) = I$ et :

$$(38) \quad (W_0 + w) R_0 r = H,$$

qui s'écrit encore :

$$(39) \quad r = H_0^{-1} H - H_0^{-1} w R_0 r.$$

Autrement dit, r est un point fixe de l'application :

$$A = A_w : Y' \ni \rho \mapsto T(-H_0^{-1} w R_0 \rho) \in Y'.$$

Or, cette application est une contraction si $|w|_p$ est petit, par suite elle admet un point fixe unique.

Montrons que r dépende de w analytiquement. En effet, on peut prolonger T_1 en une application \mathbb{C} -linéaire $Z = Y \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow Z$. Cela donne un prolongement de T , et alors A_w peut être regardée comme une contraction $Z \rightarrow Z$, si $w \in Z$ est assez petit. Vu que A_w dépende de w holomorphiquement, et que le point fixe r s'obtient comme une limite uniforme :

$$r = \lim_{v \rightarrow \infty} A_w^v(0),$$

la correspondance $w \mapsto r$ est en effet holomorphe. Donc $W \mapsto R$ et $W \mapsto H$ sont analytiques.

C.Q.F.D.

Dans le lemme suivant G_ρ désigne la couronne $\{\zeta \in \mathbb{C} : \rho < |\zeta| < 1\}$.

LEMME B. — Soit $W \in Y$ inversible. Alors il existe $R \in Y'$ inversible, $\rho < 1$, et $H : \overline{G}_\rho \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ p -hölder-continue et holomorphe dans G_ρ tels que $WR = H$ sur ∂U .

Démonstration. — Choisissons une $V \in Y$ dont les éléments sont des fonctions rationnelles de telle façon que $|V^{-1}W - I|_p$ soit petite. En vertu du lemme A, il y a $R \in Y'$ inversible et $H' : \overline{U} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ p -hölder-continue, holomorphe dans U telles que $V^{-1}WR = H'$. Autrement dit, $WR = VH'$, d'où le lemme.

LEMME C. — Supposons que $W \in Y$ est inversible, $WR_1 = H_1$, p . p . sur ∂U , où les éléments de $R_1 \in \mathcal{L}$ sont réels et $H_1 \in \mathcal{H}$. Alors R_1 et H_1 sont p -hölder-continues sur ∂U , resp. \overline{U} .

Démonstration. — Soient R, H comme dans le lemme B. Alors $R^{-1}R_1 = H_1 H^{-1}$. Donc la fonction $H_1 H^{-1}$, holomorphe dans G_ρ , prend des valeurs réelles sur ∂U . En vertu du principe de la symétrie, elle est alors analytique sur ∂U , d'où l'énoncé du lemme.

Démonstration du théorème A. — Premièrement nous allons démontrer qu'étant donné un point $\zeta_0 \in U$, on peut trouver $R \in \mathcal{L}$ réelle et $H \in \mathcal{H}$ telles que :

$$(40) \quad W_1 R = H \quad \text{p. p. sur } \partial U,$$

et que $\operatorname{Re} H_0^{-1} H(\zeta_0)$ soit une matrice réelle M préalablement donnée.

Il suffira de s'occuper du cas $\zeta_0 = 0$. Soit $S_1 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \{K \in \mathcal{L} : K = \overline{K}\}$ l'application linéaire qui fait correspondre à une $K \in \mathcal{L}$ une fonction $S_1(K) \in \mathcal{L}'$ telle que $S_1(K) - K \in \mathcal{H}$ et que (le prolongement holomorphe de) $S_1(K) - K$ prend une valeur imaginaire en 0. On vérifie que la norme de S_1 est $\sqrt{2}$. Soit ensuite $S : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ définie par $S(K) = S_1(K) + M$. Alors $S(K) - K \in \mathcal{H}$ pour toute $K \in \mathcal{L}$ et $\operatorname{Re}(S(K) - K)(0) = M$.

Si l'on pose $R_0^{-1} R = r$, $w = W_1 - W_0$, on constate que de nouveau (40) équivaut à (39) p. p.; et que R satisfait à (40) et $\operatorname{Re} H_0^{-1} H(0) = M$ si r est un point fixe de l'application :

$$A : \mathcal{L}' \ni \rho \mapsto S(-H_0^{-1} w R_0 \rho) \in \mathcal{L}'.$$

La condition (11) assurant que A est une contraction, elle admet un point fixe r , et alors $R = R_0 r$ et $H = W_1 R$ possèdent les propriétés voulues.

Deuxièmement, nous démontrerons que si $\operatorname{Re} H_0^{-1} H(\zeta)$ est inversible pour un $\zeta \in U$, alors elle l'est pour tout $\zeta \in U$; de plus (11') est satisfaite (avec H au lieu de H_1). En effet, supposons que (11') est faux, disons pour $\zeta = 0$, avec $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Selon (39) :

$$(41) \quad rv + (H_0^{-1} w R_0)rv = H_0^{-1} H v \quad \text{p. p. sur } \partial U.$$

Soit le développement des termes successifs :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} b_n \zeta^n, \quad \sum_0^{\infty} c_n \zeta^n \quad \text{où } a_n, b_n, c_n \in \mathbb{C}^m.$$

Alors :

$$\bar{a}_n = a_{-n} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad a_n = -b_n \quad (n < 0).$$

Par suite :

$$(42) \quad \sum_{n \neq 0} |a_n|^2 = 2 \sum_{n < 0} |b_n|^2.$$

(11') étant faux, $|\operatorname{Re} c_0| \leq |\operatorname{Im} c_0|$. Puisque $c_0 = a_0 + b_0$ et $a_0 \in \mathbb{R}^m$, on a $|a_0|^2 \leq 2|b_0|^2$. Tenant compte aussi de (42) :

$$\|rv\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \leq 2 \sum_{-\infty}^{\infty} |b_n|^2 = 2 \|H_0^{-1} w R_0 rv\|_2^2.$$

Vu que $[H_0^{-1} w R_0(\zeta)] < 1/\sqrt{2}$ ($\zeta \in \partial U$), cela entraîne $rv \equiv 0$ sur ∂U . Donc $H_0^{-1} H(\zeta) v \equiv 0$ ($\zeta \in \bar{U}$), en contradiction avec l'hypothèse que $\operatorname{Re} H_0^{-1} H(\zeta)$ est inversible pour un $\zeta \in U$.

Choisissons donc un M inversible dans la construction de R, H ; alors (11') est satisfaite pour $\zeta \in U$. Occupons-nous maintenant des points de ∂U . D'après le lemme C on sait que R et H sont p -hölder-continues sur ∂U , resp. \bar{U} . Montrons que $R(\zeta)$ est inversible pour $\zeta \in \partial U$. Supposons le contraire, par exemple qu'il existe un $v \in \mathbb{R}^m$, $v \neq 0$, tel que $R(1)v = 0$. Alors $r(1)v = H(1)v = 0$, et selon (41) :

$$(43) \quad \frac{i\zeta^{1/2}}{\zeta-1} r(\zeta) v + (H_0^{-1} w R(\zeta)) \frac{i\zeta^{1/2}}{\zeta-1} r(\zeta) v = \frac{i\zeta^{1/2}}{\zeta-1} H_0^{-1} H(\zeta) v,$$

où on a choisi une branche continue de $\zeta^{1/2}$ sur $\partial U \setminus \{-1\}$. Observons que $i\zeta^{1/2}(\zeta-1)^{-1}$ est réel sur ∂U . Soient :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \zeta^{n+1/2}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_n \zeta^{n+1/2}, \quad \sum_0^{\infty} \gamma_n \zeta^{n+1/2}$$

les développements des termes successifs dans (43). Alors :

$$\bar{\alpha}_n = \alpha_{-n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad \alpha_n = -\beta_n \quad (n < 0).$$

En désignant par r_0 le premier terme en (43), on a donc :

$$\|r_0\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 = 2 \sum_{n < 0} |\beta_n|^2 \leq 2 \sum_{-\infty}^{\infty} |\beta_n|^2 = 2 \|H_0^{-1} w R r_0\|_2^2.$$

Il en résulte que $r_0 \equiv 0$ i.e. $rv \equiv 0$ et $H_0^{-1} H v \equiv 0$, une contradiction. Donc $R(\zeta)$ est inversible pour tout $\zeta \in \partial U$.

D'autre part, il est facile à vérifier que (11) entraîne $W_1(\zeta) \in GL(m, \mathbb{C})$ pour $\zeta \in \partial U$. Vu que les $W_1 \in Y$ satisfaisantes à (11) forment un ensemble connexe, il en suit que l'indice de $\det W_1$ est égale à celle de $\det W_0$, c'est-à-dire 0. Il en est de même pour l'indice de $\det W_1 \det R = \det H$, donc $\det H(\zeta) \neq 0$ si $\zeta \in \bar{U}$; autrement dit $H(\zeta) \in GL(m, \mathbb{C})$ ($\zeta \in \bar{U}$).

Montrons encore (11') pour $\zeta \in \partial U$ (avec H_1 remplacé par H). En substituant $H = W_1 R$, on voit que (11') est équivalent à :

$$(44) \quad |\operatorname{Re} H_0^{-1} W_1 R_0(\zeta) v| > |\operatorname{Im} H_0^{-1} W_1 R_0(\zeta) v| \quad (v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}).$$

Tenant compte du fait que :

$$H_0^{-1} W_1 R(\zeta) v = v + H_0^{-1} (W_1 - W_0) R_0(\zeta) v,$$

on vérifie facilement que (11) entraîne (44).

Si l'on pose maintenant $R_1(\zeta) = R(\zeta)R^{-1}(1)$, $H_1(\zeta) = H(\zeta)R^{-1}(1)$, les propriétés de R et H démontrées ci-haut, et le lemme A impliquent les énoncés du théorème A.

Démonstration du théorème B. — Soit d'abord $p < \infty$. On va suivre la démonstration du théorème A. On montre premièrement que si la $|\cdot|_p$ norme de $w = W - I$ est assez petite, il existe $H = I + h : \bar{U} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ p -hölder-continue, holomorphe dans U telle que $H^*H = W$ sur ∂U .

En effet, ce dernier équivaut à :

$$(45) \quad h + h^* = w - h^*h.$$

Soit $Y'' = \{y \in Y : y^* = y\}$ et définissons l'opérateur linéaire $F : Y'' \rightarrow Y$ qui fait correspondre à $y \in Y''$ une fonction-matrice $F(y) \in Y$ telle que 1° $F(y) + F(y)^* = y$; 2° $F(y)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans U ; 3° si (C_{ij}) est la valeur de ce prolongement en 0, alors $\operatorname{Re} C_{ij} = 0$ si $i > j$ et $\operatorname{Im} C_{ij} = 0$ si $i \leq j$. F est un opérateur borné; soit sa norme inférieure à $a > 3$. Il est alors facile à vérifier que si $|w|_p < a^{-4}$, l'application :

$$y \mapsto F(w - y^*y)$$

est une contraction de $\{y \in Y : |y|_p \leq a^{-2}\}$ en lui-même. Par suite, elle admet un point fixe $y = h$, ce qui donne une solution de (45).

Deuxièmement, on démontre que pour W comme dans le théorème, il existe une matrice M dont les éléments sont des fonctions méromorphes dans U , p -hölder-continues dans un voisinage de ∂U , telle que $M^*M = W$ sur ∂U . A ce but, choisissons une matrice V dont les éléments sont des fonctions rationnelles telle que $|W^{1/2}V - I|_p < \varepsilon$. Ici $W^{1/2}$ est la racine carrée auto-adjointe positive définie de W . Alors $|V^*WV - I|_p < \varepsilon(2 + \varepsilon)$; si ε est assez petit, cela entraîne l'existence d'une $H_1 : \bar{U} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ de classe C^p , holomorphe dans U , telle que $V^*WV = H_1^*H_1$. En posant $M = H_1V^{-1}$ on obtient la matrice cherchée.

Troisièmement, suivant une idée de G. D. Birkhoff, on va éliminer les pôles de M et les zéros de $\det M$. Soient b_1, b_2, \dots, b_k les pôles de M , alors :

$$M_0(\zeta) = M(\zeta) \prod_1^k \frac{\zeta - b_j}{1 - \bar{b}_j \zeta},$$

est holomorphe et $M_0^*M_0 = W$ sur ∂U . Reste à se débarrasser des zéros de $\det M_0$, qui sont en nombre fini, car $\det M_0$ est non nulle sur ∂U . Soit

$\det M_0(a)=0$ ($a \in U$), c'est-à-dire $M_0(a)v=0$ avec un vecteur $v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, qu'on peut supposer le vecteur $(1, 0, \dots, 0)$. Alors :

$$M_1(\zeta) = \begin{pmatrix} \frac{1-\bar{a}\zeta}{\zeta-a} & 0 \\ & 1 \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} M_0(\zeta),$$

est holomorphe dans U , $M_1^* M_1 = W$ sur ∂U et $\det M_1$ a moins de zéros que $\det M_0$. Ainsi on peut éliminer tous les zéros de $\det M_0$, pour obtenir H avec les propriétés désirées.

Finalement, si $p=\omega$, la fonction H ainsi construite sera analytique sur ∂U , $H(1/\zeta)^{-1}W(\zeta)$ en définissant un prolongement analytique à $\{\zeta : 1 \leq |\zeta| < 1+\varepsilon\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEDFORD (E.) and KALKA (M.). — Foliations and complex Monge-Ampère equations, *Comm. on Pure and Appl. Math.*, vol. XXX, 1977, p. 543-571.
- [2] BEDFORD (E.) and TAYLOR (B. A.). — The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation, *Invent. Math.*, vol. 37, 1976, p. 1-44.
- [3] BELL (S.) and LIGOČKA (E.). — A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mappings (Preprint).
- [4] BISHOP (E.). — Differentiable manifolds in complex Euclidian space, *Duke Math. J.*, vol. 32, 1965, p. 1-22.
- [5] FEFFERMAN (C.). — The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, *Invent. Math.*, vol. 26., 1974, p. 1-65.
- [6] GOLUZIN (G. M.). — *Théorie géométrique des fonctions d'une variable complexe*. Moscou-Lénningrad, Gosudarstvennoe Izdatelstvo Techniko-Teoretičeskoi Literaturi 1952 (en russe).
- [7] HARVEY (F. R.) and WELLS (R. O.) Jr. — Holomorphic approximation and hyperfunction theory on a C^1 totally real submanifold of a complex manifold, *Math. Ann.*, vol. 197, 1972, p. 287-318.
- [8] HENKIN (G. M.). — An analytic polyhedron is not holomorphically equivalent to a strictly pseudoconvex domain, *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, vol. 210, 1973, p. 1026-1029; *Soviet Math. Dokl.*, vol. 14, 1973, p. 858-862.
- [9] LEWY (H.). — On the boundary behaviour of holomorphic mappings, *Att. Acad. Naz. dei Lincei*, n° 35, 1977.
- [10] NARUKI (I.). — On the extendibility of isomorphisms of Cartan connections and biholomorphic mappings of bounded domains, *Tôhoku Math. J.*, vol. 28, 1976, p. 117-122.
- [11] PINCUS (S. I.). — On the analytic continuation of holomorphic mappings, *Math. Sb.*, vol. 27, 1975, p. 375-392.
- [12] WEBSTER (S. M.). — On the reflection principle in several complex variables, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 71, 1978, n° 1, p. 26-28.