

BULLETIN DE LA S. M. F.

M. LAQUIÈRE

Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 82-102

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__82_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__82_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche
du cavalier; par M. LAQUIÈRE.*

(Séance du 20 février 1880.)

J'appelle *pas* sur l'échiquier orienté la longueur d'une case dans le sens horizontal ou dans le sens vertical; cette dernière pourrait être également nommée *degré*, pour la distinguer de la première, qui conserverait le nom générique de *pas*. Le pas horizontal sera positif s'il est dirigé de gauche à droite, négatif de droite à gauche; le pas vertical, ou degré, sera positif de bas en haut, négatif de haut en bas. Un circuit polygonal sera parcouru dans le sens positif ou le sens négatif suivant que la normale aux côtés successifs tournera dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens inverse, le centre de rotation étant le point de croisement avec la normale au côté précédent. La marche du mobile sera dite positive ou négative selon le sens de description.

Un saut du cavalier, aux échecs, est la résultante de deux pas faits dans le même sens sur une direction horizontale ou verticale et d'un seul pas fait dans la direction perpendiculaire. Les signes de ces pas sont à volonté positifs ou négatifs, en observant toutefois que les deux de même direction ont l'un et l'autre le même signe, pour ne pas s'annuler.

Les diverses combinaisons de ces pas et de leurs signes produisent huit orientations différentes ou huit sauts du cavalier de directions déterminées, que nous désignerons par les indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, rappelant l'ordre dans lequel s'y place un rayon tournant autour de la case origine comme centre, orienté au départ sur l'horizontale et vers la gauche, et tournant dans le sens positif des aiguilles d'une montre. On remarquera que les directions dont les indices diffèrent de quatre unités sont parallèles, mais de sens opposés. On les dénommera *directions inverses* ou *contraires*. Les indices 5, 6, 7, 8 pourront avantageusement être remplacés par ceux plus expressifs de — 1, — 2, — 3 et — 4, qui rappellent cette corrélation.

Observons en outre que les orientations dont les indices diffèrent de deux unités sont perpendiculaires l'une à l'autre, par

suite de la substitution réciproque de leurs deux éléments, vertical et horizontal, qui s'échangent en conservant leur longueur.

Les inclinaisons sur les axes des deux orientations comprises dans le même quadrant sont réciproques; ces deux orientations sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle parallèle à l'une des diagonales de l'échiquier. Les inclinaisons des orientations successives 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sont ainsi égales à $\frac{1}{2}$, 2, $-\frac{1}{2}$, -2 avec pas dans le sens positif, puis à la même série avec pas dans le sens négatif.

D'après les principes de la Géométrie des quinconces, les inclinaisons des divers sauts du cavalier les uns sur les autres sont commensurables.

Nous avons déjà remarqué que ceux dont les indices orientateurs diffèrent de deux unités sont perpendiculaires, et de trois unités sont parallèles et de sens contraires. L'inclinaison de deux sauts voisins dans le même angle coordonné est de

$$\tan\left(2 \arctan \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4},$$

chacun d'eux étant incliné de $\frac{1}{3}$ sur la bissectrice. L'inclinaison de deux sauts voisins dans des angles adjacents, ayant leur bissectrice parallèle à cet axe, est de

$$\frac{4}{3} = \tan\left(2 \arctan \frac{1}{2}\right),$$

complémentaire de la précédente, ce qui résulte de la perpendicularité des sauts dont les indices diffèrent de deux unités.

Marches rentrantes.

On donne le nom de *marche rentrante* du cavalier sur l'échiquier à une série de sauts consécutifs, exécutés entre des cases comprises dans les limites de l'échiquier fini, que nous prendrons carré et de huit pas de côté, selon la coutume, de telle sorte que la pièce partie d'une case revienne par un dernier saut de sa dernière station à la première sans s'être reposée deux fois sur une

même case. La ligne polygonale réunissant les centres des cases successivement visitées est la trace de la marche ; elle n'admet pas de points doubles en ses sommets et se ferme si la marche est rentrante ; elle offre dès lors l'avantage de pouvoir être parcourue d'une course continue, dans l'un et l'autre sens, en partant de l'une quelconque des cases de station.

Le problème connu dans le monde des échecs sous le nom de *problème d'Euler* consiste à fournir une marche rentrante comprenant soixante-quatre sauts sur les soixante-quatre cases dont se compose l'échiquier pratique. Disons en passant que le célèbre géomètre n'a nullement résolu la question théorique, dont Vandermonde a le premier donné un rudiment de solution dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de 1771, si nos souvenirs ne sont pas en défaut.

Euler avait simplement trouvé une marche particulière, d'ailleurs disgracieuse, dépourvue de symétrie et se prêtant peu à des remarques utiles. Vandermonde, au contraire, avait établi un mode de recherches devant amener fatalement celui qui en suivra les règles à tomber sur une solution du problème, si toutefois il en existe réellement, restriction que l'auteur omet de signaler. La démonstration théorique et *a priori* de l'existence d'une solution, que personne à notre connaissance n'a encore tentée, serait des plus intéressantes, bien que l'obtention empirique de marches connues permette de ne pas la considérer comme tout à fait indispensable.

Nos premières recherches personnelles sur le problème d'Euler datent de 1861, époque à laquelle, de concert avec M. Siméon, alors notre camarade à l'École de Metz, nous avons été conduit à adopter une méthode de recherche comprenant en quelque sorte celle de Vandermonde (qui nous était du reste inconnue), mais en différant par certains détails des plus utiles pour abréger considérablement le travail empirique de la recherche d'une marche. Nous n'entrerons pas ici dans l'explication de ces premiers essais, que nous avons laissés de côté après avoir constaté l'existence de marches régulières, et dont le résultat ne contenait encore qu'en germe la méthode moins imparfaite et déjà rationnelle que nous nous proposons d'exposer ici.

Marches rentrantes partielles.

En dehors des marches rentrantes complètes, solutions particulières du problème, englobant dans une même série toutes les cases de l'échiquier comme stations successives de soixante-quatre sauts ramenant la pièce à son point de départ, nous considérerons les marches rentrantes partielles où le cavalier revient à son point de départ au bout d'un nombre moindre de sauts, soumis à la même restriction, faite une fois pour toutes, de ne jamais se reposer deux fois sur la même case. Il est à observer que, le cavalier changeant alternativement de couleur sur l'échiquier marqueté suivant la mosaïque ordinaire des carreaux alternés de blanc et de noir, les marches rentrantes partielles, dont l'existence évidente n'est pas à démontrer, se composent toujours d'un nombre pair de cases et de même d'un nombre pair de sauts ou côtés, en y comprenant celui de fermeture, ramenant au point de départ. Ce dernier sera remplacé par un côté de soudure lorsqu'on voudra réunir deux marches rentrantes en une seule, et le nombre des côtés ne changera pas.

Les marches rentrantes partielles se créent d'elles-mêmes par les sauts successifs d'un cavalier abandonné au pur caprice de la main qui le supporte et qui viendra se poser à un moment donné sur une case déjà visitée; la portion de sa course comprise entre les deux passages constitue une marche rentrante.

Ces marches peuvent être des plus irrégulières, quant à la forme du polygone où les sauts seraient représentés par la droite unissant les centres des deux cases du levé et du posé. D'autres, au contraire, peuvent présenter une certaine régularité; elles offrent alors un intérêt réel, aussi bien pour parvenir par leurs combinaisons entre elles à la constitution de marches rentrantes complètes, faciles, simples et régulières, qu'à faciliter le classement de ces dernières.

Il peut y avoir des marches rentrantes de 2, 4, 6, ..., $2n$ cases ou sauts ($n \geq 32$).

Les marches rentrantes de deux sauts, soit l'aller d'une case à l'une quelconque des huit, constituant la rosace du cavalier, qui sont les extrémités des rayons issus de la case origine sous les huit orientations possibles (mais dont un certain nombre peuvent dis-

paraître, six au maximum, en raison des limites de l'échiquier), suivi du retour de la seconde à la première, ne sont point à considérer.

Autrement en est-il de celles de quatre cases, qui sont en quelque sorte la clef des solutions du problème qui nous occupe, et qui formeront les éléments des marches plus étendues présentant la plus complète régularité.

I. Observons dès le principe que, si l'on décompose un polygone fermé dessinant une marche rentrante en deux portions, les résultantes des deux portions (définies comme en Géométrie pour les contours) seront égales et de sens contraires, puisqu'elles ferment les deux polygones en les prenant en sens inverses pour conserver le sens de parcours continu des deux portions.

Réciproquement, deux marches ayant leurs résultantes de fermeture égales et de sens opposés entre deux cases identiques peuvent être réunies en une marche rentrante, à condition de n'avoir aucune case de station commune.

En conséquence, si une marche peut être divisée en deux portions composées de sauts réciproquement parallèles deux à deux et de sens inverses dans l'une et l'autre portion, quel que soit d'ailleurs l'ordre dans lequel se succèdent dans chaque portion les éléments correspondant aux éléments successifs de l'autre, la marche totale sera rentrante. *A fortiori*, toute marche dont les deux moitiés sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un point central sera rentrante sur elle-même, car elle satisfait à la condition précédente, les éléments parallèles et opposés se succédant de plus dans le même ordre.

II. Une série de cases parcourues suivant une marche rentrante permet de prendre pour point de départ l'une quelconque d'entre elles et de parcourir à partir de cette origine choisie tout le polygone suivant deux marches rentrantes de sens inverses, que nous désignerons sous les dénominations de *sens positif*, ou *dextrorsum*, et *négatif*, ou *sinistrorsum*, suivant le sens général de rotation de la normale, celui suivant lequel, en cas d'inflexions diverses, la rotation totale excède de 360° la rotation en sens opposé.

III. Soient deux marches rentrantes l'une et l'autre sur elles-

mêmes, cheminant côte à côte ou s'enchevêtrant sur l'échiquier, mais sans avoir une seule case de station commune ; considérons deux cases à distance de saut de cavalier prises sur l'une et l'autre marche, et coupons les deux marches suivant ces deux cases ; puis réunissons-les en une seule, le saut d'une coupure à l'autre servant de trait d'union. L'accolement des deux marches, suivant qu'on les considérera comme parcourues individuellement dans le sens positif ou dans le sens négatif, donnera quatre marches ayant pour cases de départ et d'arrivée les quatre combinaisons de cases voisines, dans l'une et l'autre marche, de la case de rupture.

IV. Deux marches rentrantes dans de telles conditions ayant été soudées l'une à l'autre par les cases de rupture A et X, si deux des cases a et x , réciproquement adjacentes à la case de rupture de la marche dont elles font partie, sont à distance de saut de cavalier l'une de l'autre, celle des quatre marches qui les prend pour extrêmes est rentrante. Des trois autres l'une peut encore être rentrante, celle des deux autres cases prises pour extrêmes, ou bien les trois marches restent à point d'arrêt.

V. L'accolement de deux marches en une seule suivant deux cases de rupture et soudure à distance de saut de cavalier supprime ainsi, dans l'une et dans l'autre, l'un à volonté des éléments adjacents aux cases de soudure et les unissant aux cases extrêmes de la marche résultante. Ces suppressions, faites suivant les quatre combinaisons admissibles, constituent quatre circuits différents pouvant être parcourus l'un et l'autre dans deux sens. Si dans l'une de ces combinaisons arbitraires les éléments sont parallèles et de même sens, à partir de la case de soudure, la marche complète qui en résultera sera rentrante, d'après une remarque antérieure, comme composée de deux polygones à résultantes parallèles et de sens opposés, puisque les cases de rupture doivent être considérées dans l'un des deux polygones à accoler comme case d'arrivée et dans l'autre comme case de départ.

Ainsi deux marches rentrantes sur elle-même l'une et l'autre pourront être réunies l'une à l'autre pour former une marche rentrante également si l'on peut trouver deux cases de l'une et de l'autre en communication par saut de cavalier et telles que l'élé-

ment de marche adjacent soit de direction et de sens identiques dans l'un et l'autre circuit.

Cette remarque fort utile est d'ailleurs évidente, puisque les deux éléments supprimés, le côté de soudure des deux marches et le saut de fermeture, ou seconde soudure, dans le cas où la marche totale sera rentrante, étant tous les quatre de même longueur, forment un losange dont les cases de rupture occupent un côté. Ce losange, marche rentrante de quatre sauts du cavalier, peut être carré ou avoir ses deux côtés adjacents inclinés à $\frac{1}{3}$.

V. En conséquence de ces principes généraux, nous allons étudier la formation de marches rentrantes à éléments symétriques et réguliers, d'abord simples et formées des plus petits nombres de sauts, puis en nombre de sauts croissant par l'accolement de marches formées au préalable dans les conditions voulues pour que la marche résultante soit rentrante sur elle-même. Les marches rentrantes partielles qui se présenteront d'elles-mêmes sont celles de quatre sauts, de seize sauts composées de quatre marches de quatre sauts, et celles de soixante-quatre sauts formées de l'accolement de quatre marches de seize sauts.

Des combinaisons diverses de fragments réguliers de ces diverses marches partielles permettront de faire décrire au cavalier des figures symétriques aussi élégantes que variées, sans la moindre difficulté, en se posant des conditions particulières. Ajoutons que, ayant essayé de nous affranchir de l'emploi de ces marches pour la formation en tâtonnant de marches complètes, nous y avons toujours été ramené malgré nous, ce qui nous confirme dans l'opinion qu'elles représentent la clef véritable de la solution générale du problème. Mais nous ferons précéder cette partie essentielle de notre étude de quelques réflexions importantes sur la division logique de l'échiquier la plus propre à nous servir de guide dans une voie encore inexplorée.

Division de l'échiquier en quatre quartiers; leur corrélation ⁽¹⁾.

Nous considérerons l'échiquier vulgaire comme divisé en quatre quartiers par les médianes des côtés opposés. Chacun de ces quartiers, que nous numérotions I, II, III, IV en partant du supérieur gauche et suivant le sens de rotation positive, est formé d'un carré de quatre cases de côté; pris à part, les quatre quartiers sont tous identiques les uns aux autres; accolés pour former l'échiquier, ils se distinguent par leur orientation ou la couleur de la case angulaire libre. Au point de vue de leur composition en cases blanches et noires, ou paires et impaires, d'après le numéro d'ordre de station dans une marche rentrante de soixante-quatre sauts, ces quartiers peuvent être mis en corrélation de diverses manières distinctes, eu égard aux diverses symétries de la mosaïque échiquéenne, dont les médianes sont axes de symétrie quant à la forme, et les diagonales de l'échiquier axes au double point de vue des formes et des couleurs, ou parité du numéro des cases. Nous remarquerons les corrélations suivantes :

1° Par coulisses, ou glissement parallèle d'un quartier sur son corrélatif; les coulisses sont formées pour deux quartiers adjacents par leurs deux côtés en ligne droite, côté et médiane parallèles de l'échiquier total; pour deux quartiers opposés par le sommet par les diagonales des deux autres quartiers, parallèles à la diagonale commune aux deux quartiers comparés l'un à l'autre;

2° Par symétrie par rapport à l'une des médianes pour deux quartiers adjacents seulement;

3° Par symétrie par rapport à un point central pour deux quartiers quelconques, comme pour les coulisses; le centre de symétrie sera le centre même de l'échiquier pour deux quartiers opposés, le milieu du côté de contact pour deux adjacents, c'est-à-dire toujours le milieu de la limite commune.

Observons, ce qui nous sera extrêmement précieux dans la suite, que les cases se correspondant l'une à l'autre dans deux quartiers

(¹) Nous ne donnons pas avec le texte un certain nombre de figures que le lecteur peut établir sans difficulté; il fera toutefois bien de les construire à part dans le but de rendre la lecture plus facile et plus claire.

en corrélation par coulisses ou par centre sont toujours de même parité, et que les cases correspondantes par symétrie axile des médianes sont de parités ou couleurs contraires. De plus, dans la symétrie par coulisses seule, les cases correspondantes sont toujours à distance de deux sauts de cavalier, c'est-à-dire forment les extrémités non communes de deux éléments consécutifs dans une même marche.

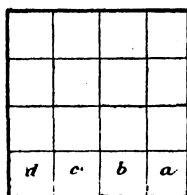
Marches rentrantes élémentaires dans un même quartier

(de quatre sauts).

Nous avons vu que les marches rentrantes de deux sauts exécutés successivement dans les deux sens sur le même élément sont sans intérêt; nous passerons donc de suite à l'étude des marches d'ordre immédiatement supérieur, c'est-à-dire de quatre sauts, que nous prendrons comme marches élémentaires.

Lorsque les deux cases en diagonale ne sont point situées sur une même parallèle aux côtés de l'échiquier, les quatre cases de la marche sont comprises dans l'intérieur d'une surface égale à l'un des quartiers; nous les étudierons donc dans ces derniers.

Fig. 1.



En vertu de la symétrie géométrique du quartier isolé, relativement à ses quatre côtés, et de la possibilité de commencer une marche rentrante en l'une quelconque de ses cases, nous pouvons choisir sur le carré de seize cases qui figure un quartier l'une des quatre cases *a*, *b*, *c*, *d*, situées sur un même côté, comme point de départ ou origine de la marche. On voit alors immédiatement que chacune de ces cases définit une marche rentrante distincte composée de quatre cases : les deux cases angulaires du quartier

servant de base à un circuit en losange à côtés inclinés au $\frac{1}{3}$, dont la case origine occupe l'extrémité de la grande diagonale commune avec le quartier et parallèle à l'une de celles de l'échiquier ; les deux cases intermédiaires *b* et *c* déterminant des marches en carré dont les côtés sont parallèles aux deux orientations 1 et 3, ou 2 et 4 de même parité, inclinées de $\frac{1}{2}$ ou 2 sur l'un ou l'autre axe. Chacun de ces quatre circuits, en lesquels se groupent les seize cases du quartier d'une manière parfaitement distincte et sans arbitraire, peut être parcouru d'ailleurs dans le sens positif ou dans le sens négatif.

Marches partielles rentrantes régulières en voltes (de seize sauts).

Supposons l'une de ces marches élémentaires tracée à la fois sur les quatre quartiers, que l'on orientera de la même manière en les replaçant sur l'échiquier ; elles se correspondront par coulisses dans les quartiers adjacents deux à deux et peuvent dès lors se souder en une seule marche par la suppression d'un côté à chacune d'elles, la case d'entrée dans les marches élémentaires successives étant indifférente, puisque la marche est rentrante.

On remarquera que, pour souder les marches élémentaires d'un quartier à l'autre, il est nécessaire de suivre ceux-ci dans un ordre de rotation continu, c'est-à-dire de ne souder que des quartiers adjacents deux à deux ; or, ce sont précisément ceux qui se correspondent par coulisses de même que les marches tracées sur chacun d'eux.

Le côté de jonction entre deux marches élémentaires successives étant à cheval sur le côté commun aux deux quartiers adjacents, la case d'entrée dans ce second quartier sera située sur le côté de la marche le plus rapproché du côté commun aux deux quartiers. Cela posé, si la marche se continue dans le sens qui vient d'être observé pour le passage du quartier précédent à celui où est décrite la marche, le troisième côté décrit sera l'un des deux voisins du quartier suivant et permettra, par la suppression du quatrième côté, de souder la marche au circuit dessiné dans le quartier suivant ; dans le cas où l'on voudrait poursuivre la marche dans le sens opposé, la quatrième case se trouverait l'une des deux éloi-

gnées du quartier suivant et le passage à la marche élémentaire suivante deviendrait impossible.

On voit donc que, si l'on décrit dans un premier quartier la marche élémentaire dessinée de manière à la souder à la marche du quartier suivant dans le sens de la rotation, le sens de la marche sera fixé par l'ordre dans lequel on veut visiter les divers quartiers, qu'à son tour il fixe le choix de celle des deux lignes de soudure possibles entre les deux circuits des quartiers voisins, mais dont une seule permet de réunir le circuit intermédiaire à ses deux adjacents dans un parcours continu.

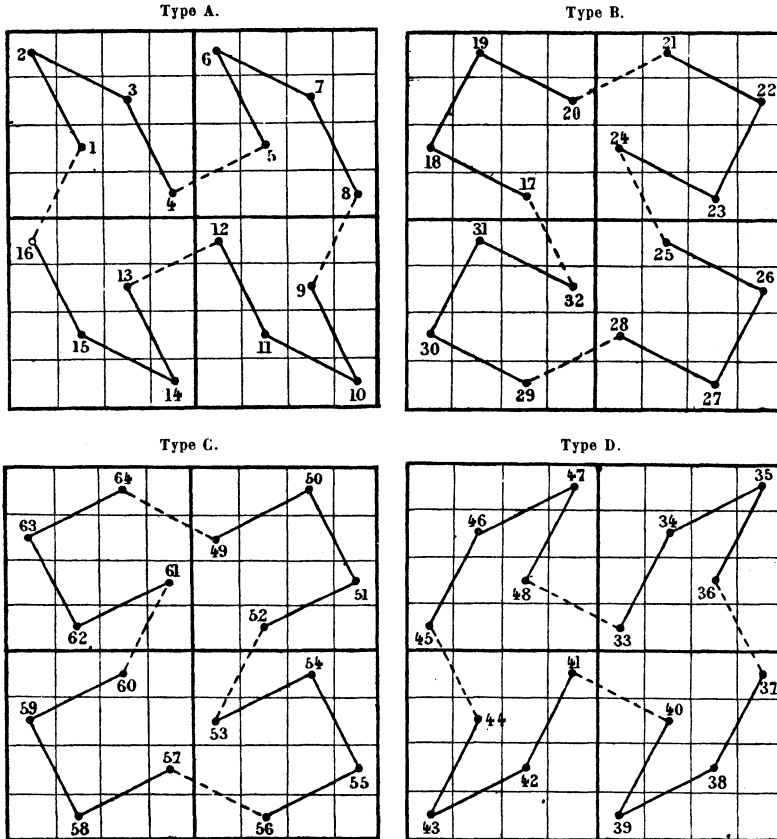
La case d'entrée dans un quartier et le sens de visite des quartiers, le même que le sens général de rotation dans la marche, déterminent ainsi la case de sortie de ce quartier et par elle la case d'entrée dans le suivant. Celle-ci, de même couleur ou parité que la case initiale du premier, lui correspondra soit par parallélisme ou coulisses, soit par symétrie centrale par rapport au milieu du côté mitoyen aux deux quartiers ; dans l'un et dans l'autre cas, la marche décrite par symétrie devra se produire dans le même sens que précédemment.

Quel que soit le côté supprimé à la marche élémentaire dans le premier quartier pour la souder à celle du second, il sera parallèle à celui qui resterait à parcourir pour fermer cette dernière, et qui sera supprimé à son tour pour effectuer la soudure entre les marches élémentaires du second et du troisième quartier ; le sens en sera le même si la corrélation des marches a été faite par coulisses, et inverse si elle a été obtenue au contraire par symétrie centrale.

On s'assurera aisément, par la construction des quatre diagrammes correspondant aux quatre marches résultant respectivement de la réunion en une seule des marches similaires dans les quatre quartiers, et pour les quatre types *a*, *b*, *c*, *d* (voir *fig. 2*, types A, B, C, D), que, sur les quatre corrélations obtenues, deux sont centrales et deux par coulisses, alternativement, quel que soit celui des quatre types considérés. La marche est donc rentrante, puisque les côtés supprimés se compensent d'une part et qu'il en est de même des côtés ajoutés d'autre part. Les deux moitiés d'une même marche sont, en outre, symétriques par rapport au centre de l'échiquier.

Dans ces diagrammes, les marches sont indiquées par les numéros d'ordre successifs des cases parcourues.

Fig. 2.



Premier type, A ; voltes en losange :

Cases 1, 2, 3, ..., 15, 16, 1.

Deuxième type, B ; voltes en carré :

Cases 17, 18, 19, ..., 31, 32, 17.

Troisième type, C ; voltes en carré :

Cases 49, 50, 51, ..., 64, 49.

Quatrième type, D ; voltes en losange :

Cases 33, 34, . . . , 48, 33.

Ces numéros serviront dorénavant à désigner les cases qu'ils occupent toutes les fois qu'une convention particulière n'aura pas été faite au préalable.

On vérifie sur la composition des diagrammes les points sur lesquels nous avons appelé l'attention, et l'on constate que les quatre marches sont non seulement rentrantes sur elles-mêmes, mais encore que l'on peut accoler deux à deux les marches élémentaires pareilles de deux quartiers consécutifs quelconques, en une marche rentrante de seize cases.

On remarquera en outre que les marches A et D sont symétriques par rapport aux médianes, à condition de parcourir l'une d'elles en sens inverse de l'autre. Il en est de même des marches B et C.

Nous avons ainsi, avec la plus grande facilité, groupé les soixante-quatre cases de l'échiquier en quatre séries de seize cases pouvant être parcourues chacune suivant une marche rentrante d'une parfaite régularité.

Chacune de ces marches se compose d'une succession de quatre voltes décrites successivement dans les quatre quartiers de l'échiquier sur quatre figures quadrilatères identiques et identiquement placées dans leurs quartiers respectifs, parcourues parallèlement par groupes de deux voisines et symétriquement d'un groupe à l'autre.

Les figures dessinées par ces voltes sont des losanges dans deux de ces séries ou types de marche, des carrés dans les deux autres, les grandes diagonales des losanges étant l'une des diagonales du quartier qui les renferme et les carrés étant inscrits dans le pourtour du quartier.

Le sens dans lequel sont visités les quartiers est toujours le même que celui dans lequel sont décrites les voltes, c'est-à-dire l'un et l'autre à la fois *dextrorsum* ou *sinistrorsum*.

Les diagrammes ci-dessus (*fig. 2*) représentent les quatre marches types *dextrorsum* distinctes. Les numéros inscrits sur les cases sont indicateurs des époques de passage du cavalier sur ces cases dans la marche rentrante complète *dextrorsum* de soixante-

quatre sauts la plus régulière que nous verrons tout à l'heure pouvoir être obtenue par la liaison des quatre marches partielles types de seize cases qui viennent d'être trouvées, en les faisant succéder dans l'ordre ABDC que nous verrons en même temps devoir être observé si l'on désire éviter un changement de sens dans le parcours d'une partie du circuit.

En considérant les marches symétriques par rapport à une médiane de l'échiquier des quatre types *dextrorsum* précédentes, on obtiendra quatre types de marches à la fois *sinistrorsum* comme sens de description des voltes et de visite des quartiers, similitude de sens que nous savons être exigée pour la possibilité du passage continu d'un quartier à l'autre, passage qui se fait nécessairement entre deux éléments rapprochés de la limite mitoyenne, et par conséquent qui fait suite à un élément se dirigeant vers celui-ci.

Or une telle symétrie, revenant à une rotation de l'échiquier autour de la médiane, à condition qu'on lise la marche par transparence sur la face opposée, peut être considérée comme une interversion réciproque des diagonales. Si l'on ne considère dès lors que la figure géométrique du circuit, sans se préoccuper du sens de la description, ni de la case de départ, on voit que les voltes losanges sont simplement interéchangées, ainsi que les voltes en carré. Mais, tout circuit rentrant pouvant évidemment être parcouru dans les deux sens opposés, le nouveau, en le décrivant d'un sens continu contraire, c'est-à-dire à la fois *dextrorsum* pour la description des voltes et la visite des quartiers, donnera également une marche rentrante de soixante-quatre cases. Est-elle différente essentiellement de la précédente ?

Les deux marches A et D, de même que les deux marches B et C, sont symétriques l'une de l'autre, non seulement comme figures géométriques, mais encore comme sens de la marche, dans leur ensemble de marches rentrantes sur elles-mêmes, si dans chaque système l'une des deux marches est décrite dans le sens positif, l'autre dans le sens négatif.

Les marches *dextrorsum* rentrantes sur elles-mêmes de seize cases, obtenues par le sens positif de marche sur le circuit symétrique des marches types A, B, C, D, sont donc mécaniquement semblables aux marches primitives D, C, B, A. Au point de vue de la description sur l'échiquier, on observera que les couleurs sont in-

terverties dans la correspondance de symétrie par les axes, et, comme dans une marche continue formée de voltes successives, la case d'entrée dans une volte est de même couleur pour toutes et de couleur opposée à la couleur commune à toutes les cases de sortie des mêmes voltes, les cases d'entrée dans les voltes de A seront les symétriques des cases de sortie des voltes symétriques de celles de D, et réciproquement, lorsque les marches partielles de seize cases A et D feront partie d'une même marche totale de soixante-quatre cases, et qu'il en sera de même entre les marches B et C.

La marche symétrique d'une marche donnée, comme circuit et sens (image de cette marche sur un miroir normal à l'échiquier et tracé suivant la médiane), admettra comme cases d'entrée et de sortie réciproquement les images des cases de sortie et d'entrée dans la volte qui lui donne naissance par symétrie, dans le cas où l'on voudra retourner le sens de la nouvelle marche, et, comme les couleurs de ces cases ont été interverties par la symétrie, et que de plus le changement de sens intervertit à leur tour ces cases dans un quartier déterminé, il en résulte que la couleur d'entrée dans les cases, et la couleur de sortie des nouvelles marches obtenues sont les opposées à celles des premières marches et que la soudure entre les différentes marches élémentaires de quatre sauts se fera par l'autre combinaison de cases en communication; ainsi, pour la marche A par 3-6, 5-12, 11-14 et 13-4, et de même pour les trois autres. Les nouvelles marches sont donc différentes des premières au point de vue de l'échiquier en mosaïque colorée.

Il n'en est plus essentiellement de même si l'on ne considère que la forme géométrique des circuits et leur sens de description, sans se préoccuper de la couleur de la dalle sur laquelle se fait le posé. On observe en effet que, si l'on superpose deux échiquiers tels que les cases se recouvrant soient de couleurs inverses dans l'un et dans l'autre, le premier système de marches sera décrit sur l'un d'eux par le cavalier qui décrit en même temps le second système sur le second échiquier, sa trace supposée traversant le dallage supérieur pour s'imprimer à la fois sur les deux.

Or, si l'on fait pivoter l'un des deux échiquiers autour du centre commun d'un quart de circonférence en supposant qu'il entraîne avec lui les traces laissées par la pièce avec les numéros des cases

visitées, les deux diagonales de même couleur, tout à l'heure à angle droit dans l'un et dans l'autre, viendront se superposer, et, les deux échiquiers devenant identiques, on voit que le cavalier décrivant la seconde marche n'a pour décrire la première qu'à débiter dans le quartier suivant et à la case qui est vue du centre à angle droit de la case initiale de la marche qu'il décrivait d'abord, et à même distance, puis à décrire à partir de ce point de départ des figures identiques aux premières et qui seront, vues du centre, à angle droit sur elles.

Dans ce mouvement, les marches élémentaires de quatre cases en losange s'intervertissent, A avec D, et de même les marches élémentaires B et C en carré comme orientation, mais en conservant leur coloration individuelle contraire à celle du système de cases sur lesquelles elles viennent se placer.

Si donc nous considérons une des marches rentrantes types primitives, A par exemple, qu'on forme sa symétrique par rapport à la médiane, qui n'est autre que la marche de nature semblable D parcourue en sens inverse, et qu'on en retourne le sens de description après avoir changé la case de départ d'un angle droit, c'est-à-dire de quatre unités dans son numéro d'ordre (en vertu de la symétrie centrale de la marche sur elle-même, il est indifférent de faire ce changement dans le sens positif ou dans le sens négatif), on obtiendra exactement la marche rentrante A, qui serait décrite en réunissant les quatre marches élémentaires a par la seconde combinaison de lignes de soudure, la première ayant donné la marche en voltes A.

On obtiendrait de même au moyen des marches B, C, D, par symétrie et retournement, les marches B_1 , C_1 , D_1 , qui ne sont autres que C, B, D tournées d'un angle droit ou décrites sur l'échiquier à couleurs inversées.

Une autre rotation d'un angle droit rétablirait le système primitif.

En résumé, il n'existe, au point de vue géométrique pur, qu'un groupe de quatre marches rentrantes de seize cases de quatre types déterminés; mais ces types, sur l'échiquier coloré, donnent chacun naissance à deux marches exactement pareilles, mais exécutées réciproquement sur les cases de couleurs contraires. Les diagrammes des marches A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , que nous donnerons déve-

loppés plus bas, à propos de la formation des marches complètes de soixante-quatre cases, permettent de se rendre compte par la vue seule de ces vérités, que nous avons tenu à ne devoir qu'au raisonnement géométrique.

Ayant obtenu les marches naturelles en voltes semblables uniformément décrites dans les quatre régions de l'échiquier, symétriques entre elles et se partageant les soixante-quatre cases, il nous reste, pour résoudre le problème, à les souder entre elles de manière à ne former qu'une seule marche s'étendant à toutes les cases de l'échiquier. Cette liaison se fera aisément, comme pour les marches élémentaires, qui par leur réunion ont donné les marches partielles de seize cases; les marches partielles vont à leur tour se souder les unes aux autres dans toute leur intégrité, sans aucun fractionnement, pour donner les marches entières de soixante-quatre cases. Cherchons donc les modes de soudure qu'admettent entre elles les marches de types différents.

Quartiers dérivés. — Soudure des marches de divers types.

Nous avons déjà vu que les voltes de même type se sont soudées les unes aux autres d'un quartier au quartier adjacent, et ainsi de suite, pour donner les quatre types correspondants de marches partielles. Pour connaître la manière dont se souderont les voltes de noms différents, reportons-nous à la rosace formée par une station du cavalier et les huit cases sur lesquelles il peut passer d'un seul saut sur l'échiquier indéfini; ces huit cases d'arrivée sont réparties, sur un cercle concentrique au centre de la case de départ, en groupes de deux symétriques par rapport aux parallèles menées par celui-ci aux diagonales de l'échiquier, chaque groupe de deux étant dans un quadrant différent formé par les parallèles aux côtés de l'échiquier menées par la case de départ. Elles se répartissent également par deux sur les quatre bandes horizontales ou sur les quatre colonnes verticales, non médianes, du carré de cinq cases de côté ayant son centre en la case de départ. Sur l'échiquier limité, un certain nombre de ces cases d'arrivée peuvent disparaître suivant la position de la case de départ, et dès que celle-ci sort du quartier central de quatre cases de côté. Ainsi :

Si la case de départ est située sur la colonne touchant au côté

de l'échiquier, deux des colonnes contenant les cases d'arrivée disparaissent. Il ne reste donc plus que quatre de ces dernières.

Si elle est voisine de la colonne frontière, une colonne du carré de cinq cases disparaît, et avec elle deux cases d'arrivée.

Si elle est éloignée de la colonne frontière, mais sur la bande frontière, ou simplement voisine d'elle, il ne reste de même que quatre ou six cases d'arrivée.

Si la case de départ est en même temps rapprochée des deux limites de l'échiquier formant un angle, il disparaîtra la somme des cases qui ne se trouvent pas à la fois dans les deux groupes à retrancher. On aura ainsi :

1° Pour les cases angulaires, deux cases d'arrivée seulement ;

2° Pour les cases frontières voisines du coin, trois cases d'arrivée ;

3° Pour les autres cases frontières, ainsi que la case diagonale voisine du coin, quatre cases d'arrivée ;

4° Pour les cases tangentes extérieurement au quartier central, six cases d'arrivée ;

5° Enfin, pour les cases intérieures au quartier central, huit cases d'arrivée.

On sait déjà que, les marches de chaque type étant rentrantes, chaque case est nécessairement en communication avec deux de son système ; ces deux cases sont donc à retrancher du nombre total pour obtenir le maximum de cases de sortie d'un système dans un autre. Cherchons comment les marches peuvent se souder dans un même quartier.

Un simple coup d'œil suffit à s'assurer que, dans un même quartier, le passage d'une volte à une autre ne peut s'effectuer que simultanément à un changement dans la nature de la volte, c'est-à-dire avec alternance de carré et de losange ; il ne peut, du reste, s'effectuer que d'une case centrale à une case de pourtour et réciproquement, les voltes carrées inscrites dans le pourtour fournissant les communications possibles de pourtour à pourtour. Il en résulte immédiatement que les voltes en losange qui se terminent sur l'un des angles nécessitent une sortie immédiate du quartier qui ne leur offre aucun débouché pour continuer la marche. Les voltes en losange qui ont débuté par un angle aigu sur le pourtour et se terminent dès lors sur un angle obtus au

centre peuvent au contraire se poursuivre par les deux marches différentes en carré auxquelles les deux cases de pourtour en communication avec la case terminale serviront d'entrée ; ces deux cases, opposées par le sommet commun et symétriques l'une de l'autre par rapport à la parallèle à la diagonale menée par la case terminale du losange, appartiennent nécessairement aux deux marches carrées différentes, en raison même de leur contiguïté.

Notons en passant que les marches élémentaires, étant rentrantes, peuvent, si aucune condition particulière ne s'y oppose, quelle que soit la case d'entrée, être indifféremment poursuivies dans un sens ou dans l'autre, ce qui intervertit simplement le premier côté et la résultante des trois autres, et change la case d'arrivée avec son opposée diagonale dans la volte.

Les voltes carrées dont les cases frontières d'un côté et voisines de la frontière de l'autre n'ont que trois cases d'arrivée, et par suite une seule de marche différente, ne peuvent se continuer dans le même quartier que par une seule case d'entrée et suivant la marche en losange, qui dans le carré a la petite diagonale de la couleur commune aux cases d'entrée de toutes les voltes (mais dans les deux sens de parcours).

On voit donc que, suivant la couleur de la case de départ ou d'entrée dans les diverses voltes, les passages d'une volte en carré à une volte en losange dans le même quartier ne pourront se faire que sur la marche type en losange, qui comprend les cases angulaires de l'échiquier de couleur opposée à la case d'entrée.

Si nous formons un quartier dérivé par l'accolement des deux demi-quartiers contigus à une médiane de l'échiquier, cette médiane, côté mitoyen des deux quartiers primitifs, devient la médiane du quartier dérivé ; les cases angulaires des côtés des quartiers primitifs perpendiculaires au côté mitoyen deviennent les cases intermédiaires des mêmes côtés du quartier dérivé, et réciproquement.

Si le côté mitoyen est vertical, les cases appartenant aux mêmes marches restent unies en une marche rentrante de quatre cases, mais de nom différent ; les marches A, B, C, D deviennent réciproquement C, D, A, B en avançant de deux rangs. Si le côté mitoyen est horizontal, la permutation de marche se fait encore

avec changement de forme, mais de voisine à voisine, A, B, C, D devenant réciproquement B, A, D, C du quartier dérivé.

Si l'on forme le dérivé de deux quartiers de l'échiquier, ainsi que le dérivé des deux autres, on aura deux nouveaux quartiers accolés suivant la médiane en dehors de l'accolement précédent. En les dérivant par rapport à cette médiane, on obtient le quartier central de l'échiquier, et les cases appartenant aux diverses marches des quartiers primitifs se grouperont de manière à former les marches symétriques du quartier doublement dérivé, soit A et D permutant entre elles ainsi que B et C.

Les cases par lesquelles se soudent les marches dans deux quartiers voisins, distantes de deux pas l'une de l'autre dans le sens d'un des côtés et d'un seul dans l'autre, appartiennent l'une et l'autre au quartier dérivé des deux, et, par conséquent, les règles de passage d'une volte à l'autre avec changement de quartier se déduiront des règles de passage dans le même quartier, eu égard aux modifications de marche introduites par la dérivation. On constate ainsi que, dans le passage d'un quartier au suivant :

Les marches en losange se terminant à un angle aigu (couleur paire) ⁽¹⁾ se soudent dans le carré suivant, soit à l'angle obtus de la marche losange de même nom, soit à une seule marche en carré : celle qui, sur la médiane aussi bien que sur le pourtour de l'échiquier, lui est contiguë si le côté mitoyen traversé est vertical ; celle qui ne lui est pas contiguë si le côté mitoyen est au contraire horizontal.

Les marches en losange terminées sur un angle obtus (également couleur paire) se soudent dans le carré suivant à l'angle aigu de leur homonyme et de même à une seule marche en carré, celle de même qui, par les cases sur la médiane ou sur le pourtour de l'échiquier, lui est contiguë ou non, suivant que le côté mitoyen est vertical ou horizontal.

Enfin les marches en carré se soudent également à leurs homonymes de même orientation dans le carré voisin, et de plus à l'une et l'autre des marches en losange, à l'angle obtus de celle qui sur le pourtour lui est contiguë, à l'angle aigu de celle qui ne la touche

(1) On suppose la marche débutant à l'une des cases d'entrée, et par suite les cases d'entrée toutes impaires, les cases de sortie toutes paires.

point sur les médianes ou le contour de l'échiquier si le côté mitoyen est vertical, aux angles contraires s'il est horizontal.

En règle générale, dans le même quartier comme d'un quartier à l'autre, une marche se soude à elle-même ; mais le changement de marche ne s'effectue que conjointement à un changement dans la nature losange ou carrée de la volte.

Lorsque l'on soude une marche à une autre, le sens de description de la seconde doit être observé de manière à ne pas rejeter la case de sortie de sa première volte vers l'extérieur, sous peine de ne pouvoir être continuée ; suivant que la case d'entrée est intérieure ou extérieure au quartier central de l'échiquier, il y aura possibilité de poursuivre la marche dans les deux sens sur le circuit nouveau en modifiant suivant le sens les lignes de soudure, ou bien on devra adopter le sens unique qui débute par côtoyer la frontière extérieure.

Autre observation. Si l'on cherche à parcourir le plus de cases possible dans le même quartier, on n'aura point la faculté d'éviter la description par voltes ; il sera d'ailleurs impossible d'y souder plus de trois voltes consécutives, l'intermédiaire étant l'une des voltes en carré, soudée de part et d'autre aux deux voltes en losange ; la soudure étant nécessairement sur les angles obtus de celles-ci, les cases d'entrée de la première décrite et de sortie de la dernière seront sur les angles aigus et, par suite, ne communiqueront qu'avec l'extérieur. On peut d'ailleurs souder l'une ou l'autre des voltes carrées aux deux voltes losanges.

(*A suivre.*)
