

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

## **Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques : deux compléments**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 108 (1980), p. 213-227

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1980\\_\\_108\\_\\_213\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__213_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## FORMES QUADRATIQUES MULTIPLICATIVES ET VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES : DEUX COMPLÉMENTS

PAR

J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE (\*)

RÉSUMÉ. — Dans un article précédent, on a associé à toute variété algébrique intègre  $X$  définie sur un corps  $k$  de caractéristique différente de 2, et à toute forme de Pfister  $\Phi$  définie sur  $k$ , un groupe  $D^*(X)$ . On montre ici que de certaines propriétés de ces groupes résulte formellement leur trivialité sur les  $k$ -variétés intègres propres dont le corps des fractions est transcendant pur sur  $k$ . Par ailleurs, on déduit d'autres propriétés des groupes  $D^*(X)$  l'existence, sur toute  $\mathbb{R}$ -variété intègre, projective et lisse  $X$  telle que l'espace  $X(\mathbb{R})$  des points réels ait  $s$  composantes connexes, de 0-cycles de degré  $(s-2)$  qui ne sont pas rationnellement équivalents, sur  $X$ , à un 0-cycle effectif.

ZUSAMMENFASSUNG. — In einem früheren Artikel wurde zu jeder reduzierten und irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit  $X$  über dem Körper  $k$  (Char.  $k \neq 2$ ) und zu jeder Pfisterform  $\Phi$  über  $k$  eine Gruppe  $D^*(X)$  assoziiert. Im ersten Teil dieses Artikels wird auf formelle Art gezeigt : ist  $X$  vollständig und der Funktionenkörper von  $X$  rein transzendent, dann ist  $D^*(X)$  trivial. Im zweiten Teil, in dem  $k = \mathbb{R}$ , und in dem  $X$  glatt und projektiv ist, und  $s$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Raumes  $X(\mathbb{R})$  der reellen Punkte von  $X$  bezeichnet, benutzt man die Gruppen  $D^*(X)$  um das Bestehen auf  $X$  von 0-Zyklen des Grades  $(s-2)$ , die nicht zu einem effektiven Zyklus rational äquivalent sind, festzustellen.

### Introduction

Soit  $k$  un corps, supposé dans cette introduction de caractéristique 0, et  $X$  une  $k$ -variété algébrique géométriquement intègre, propre et lisse sur  $k$ . Dans beaucoup de cas où l'on montre que  $X$  n'est pas  $k$ -rationnelle (i. e. de corps des fractions transcendant pur sur  $k$ ), la méthode utilisée est, grossièrement, la suivante. On définit un foncteur  $G$  de la catégorie des  $k$ -variétés propres et lisses dans une autre catégorie (par exemple les groupes abéliens) satisfaisant :

- (i)  $G$  est trivial sur l'espace projectif  $\mathbb{P}_k^n$ , c'est-à-dire  $G(\mathbb{P}_k^n)$  est isomorphe à  $G(\text{Speck})$ ;
- (ii)  $G$  est un invariant  $k$ -birationnel :  $G(Y)$  ne dépend, à isomorphisme près, que du corps des fractions de  $Y$ .

---

(\*) Texte reçu le 6 juin 1979.

J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, 81, avenue du Général-Leclerc, 75014 Paris.

On constate ensuite que  $G(X)$  est non trivial, ce qui permet de conclure, puisque (i) et (ii) impliquent :

(iii) Si  $Y$  est  $k$ -rationnelle,  $G(Y)$  est trivial.

En pratique, il est souvent assez délicat d'établir (ii). Au paragraphe 1 de cet article, on voit que pour certains foncteurs  $G$  assez généraux, satisfaisant des conditions simples (*spécialisation* et *homotopie*), on obtient (iii) de façon relativement formelle. Plusieurs exemples de tels foncteurs sont donnés au paragraphe 2 : le groupe de Brauer de  $Y$ , les groupes  $D^\Phi(Y)$  et  $\tilde{D}^\Phi(Y)$  associés dans [2] à une  $k$ -variété intègre  $Y$  et à une  $k$ -forme de Pfister  $\Phi$ . Pour ces derniers groupes, on ne sait établir (ii) que pour  $Y$  de dimension deux [5]. L'énoncé (iii) pour  $D^\Phi(Y)$ , qui a motivé la première partie de cet article, peut se déduire du corollaire 4.3 de l'article [8] de M. Knebusch. Il a cependant semblé utile de dégager la géométrie sous-jacente à ce genre de situations, dans la mesure où elle permet d'obtenir (iii) dans de nombreux cas.

Dans [3], D. Coray et l'auteur ont montré que, pour toute  $k$ -surface fibrée en coniques  $X$  au-dessus de  $\mathbb{P}_k^1$ , il existe un entier  $N$ , dépendant d'un invariant simple de la surface, tel que tout 0-cycle sur  $X$  de degré au moins  $N$  est rationnellement équivalent, sur  $X$ , à un 0-cycle effectif : au paragraphe 3, qui est indépendant des précédents, on montre comment de l'existence, pour  $X$   $k$ -variété intègre projective et lisse, d'un accouplement entre  $\tilde{D}^\Phi(X)$  et les classes de 0-cycles sur  $X$ , pour l'équivalence rationnelle (accouplement défini dans [2]), ainsi que de la valeur de certains groupes  $\tilde{D}^\Phi(X)$  dans le cas  $k = \mathbb{R}$ , on tire le résultat annoncé dans le résumé, qui implique lui-même que la valeur de l'entier  $N$  obtenue dans [3] est, en général, la meilleure possible.

Le plan de l'article est le suivant :

0. Rappels et notations.

1. Trivialité de certains foncteurs sur les variétés  $k$ -rationnelles.

2. Exemples.

3. Compléments sur l'équivalence rationnelle sur les 0-cycles des variétés réelles.

Je remercie J.-J. Sansuc pour ses critiques de premières versions de cet article.

## 0. Rappels et notations

Il s'agit de rappels de [2]. On note  $A^\times$  le groupe des éléments inversibles d'un anneau  $A$  (commutatif unitaire). Pour  $k$  (car  $k \neq 2$ ) un corps,  $\Phi$  une

$k$ -forme de Pfister ([10], chap. 10) et  $K$  un surcorps de  $k$ , on note  $D_K(\Phi)$  le sous-groupe de  $K^\times$  formé des éléments représentés par  $\Phi$  sur  $K$ . Pour  $X$  une  $k$ -variété algébrique (=schéma séparé et de type fini sur  $k$ ) intègre, de corps des fractions  $k(X)$ , on définit le groupe

$$D^\Phi(X) = \{ f \in k(X)^\times, \forall P \in X, \exists g \in D_{k(X)}(\Phi), f/g \in O_{X,P}^\times \} / D_{k(X)}(\Phi),$$

où  $O_{X,P}$  désigne l'anneau local du point  $P$  du schéma  $X$ . Le groupe  $D^\Phi(X)$  contient un sous-groupe,  $\tilde{D}^\Phi(X)$ , formé des classes des éléments de  $k(X)^\times$  qui s'écrivent partout semi-localement comme le produit d'une fonction inversible par un élément de  $D_{k(X)}(\Phi)$ . On note  $D^\Phi(k) = D^\Phi(\text{Spec } k) = k^\times / D_k(\Phi)$ . Pour  $X$  une  $k$ -variété intègre régulière, on dispose d'accouplements, linéaires à droite, et à gauche pour le second

$$\begin{aligned} (1) \quad & X(k) \times D^\Phi(X) \rightarrow D^\Phi(k), \\ & (P, \alpha) \mapsto \langle P, \alpha \rangle, \\ (2) \quad & Z_0(X) \times D^\Phi(X) \rightarrow D^\Phi(k), \\ & (\sum_i n_i P_i, \alpha) \mapsto \langle \sum_i n_i P_i, \alpha \rangle = \prod_i \langle P_i, \alpha \rangle^{n_i}, \end{aligned}$$

où  $Z_0(X)$  désigne le groupe des 0-cycles de  $X$ , i.e. le groupe libre sur les points fermés de  $X$ . Pour  $X$  supposée de plus propre, respectivement projective, ces accouplements induisent des accouplements, bilinéaire pour le second

$$(3) \quad X(k)/R \times D^\Phi(X) \rightarrow D^\Phi(k)$$

respectivement

$$(4) \quad A_0(X) \times \tilde{D}^\Phi(X) \rightarrow D^\Phi(k),$$

où  $X(k)/R$  désigne le quotient de  $X(k)$  par la  $R$ -équivalence, et  $A_0(X)$  désigne le groupe des classes de 0-cycles sur  $X$ , modulo l'équivalence rationnelle. Comme  $D^\Phi(k)$  est annulé par  $x \mapsto x^2$ , le dernier accouplement est trivial sur  $2A_0(X)$  (l'analogie valait pour (2)); il en induit donc un autre

$$(5) \quad A_0(X)/2A_0(X) \times \tilde{D}^\Phi(X) \rightarrow D^\Phi(k).$$

Pour  $X$  une variété projective et lisse sur le corps  $\mathbb{R}$  des réels, géométriquement intègre de dimension  $n$ , notant  $\varphi_n$  la forme de Pfister « somme de  $2^n$  carrés », on a des isomorphismes

$$(6) \quad \tilde{D}^{\varphi_n}(X) \simeq D^{\varphi_n}(X) \simeq (\pm 1)^s.$$

où  $s$  est le nombre de composantes connexes de l'espace  $X(\mathbb{R})$  des points  $\mathbb{R}$ -rationnels de  $X$ , muni de la topologie réelle, et où la deuxième flèche est induite par (1) — noter  $D^{\circ*}(\mathbb{R}) \simeq (\pm 1)$ . Dans ce cas, les accouplements (2), (4), (5) ne dépendent que des points réels de  $X$  : si  $P$  est un point fermé complexe (c'est-à-dire que le degré, sur  $\mathbb{R}$ , du corps résiduel  $\mathbb{R}(P)$  en  $P$  est deux) pour tout  $\alpha$  dans  $D^{\circ*}(X)$ , on a  $\langle P, \alpha \rangle = 1$ , car, par définition ([2], 3.2.1) de l'accouplement (2),  $\langle P, \alpha \rangle$  est la classe, dans  $(\pm 1) = \mathbb{R}^{\times} / \mathbb{R}^{\times+}$ , de la norme, de  $\mathbb{R}(P) \simeq \mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}$ , d'un nombre complexe.

### 1. Trivialité de certains foncteurs sur les variétés $k$ -rationnelles

Dans ce paragraphe,  $k$  est un corps, et on note  $F$  un foncteur covariant de la catégorie des  $k$ -algèbres locales (avec comme morphismes les  $k$ -homomorphismes locaux) dans la catégorie des groupes abéliens. Étant donné  $X$  un  $k$ -schéma intègre, de corps des fractions  $k(X)$ , on définit

$$D^F(X) = \left( \bigcap_{P \in X} \text{Im}(F(O_{X,P}) \rightarrow F(k(X))) \right),$$

où  $P$  parcourt les points du schéma  $X$ , et où les flèches sont déduites des inclusions  $O_{X,P} \subset k(X)$ ; de façon intuitive,  $D^F(X)$  est le sous-groupe de  $F(k(X))$  formé des éléments qui ont bonne réduction partout localement sur  $X$ . Étant donné  $f: X \rightarrow Y$  un  $k$ -morphisme dominant de  $k$ -schémas intègres, on en tire par considération des points génériques un homomorphisme fonctoriel (pour de tels  $k$ -morphisms)  $f^*: D^F(Y) \rightarrow D^F(X)$ .

#### DÉFINITION :

(S) On dit que  $F$  satisfait la condition de spécialisation, notée (S), si, pour toute  $k$ -algèbre  $A$  qui est un anneau de valuation discrète, de corps des fractions  $K$  et de corps résiduel  $\kappa$ , on a

$$\text{Ker}(F(A) \rightarrow F(K)) \subset \text{Ker}(F(A) \rightarrow F(\kappa)).$$

(H) On dit que  $F$  satisfait la condition d'homotopie, notée (H), si, pour tout surcorps  $K$  de  $k$ , l'homomorphisme

$$p^*: F(K) = D^F(K) \rightarrow D^F(\mathbb{A}_K^1),$$

déduit du morphisme structural  $p: \mathbb{A}_K^1 \rightarrow \text{Spec } K$  de la droite affine, est un isomorphisme.

Comme on le verra en 2.5, les groupes  $D^{\circ*}(X)$  sont des exemples de groupes  $D^F(X)$ , avec  $F$  satisfaisant les conditions de spécialisation et d'homotopie, et

de nombreux arguments qui ont été développés dans [2] se transcrivent *in extenso* pour les groupes  $D^F(X)$ , dès que  $F$  satisfait (S) et (H). Je ne détaillerai donc pas les démonstrations.

1.1. LEMME. — *Pour voir qu'un foncteur  $F$  comme ci-dessus satisfait la condition de spécialisation, il suffit de le voir pour  $A$  une  $k$ -algèbre qui est un anneau de valuation discrète complet; si  $F$  satisfait la condition de spécialisation, pour toute  $k$ -algèbre locale régulière, de corps des fractions  $K$  et de corps résiduel  $\kappa$ , on a*

$$\text{Ker}(F(A) \rightarrow F(K)) \subset \text{Ker}(F(A) \rightarrow F(\kappa)).$$

*Démonstration.* — La première partie est immédiate; pour la seconde, on utilise le même type de récurrence que dans [2], 2.1, ou [5], §. 6.1.

1.2. PROPOSITION. — *Si  $F$  satisfait la condition de spécialisation, la correspondance  $X \mapsto D^F(X)$  définit un foncteur contravariant de la catégorie des  $k$ -schémas réguliers intègres (avec comme morphismes les  $k$ -morphisms) dans la catégorie des groupes abéliens. En particulier, pour  $X$  un  $k$ -schéma régulier intègre, l'homomorphisme  $F(k) = D^F(\text{Spec } k) \rightarrow D^F(X)$  déduit du morphisme structural est injectif dès que  $X$  possède un  $k$ -point.*

*Démonstration.* — C'est une généralisation immédiate de celle de [2], proposition 2.2.2. Indiquons simplement comment, étant donné  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme de la catégorie de schémas susdite, on définit  $f^*: D^F(Y) \rightarrow D^F(X) \subset F(k(X))$  (coïncidant, pour  $f$  dominant, avec l'homomorphisme  $f^*$  défini plus haut). Un élément  $\alpha$  de  $D^F(Y)$  provient d'un élément  $\beta$  de  $F(\mathcal{O}_{Y, f(\xi)})$ , où  $\xi$  est le point générique de  $X$ . Du  $k$ -homomorphisme local  $\mathcal{O}_{Y, f(\xi)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, \xi} \simeq k(X)$ , on déduit un homomorphisme de groupes abéliens par application de  $F$ , et on définit  $f^*(\alpha)$  comme l'image de  $\beta$  par cet homomorphisme. Le lemme 1.1 permet de voir que  $f^*$  est bien défini. La dernière assertion de la proposition résulte de la fonctorialité de  $D^F$ .

1.3. PROPOSITION. — *Soit  $\pi: X \rightarrow Y$  un  $k$ -morphisme de  $k$ -schémas réguliers intègres,  $\eta$  le point générique de  $Y$ , et  $p: X_\eta \rightarrow \eta = \text{Spec } k(Y)$  la fibre générique de  $\pi$ ; supposons que  $F$  satisfait la condition de spécialisation, et que :*

- (i) *localement pour la topologie de Zariski sur  $Y$ ,  $\pi$  admet une section;*
- (ii) *l'homomorphisme  $p^*: F(k(Y)) \rightarrow D^F(X_\eta)$  est un isomorphisme.*

*Alors l'homomorphisme  $\pi^*: D^F(Y) \rightarrow D^F(X)$  est un isomorphisme.*

*Démonstration* (cf. [2], 4.1.2). — Soit  $\sigma : U \rightarrow X$  une section de  $\pi$  au-dessus de l'ouvert  $U$  de  $Y$ , et  $s : \eta \rightarrow X_\eta$  la section de  $p$  qu'elle définit. Utilisant 1.2 et le (ii) de l'hypothèse, nous obtenons le diagramme commutatif d'homomorphismes

$$\begin{array}{ccccc}
 F(k(Y)) & \supset & D^F(U) & & \\
 s^* \uparrow & & \sigma^* \uparrow & & \\
 D^F(X_\eta) & \supset & D^F(\pi^{-1}(U)) & \supset & D^F(X) \\
 p^* \uparrow & & \pi^* \uparrow & & \uparrow \pi^* \\
 F(k(Y)) & \supset & D^F(U) & \supset & D^F(Y)
 \end{array}$$

Une chasse au diagramme montre que pour  $\alpha \in D^F(X)$ , son image dans  $D^F(X_\eta)$  provient d'un élément  $\beta$  de  $F(k(Y))$ , indépendant de  $U$ , et appartenant à  $D^F(U)$ . L'hypothèse (i) montre que les ouverts  $U$  pour lesquels il existe une section de  $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$  recouvrent  $Y$ . Ainsi l'intersection, dans  $F(k(Y))$ , des  $D^F(U)$  correspondant est  $D^F(Y)$ , et  $\beta$  appartient à  $D^F(Y)$ . Du diagramme on déduit  $\alpha = \pi^*(\beta) \in \pi^*(D^F(Y))$ .

**1.4. PROPOSITION.** — Soit  $k$  un corps infini,  $n \geq 1$  un entier, et  $p : \mathbb{A}_k^n = \mathbb{A}_k^{n-1} \times_k \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^{n-1}$  la projection sur le premier facteur. Soit  $U$  un ouvert de Zariski non vide de  $\mathbb{A}_k^n$ . L'image ensembliste  $V = p(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{A}_k^{n-1}$ , et le  $k$ -morphisme  $q : U \rightarrow V$  induit par  $p$  admet, localement pour la topologie de Zariski sur  $V$ , une section. Si  $U$  contient tous les points de codimension 1 de  $\mathbb{A}_k^n$ , alors  $V$  contient tous les points de codimension 1 de  $\mathbb{A}_k^{n-1}$ , et la fibre de  $q$  au-dessus du point générique  $\eta$  de  $V$  (qui est aussi celui de  $\mathbb{A}_k^{n-1}$ ) s'identifie à la fibre générique de  $p$ , c'est-à-dire à  $\mathbb{A}_{k(\eta)}^1$ .

*Démonstration.* — (i) Pour établir la première assertion, il suffit de montrer : si  $P$  est un point de  $p(U)$ , il existe un ouvert  $W$  de  $\mathbb{A}_k^{n-1}$  contenant  $P$ , et tel que  $p_W : p^{-1}(W) \rightarrow W$  admette une section  $\rho$  avec  $\rho(W) \subset U$ . Notons  $A$  l'anneau de  $\mathbb{A}_k^{n-1}$ , et  $\mathfrak{p}$  l'idéal premier de  $A$  définissant  $P$ . De l'homomorphisme composé

$$A \rightarrow A_{\mathfrak{p}} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = k(P)$$

(le deuxième homomorphisme est la surjection naturelle du localisé sur son corps résiduel), on déduit le diagramme de produits fibrés

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{A}_{k(P)}^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}_{A_{\mathfrak{p}}}^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^n \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 & & \downarrow p \\
 \text{Spec } k(P) & \longrightarrow & \text{Spec } A_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^{n-1}
 \end{array}$$

Comme  $P$  appartient à  $p(U)$ , l'image réciproque de  $U$  via  $\mathbb{A}_{\kappa(P)}^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^n$  est un ouvert non vide qui, puisque  $k$  est infini, donc aussi  $\kappa(P)$ , possède un point  $\kappa(P)$ -rationnel. Ce point s'identifie à une section de  $p_1$ , qu'on peut relever en une section de  $p_2$ , laquelle provient elle-même d'une section  $\sigma$  de  $p_Y : \mathbb{A}_Y^1 \rightarrow Y$ , pour  $Y$  ouvert convenable contenant  $P$ . Il est facile de voir que l'ouvert  $W$  image réciproque de  $U$  par le morphisme composé  $Y \xrightarrow{\sigma} \mathbb{A}_Y^1 \subset \mathbb{A}_k^n$  convient.

(ii) Si un point  $P$  de codimension 1 de  $\mathbb{A}_k^{n-1}$  n'appartient pas à  $p(U)$ , le point générique de la fibre de  $p$  au-dessus de  $P$  définit un point de codimension 1 de  $\mathbb{A}_k^n$  qui n'est pas dans  $U$ . Par ailleurs les points de la fibre générique de  $p$  définissent des points de  $\mathbb{A}_k^n$  de codimension au plus 1. Ceci suffit à établir la deuxième partie de la proposition.

Nous arrivons au résultat principal de ce paragraphe :

1.5. THÉORÈME. — Soit  $k$  un corps,  $F$  un foncteur covariant de la catégorie des  $k$ -algèbres locales dans la catégorie des groupes abéliens, satisfaisant les conditions de spécialisation et d'homotopie. Pour  $X$  une  $k$ -variété intègre, l'homomorphisme  $F(k) = D^F(\text{Spec } k) \rightarrow D^F(X)$  déduit du morphisme structural est un isomorphisme dans chacun des cas suivants :

- (i)  $k$  est infini, et  $X$  est un ouvert de l'espace affine  $\mathbb{A}_k^n$  contenant tous les points de codimension 1 de  $\mathbb{A}_k^n$ .
- (ii)  $X$  est une  $k$ -variété propre, de corps des fractions transcendant pur sur  $k$ , supposée lisse si  $k$  est fini.

*Démonstration.* — Dans le cas (i), il existe d'après la proposition 1.4 une chaîne de  $k$ -morphisms  $X = U_n \rightarrow U_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow U_0 = \text{Spec } k$ , avec  $U_i$  ouvert de  $\mathbb{A}_k^i$  contenant tous les points de codimension  $\leq 1$  de  $\mathbb{A}_k^i$ , et  $p_i : U_i \rightarrow U_{i-1}$  un  $k$ -morphisme admettant localement pour la topologie de Zariski sur  $U_{i-1}$  une section, et dont la fibre générique est la droite affine sur le point générique de  $U_{i-1}$ . Comme  $F$  satisfait (S) et (H), il résulte de 1.3 que  $p_i^* : D^F(U_{i-1}) \rightarrow D^F(U_i)$  est un isomorphisme. Par fonctorialité de  $D^F$ , on en déduit que  $p^* : F(k) = D^F(U_0) \rightarrow D^F(U_n) = D^F(X)$  est un isomorphisme, ce qui établit (i).

Pour traiter le cas (ii), supposons d'abord  $k$  infini. Comme  $X$  est propre sur  $k$ , il existe un ouvert  $U$  d'un espace affine  $\mathbb{A}_k^n$ , contenant tous les points de codimension 1 de  $\mathbb{A}_k^n$ , et un  $k$ -morphisme birationnel  $f : U \rightarrow X$ . Par fonctorialité de  $D^F$  (pour les  $k$ -morphisms dominants de  $k$ -schémas intègres), on en déduit le diagramme commutatif d'homomorphismes



$$\begin{array}{ccc}
 F(\operatorname{Spec} k) & \longrightarrow & D^F(X) \subset F(k(X)) \\
 \parallel & & \downarrow f^* \quad \downarrow i^* \\
 F(\operatorname{Spec} k) & \longrightarrow & D^F(U) \subset F(k(U))
 \end{array}$$

d'où le résultat, en appliquant le (i) à  $U$ .

Pour traiter le cas où  $k$  est fini, et  $X$  intègre propre et lisse sur  $k$ , suivant Knebusch ([8], p. 297), on introduit un corps  $L = k(u)$  extension transcendante pure de  $k$ , et  $A \subset L$  l'anneau local d'un  $k$ -point de  $\mathbb{A}_k^1$ . Un lemme démontré ci-dessous nous assure de l'existence d'un  $k$ -point sur  $X$ , i. e. d'une section  $\sigma$  du morphisme structural  $p : X \rightarrow \operatorname{Spec} k$ . On a donc le diagramme commutatif de  $k$ -morphisms de  $k$ -schémas intègres réguliers

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \longleftarrow & X_A & \longleftarrow & X_L \\
 \downarrow p & \uparrow \sigma & \downarrow p_A & \uparrow \sigma_A & \downarrow p_L & \uparrow \sigma_L \\
 \operatorname{Spec} k & \longleftarrow & \operatorname{Spec} A & \longleftarrow & \operatorname{Spec} L
 \end{array}$$

obtenu par produits fibrés, d'où, par fonctorialité 1.2, le diagramme commutatif d'homomorphismes

$$\begin{array}{ccccc}
 D^F(\operatorname{Spec} A) & \xrightarrow{p_A^*} & D^F(X_A) & \xrightarrow{\sigma_A^*} & D^F(\operatorname{Spec} A) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F(L) & \xrightarrow{p_L^*} & D^F(X_L) & \xrightarrow{\sigma_L^*} & F(L)
 \end{array}$$

Comme  $L$  est infini,  $p_L^*$  est, d'après ce qui précède, un isomorphisme : le diagramme et l'égalité  $\sigma^* \circ p^* = \operatorname{id}$  montrent alors que  $p_A^*$  est un isomorphisme. Considérons alors le diagramme suivant, déduit de l'inclusion  $i : k \rightarrow A$  et de la spécialisation  $q : A \rightarrow k$  (passage au corps résiduel de  $A$ ) :

$$\begin{array}{ccccc}
 F(k) & \xrightarrow{i^*} & D^F(\operatorname{Spec} A) & \xrightarrow{q^*} & F(k) \\
 \downarrow p^* & & \downarrow p_A^* & & \downarrow p^* \\
 D^F(X) & \xrightarrow{i_X^*} & D^F(X_A) & \xrightarrow{q_X^*} & D^F(X)
 \end{array}$$

Comme  $p_A^*$  est un isomorphisme, et que  $q \circ i = \operatorname{id}$ , ce diagramme montre que  $p^* : F(k) \rightarrow D^F(X)$  est un isomorphisme. Reste à voir :

1.5.1. LEMME. — Soit  $k$  un corps,  $X$  une  $k$ -variété propre, intègre, de corps des fractions transcendant pur sur  $k$ . Alors  $X(k)$  est non vide.

*Démonstration.* — C'est clair si  $k$  est infini — sans hypothèse de propreté. Si  $k$  est fini,  $L = k(u)$  est infini,  $X_L$  est  $L$ -rationnelle, donc  $X_L(L)$  est non vide, donc il existe un  $k$ -morphisme de  $\text{Spec } L$  dans  $X$  qui, comme  $X$  est propre, définit un  $k$ -morphisme de  $\mathbb{A}_k^1$  dans  $X$ , et il suffit de prendre l'image d'un point de  $\mathbb{A}_k^1(k)$ .

1.5.2. Remarques. — On peut aussi déduire le lemme de l'énoncé suivant, qui a un intérêt sur tout corps  $k$  : Soit  $X$  une  $k$ -variété propre,  $Y$  une  $k$ -variété intègre admettant un  $k$ -point régulier; s'il existe une  $k$ -application rationnelle de  $Y$  vers  $X$ , alors  $X(k)$  est non vide.

Je ne sais pas si, dans le théorème, le (i) vaut encore si  $k$  est fini : les arguments utilisés pour établir (ii) pour  $k$  fini permettent d'établir (i) pour  $k$  fini et  $X(k)$  non vide; je ne sais pas si le (i) vaut sans cette dernière hypothèse, ni si dans le (ii), on peut omettre l'hypothèse de lissité lorsque  $k$  est fini.

## 2. Exemples

On donne une suite d'exemples de foncteurs  $F$  auxquels on peut appliquer le théorème 1.5, laissant au lecteur, dans la plupart des cas, le soin de la transcription. Dans les trois premiers exemples, le foncteur  $F$  considéré provient par restriction aux spectres de  $k$ -algèbres locales d'un foncteur  $\tilde{F}$  de la catégorie des  $k$ -schémas dans la catégorie des groupes abéliens. On dispose donc dans ces cas, pour  $X$  intègre, d'une injection

$$\text{Im}[\tilde{F}(X) \rightarrow \tilde{F}(\text{Spec } k(X))] \subset D^F(X)$$

d'où l'on tire, via 1.5, des informations sur le premier groupe, dans le cas où  $X$  est  $k$ -rationnelle.

2.1. Soit  $T$  un  $k$ -tore, et soit, pour  $X$  un  $k$ -schéma,

$$\tilde{F}(X) = H_{\text{ét}}^1(X, T).$$

Le foncteur  $F$  obtenu satisfait (S) et (H) ([4], 2.2 et 4.2). Pour  $X$  une  $k$ -variété intègre régulière,  $D^F(X)$  coïncide avec le groupe noté  $D^T(X)$  dans [5], § 6.

2.2. Soit  $T$  un  $k$ -tore, et soit, pour  $X$  un  $k$ -schéma,

$$\tilde{F}(X) = H_{\text{ét}}^2(X, T).$$

Le foncteur  $F$  obtenu satisfait (S) et, si  $k$  est de caractéristique 0, il satisfait (H) (cf. [4], 2.2 et 4.2), ce qui est une généralisation de résultats d'Auslander-Goldman et de Grothendieck, dans le cas où  $T = \mathbb{G}_{m,k}$  le groupe multiplicatif. Compte tenu de l'injection, pour  $X$  une  $k$ -variété intègre lisse, de  $H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$  dans  $H_{\text{ét}}^2(k(X), \mathbb{G}_m)$ , l'application du théorème 1.5 à ce cas donne une généralisation du résultat d'Auslander-Goldman : pour  $k$  de caractéristique 0, le groupe de Brauer de  $k[t_1, \dots, t_n]$  s'identifie au groupe de Brauer de  $k$ .

2.3. Soit  $k$  un corps de caractéristique différente de 2. A tout  $k$ -schéma  $X$ , associons

$$\bar{F}(X) = W(X)$$

le groupe de Witt du schéma  $X$ , défini par Knebusch dans [9]. Le foncteur  $F$  obtenu associe à toute  $k$ -algèbre locale  $A$  son groupe de Witt  $W(A)$  ([8], [9]); il satisfait (S) ([8], 2.3), et c'est une conséquence du théorème de Harder et Milnor ([10], IX, 3.1) qu'il satisfait (H). Soit  $A$  l'anneau de polynômes  $k[t_1, \dots, t_n]$ , et, pour chaque idéal premier  $\mathfrak{p}$  de hauteur 1 de  $A$ , soit  $K_{\mathfrak{p}}$  le corps des fractions de  $A/\mathfrak{p}$ . Soit  $\partial_{\mathfrak{p}}$  un homomorphisme de second résidu  $W(k(t_1, \dots, t_n)) \rightarrow W(K_{\mathfrak{p}})$  défini par le choix d'un générateur de  $\mathfrak{p}$ , et soit  $\xi$  un élément du noyau de l'application produit

$$W(k(t_1, \dots, t_n)) \xrightarrow{\{\partial_{\mathfrak{p}}\}} \prod_{\mathfrak{p}} W(K_{\mathfrak{p}}).$$

Un argument de recollement classique (cf. [5], 2.4 (i)) montre qu'il existe alors un ouvert  $U$  de  $\mathbb{A}_k^n$  contenant tous les points de codimension 1 de  $\mathbb{A}_k^n$ , et un espace quadratique  $E$  sur  $U$  dont la classe dans  $W(U)$  a  $\xi$  pour image dans  $W(k(t_1, \dots, t_n))$ . Si  $k$  est infini, le théorème 1.5 (i) montre que  $\xi$  provient de  $W(k)$  par l'application naturelle  $W(k) \rightarrow W(k(t_1, \dots, t_n))$ ; l'une des remarques 1.5.2 montre que ceci vaut dès que  $U(k)$  est non vide; on voit alors facilement, par un argument de transfert ([10], VII, 2.1), en choisissant, pour  $k$  fini, une extension de degré impair  $L/k$  telle que  $U(L)$  soit non vide, que ceci vaut dans tous les cas.

On dispose en fait de résultats bien plus précis : voir Arason-Knebusch ([1], § 5).

2.4. Soit  $D$  un corps gauche de degré  $n^2$  sur un corps  $k$ . Pour toute  $k$ -algèbre  $A$ , les éléments de  $A^{\times}$  représentés sur  $A$  par la forme « norme réduite de  $D$  à  $k$  » forment un sous-groupe de  $A^{\times}$ , et l'on peut définir  $F(A)$

comme le quotient de  $A^\times$  par ce sous-groupe. Il résulte de [2], 2.1, que, au moins pour  $n$  premier, le foncteur  $F$  satisfait (S). C'est un cas particulier d'un résultat récent de Raghunathan et Ramanathan qu'en caractéristique 0,  $F$  satisfait (H).

2.5. Supposons  $k$  de caractéristique différente de 2, et soit  $\Phi$  une forme de Pfister définie sur  $k$ . Pour toute  $k$ -algèbre locale  $A$ , les éléments de  $A^\times$  représentés par  $\Phi$  sur  $A$  forment un sous-groupe de  $A^\times$  ([7], th. 1.5), soit  $N_\Phi(A)$ . Définissons  $F(A) = A^\times / N_\Phi(A)$ . Pour  $X$  un  $k$ -schéma intègre, le groupe  $D^F(X)$  associé n'est autre que le groupe  $D^\Phi(X)$  de [2]. Le foncteur  $F$  satisfait (S) ([8], 2.3; [2], 2.1.1). Il satisfait également (H) : c'est la proposition 4.1.1 de [2]. On en déduit :

2.5.1. COROLLAIRE. — Soit  $k$  un corps (car  $k \neq 2$ ) et  $\Phi$  une forme de Pfister définie sur  $k$ . Pour  $X$  une  $k$ -variété intègre, propre et  $k$ -rationnelle,  $D^\Phi(X)$  est trivial, i.e. égal à  $D^\Phi(k)$ .

Démonstration. — Cela résulte de 1.5 (ii), sauf si  $k$  est fini. Dans ce dernier cas, on obtient le résultat en considérant une tour infinie d'extensions de degré impair de  $k$ , et en utilisant la norme (à un niveau fini); notons cependant que, pour  $k$  fini, les groupes considérés sont nuls dès que  $\Phi$  est de rang  $> 2$ .

2.5.2. Soit  $k$  un corps, dans lequel  $(-1)$  n'est pas somme de 4 carrés (tout corps ordonnable est de ce type, mais, comme l'a montré Pfister (cf. [10], XI, § 2), il existe des corps non ordonnables de ce type, par exemple  $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_n) (\sqrt{-\sum_{i=1}^n x_i^2})$  pour  $n \geq 8$ ). Soient  $e_1$  et  $e_3$  deux éléments distincts de  $k$ , et  $e_2 = (e_1 + e_3)/2$ . Reprenant les équations données dans [2], § 5, dans le cas  $k = \mathbb{R}$ , nous obtenons une  $k$ -variété géométriquement intègre, projective et lisse,  $X$ , rationnelle sur  $k(\sqrt{-1})$ , avec  $X(k)$  non vide, et pour laquelle l'accouplement (1) du paragraphe 0 :

$$X(k) \times D^{\Phi_2}(X) \rightarrow D^{\Phi_2}(k)$$

est non trivial : il existe  $A$  et  $B$  dans  $X(k)$  et  $\alpha \in D^{\Phi_2}(X)$  tels que

$$\langle A, \alpha \rangle \neq \langle B, \alpha \rangle.$$

Dans [2], on a montré que ceci implique que  $X$  n'est pas  $k$ -rationnelle, en raisonnant sur  $X(k)/R$ ; on pourrait également raisonner sur  $A_0(X)$ , en utilisant [3], 6.3, et l'accouplement (4) du paragraphe 0. Ces deux approches utilisent la résolution des singularités; le corollaire 2.5.1 nous donne un

argument plus simple : d'après l'inégalité ci-dessus,  $\alpha$  n'est pas dans  $D^{\varphi_2}(k)$ ,  $D^{\varphi_2}(X)$  est non trivial et donc  $X$  n'est pas  $k$ -rationnelle.

### 3. Compléments sur l'équivalence rationnelle sur les 0-cycles des variétés réelles

Aux notations du paragraphe 0 ajoutons celle-ci : pour  $X$  une  $k$ -variété projective et lisse, on note  $\tilde{A}_0(X)$  le sous-groupe de  $A_0(X)$  formé des classes de 0-cycles de degré 0. Rappelons que pour  $k$  algébriquement clos, ce sous-groupe est divisible.

3.1. THÉORÈME. — Soit  $X$  une  $\mathbb{R}$ -variété intègre, projective et lisse, avec  $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ , et soit  $s \geq 1$  le nombre des composantes connexes de  $X(\mathbb{R})$  pour la topologie réelle :

(i) Il existe un homomorphisme surjectif  $A_0(X)/2A_0(X) \rightarrow (\pm 1)^s$ ; le cardinal de  $\tilde{A}_0(X)/2\tilde{A}_0(X)$  est minoré par  $2^{s-1}$ ;

(ii) Il existe un 0-cycle sur  $X$ , de degré  $(s-2)$ , qui n'est pas rationnellement équivalent sur  $X$  à un 0-cycle effectif.

Démonstration. — (i) L'accouplement (5) :

$$A_0(X)/2A_0(X) \times D^{\varphi_2}(X) \rightarrow (\pm 1)$$

( $n = \dim X$ ) définit un homomorphisme

$$D^{\varphi_2}(X) \rightarrow \text{Hom}(A_0(X)/2A_0(X), (\pm 1))$$

qui est injectif : en effet, étant donné  $\alpha \in D^{\varphi_2}(X)$ ,  $\alpha \neq 1$ , il existe un point réel  $P$  avec  $\langle P, \alpha \rangle = (-1)$ , d'après (6). Par dualité, on obtient que l'homomorphisme déduit de l'accouplement ci-dessus

$$A_0(X)/2A_0(X) \rightarrow \text{Hom}(D^{\varphi_2}(X), (\pm 1)) \simeq (\pm 1)^s$$

est surjectif. Notons que cet homomorphisme est induit par l'application de  $Z_0(X)$  dans  $(\pm 1)^s$  qui à un point fermé complexe associe l'élément neutre, et qui à un point réel associe l'élément  $(\varepsilon_i)$ , avec  $\varepsilon_i = -1$  pour  $i$  la composante réelle du point, et  $\varepsilon_i = 1$  pour les autres composantes. L'homomorphisme obtenu définit une surjection de  $\tilde{A}_0(X)/2\tilde{A}_0(X)$  sur le sous-groupe de  $(\pm 1)^s$  formé des éléments dont le produit des composantes vaut 1.

(ii) On peut supposer  $s \geq 2$ . Choisissons  $P_i$  un point réel dans la composante réelle d'indice  $i$ , et considérons le 0-cycle

$$P_1 + \dots + P_{s-1} - P_s$$

qui est de degré  $(s-2)$ , et supposons-le rationnellement équivalent sur  $X$  à un 0-cycle effectif  $\sum_j r_j Q_j$ ,  $r_j > 0$ . Comme le degré est bien défini sur les classes d'équivalence rationnelle, on a

$$\sum_j r_j \leq \sum_j r_j \deg(Q_j) = s-2.$$

Il existe donc une composante connexe de  $X(\mathbb{R})$  telle qu'aucun  $Q_j$  ne soit un point (réel) de cette composante. Choisissons alors  $\alpha \in D^{0*}(X)$  valant (pour l'accouplement (1)) sur cette composante  $(-1)$ , et  $(+1)$  sur les autres composantes. Pour l'accouplement (2), on a

$$\langle P_1 + \dots + P_{s-1} - P_s, \alpha \rangle = (-1) \neq (+1) = \langle \sum_j r_j Q_j, \alpha \rangle$$

et ceci contredit le fait que cet accouplement passe au quotient à gauche par l'équivalence rationnelle.

**3.2. PROPOSITION.** — Soit  $X$  une  $\mathbb{R}$ -variété projective et lisse, géométriquement intègre, et telle que  $X_{\mathbb{C}}$  soit  $\mathbb{C}$ -rationnelle :

- (i)  $\tilde{A}_0(X)$  est annulé par 2;
- (ii)  $\tilde{A}_0(X)$  est engendré par les classes des différences de deux points réels (et est nul si  $X(\mathbb{R})$  est vide);
- (iii) soit  $s$  le nombre de composantes connexes de  $X(\mathbb{R})$ , et supposons que deux points réels situés dans la même composante connexe sont rationnellement équivalents sur  $X$ . Alors :

$$\tilde{A}_0(X) \simeq (\mathbb{Z}/2)^{s-1}.$$

*Démonstration.* — Le (i) est un cas particulier de [3], 6.4 (b). Le (ii) s'établit (suggestion de D. Coray) en utilisant  $\tilde{A}_0(X_{\mathbb{C}}) = 0$  et le fait que l'application  $f_* : Z_0(X_{\mathbb{C}}) \rightarrow Z_0(X)$  déduite de la flèche naturelle  $f : X_{\mathbb{C}} \rightarrow X$  se décrit ainsi : pour  $P$  un point fermé de  $X_{\mathbb{C}}$ , on a  $f_*([P]) = 2[f(P)]$  ou  $[f(P)]$  selon que  $f(P)$  est un point fermé réel ou complexe de  $X$  (on a noté  $[M]$  le 0-cycle associé à un point fermé  $M$ ). Sous l'hypothèse de (iii), si l'on se donne  $P_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) un point dans la  $i$ -ième composante connexe, le (ii) implique que les  $([P_i] - [P_s])$ , pour  $i = 1, \dots, (s-1)$ , engendrent  $\tilde{A}_0(X)$ . Comme, d'après (i), ils engendrent un  $(\mathbb{Z}/2)$ -vecteuriel de rang au plus  $(s-1)$ , il résulte alors de 3.1 (i) qu'ils forment une base du  $(\mathbb{Z}/2)$ -vecteuriel  $\tilde{A}_0(X)$ , dont le cardinal est donc exactement  $2^{s-1}$ .

*Remarques ajoutées sur épreuves :* F. Ischebeck a obtenu une démonstration simple du théorème B de [2] et du théorème 3.1 ci-dessus. Ses méthodes permettent de montrer que pour une variété comme en 3.2, l'hypothèse de 3.2 (iii) est toujours satisfaite.

## 3.3. UN EXEMPLE

Étant donné  $n$  un entier  $> 1$  et  $(e_1, \dots, e_{2n-1})$  une suite strictement croissante de nombres réels, puis la surface affine définie dans  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  avec coordonnées  $(x, y, z)$  par l'équation

$$y^2 + z^2 = \prod_{i=1}^{2n-1} (x - e_i),$$

on a donné dans [5], exemple 4.4, un modèle  $X$  propre et lisse sur  $\mathbb{R}$  de cette surface. L'espace  $X(\mathbb{R})$  des points réels a  $n$  composantes connexes. Par ailleurs,  $X$  est équipée d'un  $\mathbb{R}$ -morphisme  $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  (prolongeant la projection sur l'axe des  $x$ ) qui en fait une  $\mathbb{R}$ -surface rationnelle fibrée en coniques, d'invariant  $r = 2n$  (pour ces notions, cf. [3], 1.2). Le théorème C de [3] dit que sur une  $k$ -surface (car  $k=0$ )  $X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  fibrée en coniques, d'invariant  $r$ , tout 0-cycle sur  $X$  de degré  $\geq \max(0, [r/2] - 1)$  (où  $[ \ ]$  désigne ici la partie entière) est rationnellement équivalent à un 0-cycle effectif. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, tout 0-cycle de degré  $\geq n-1$  est rationnellement équivalent à un 0-cycle effectif, et par ailleurs, on a construit dans 3.1 un 0-cycle de degré  $s-2 = n-2$  qui n'est pas rationnellement équivalent à un 0-cycle effectif. On voit donc que tant la borne du théorème C de [3] (au moins pour  $r$  pair) que celle de 3.1 (ii) sont, dans le cas général, *les meilleures possibles*. On peut montrer, en faisant un calcul analogue à celui que fait Iskovskikh dans [6] pour établir la  $\mathbb{R}$ -unirationalité de  $X$ , que deux points de  $X(\mathbb{R})$  qui sont dans la même composante connexe sont  $R$ -équivalents — et *a fortiori* rationnellement équivalents. La proposition 3.2 (iii) s'applique donc : on a  $\tilde{A}_0(X) \simeq (\mathbb{Z}/2)^{n-1}$ . Notons pour terminer que si l'application  $X(\mathbb{R})/R \rightarrow \tilde{A}_0(X)$  qui à la classe d'un point  $P \in X(\mathbb{R})$  associe la classe de  $([P] - [P_n])$  ( $P_n$  point réel fixé dans la  $n$ -ième composante) est toujours injective (puisque  $X(\mathbb{R})/R$  s'identifie à l'ensemble des composantes connexes), elle cesse d'être surjective dès que  $n$  est  $> 2$ , l'ensemble de gauche ayant  $s = n$  éléments, et celui de droite  $2^{n-1}$ . Dans le cas  $n=2$ , c'est un fait général que, pour les surfaces du type considéré (sur un corps de caractéristique 0 quelconque), l'application est une bijection ([3], 6.7 (iv)).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARASON (J.Kr.) und KNEBUSCH (M.). — Über die Grade quadratischer Formen, *Math. Ann.*, vol. 234, 1978, p. 167-192.
- [2] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.). — Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 106, 1978, p. 113-151.

- [3] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et CORAY (D.). — L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques, *Compositio Mathematica*, vol. 39, 1979, p. 301-332.
  - [4] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.). — Cohomologie des groupes de type multiplicatif sur les schémas réguliers, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 287, série A, 1978, p. 449-452.
  - [5] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.). — Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles, *Math. Ann.*, vol. 244, 1979, p. 105-134.
  - [6] ISKOVSKIĖH (V.A.). — Surfaces rationnelles avec un pinceau de courbes rationnelles, *Mat. Sbornik*, vol. 74, 1967, p. 608-638, trad. ang. *Math. of the U.S.S.R.-Sbornik*, vol. 3, 1967, p. 563-587.
  - [7] KNEBUSCH (M.). — Runde Formen über semilokalen Ringen, *Math. Ann.*, vol. 193, 1971, p. 21-34.
  - [8] KNEBUSCH (M.). — Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 24, 1973, p. 279-299.
  - [9] KNEBUSCH (M.). — Symmetric bilinear forms over algebraic varieties, *Conference on quadratic forms*, p. 103-283. — Kingston, Queen's University, 1977 (*Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*, vol. 46).
  - [10] LAM (T.-Y.). — *The algebraic theory of quadratic forms*, Reading, Benjamin, 1973.
-