

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-MARC DESHOUILLERS

GEORGES GREKOS

Propriétés extrémales de bases additives

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 319-335

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__319_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__319_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS EXTRÊMALES DE BASES ADDITIVES

PAR

JEAN-MARC DESHOUILLEERS et GEORGES GREKOS (*)

[Univ. Bordeaux-I]

RÉSUMÉ. — Une suite \mathcal{A} strictement croissante d'entiers positifs ou nuls est une base asymptotique d'ordre h si tout entier suffisamment grand est somme de h éléments de \mathcal{A} . Soit s un entier positif; la suite \mathcal{A} est une non-base asymptotique s -maximale d'ordre h si, pour tout ensemble W de $s-1$ entiers non négatifs, $\mathcal{A} \cup W$ n'est pas base asymptotique d'ordre h , et, pour tout ensemble S de s entiers non négatifs n'appartenant pas à \mathcal{A} , $\mathcal{A} \cup S$ est une base asymptotique d'ordre h . Nous construisons une classe de non-bases asymptotiques \mathcal{A} s -maximales d'ordre h qui vérifient la condition $A(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$, où $A(x)$ désigne le nombre de termes de la suite \mathcal{A} qui sont positifs et au plus égaux à x . En outre, nous construisons une non-base asymptotique \mathcal{A}' d'ordre h qui vérifie $A'(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$ et qui n'est pas contenue dans une non-base 1-maximale d'ordre h .

ABSTRACT. — A strictly increasing sequence \mathcal{A} of non-negative integers is said to be an asymptotic basis of order h if every sufficiently large integer can be written as a sum of h elements of \mathcal{A} . Otherwise, \mathcal{A} is an asymptotic nonbasis of order h . Let s be a positive integer; an asymptotic nonbasis \mathcal{A} of order h is s -maximal if $\mathcal{A} \cup W$ remains an asymptotic nonbasis of order h for any set W of $s-1$ non-negative integers, but $\mathcal{A} \cup S$ becomes an asymptotic basis of order h for every set S of s non-negative integers not belonging to \mathcal{A} . A class of s -maximal asymptotic nonbases of order h is constructed, each sequence \mathcal{A} in this class satisfying $A(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$, where $A(x)$ denotes the number of positive elements of \mathcal{A} not exceeding x . We also construct an asymptotic nonbasis \mathcal{A}' of order h with $A'(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$, such that \mathcal{A}' cannot be imbedded as a subset of any 1-maximal asymptotic nonbasis of order h .

(*) Texte reçu le 16 mai 1978.

Jean-Marc DESHOUILLEERS et Georges GREKOS, Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226, Mathématiques et Informatique, Université de Bordeaux-I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.

Introduction

On appelle *suite* une suite strictement croissante d'entiers non négatifs. On désigne par h un entier supérieur ou égal à 2. Une suite \mathcal{B} est une *base asymptotique d'ordre h* si tout entier naturel suffisamment grand est somme de h éléments de \mathcal{B} .

Soit s un entier positif; on dit que la suite A est une *non-base asymptotique s -maximale d'ordre h* si

(i) pour tout ensemble W de $s-1$ entiers non négatifs, la suite $\mathcal{A} \cup W$ n'est pas base asymptotique d'ordre h , et

(ii) pour tout ensemble S de s entiers non négatifs n'appartenant pas à la suite \mathcal{A} , $\mathcal{A} \cup S$ est une base asymptotique d'ordre h .

Étant donné une suite \mathcal{A} et un nombre réel $x \geq 1$, on désigne par $A(x)$ le nombre d'éléments de \mathcal{A} qui sont positifs et inférieurs ou égaux à x . M. B. NATHANSON [2] a posé la question de trouver des non-bases asymptotiques s -maximales ayant la plus petite densité possible, à savoir telles que

$$(1) \quad A(x) = O(x^{1/h}).$$

Le cas particulier $h = 2$ a été traité dans [2]. Nous nous proposons ici de construire de telles suites pour h quelconque.

Un problème voisin, posé par P. ERDÖS et M. B. NATHANSON [1] (et résolu lorsque $h = 2$), est de trouver des non-bases asymptotiques d'ordre h qui vérifient (1) et qui ne sont pas contenues dans des non-bases asymptotiques 1-maximales d'ordre h . Nous donnons également un exemple d'une telle suite.

Les techniques utilisées ici peuvent être considérées comme des extensions de celles de [1] et [2] dans la mesure où le cas particulier $h = 2$ de notre travail est très proche des travaux de P. ERDÖS et M. B. NATHANSON.

Notations

\mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{D} , \mathcal{K} , \mathcal{Q} désignent des suites.

x désigne un nombre réel supérieur ou égal à 1.

$A(x)$ est le nombre d'éléments de la suite \mathcal{A} qui sont positifs et au plus égaux à x .

C_1, C_2, \dots sont des constantes réelles.

Des lettres majuscules $A_j, B', B^{(n)}, I, \dots$ (à l'exception de C et de Q) représentent des ensembles finis d'entiers non négatifs. On note $|A|$ le cardinal de l'ensemble A .

f désignera une application.

Q et toutes les lettres minuscules (sauf x et f) désignent des entiers supérieurs ou égaux à zéro.

E_1 et E_2 étant deux ensembles (finis ou infinis) d'entiers, on pose

$$E_1 + E_2 = \{e_1 + e_2; e_1 \in E_1, e_2 \in E_2\};$$

pour h entier supérieur ou égal à 2, on définit, par récurrence,

$$hE = (h-1)E + E.$$

Si E est un ensemble, et d un entier, on écrira $d+E$ au lieu de $\{d\} + E$.

Soient deux nombres réels $x_1 \leq x_2$; on appelle *intervalle* (x_1, x_2) l'ensemble des entiers a tels que $x_1 \leq a \leq x_2$. D'une manière analogue, $(x_1, x_2[$ est l'ensemble des entiers a qui vérifient $x_1 \leq a < x_2$.

LEMME 1. — Soient h et u deux entiers supérieurs à 1. On pose

$$B' = \{eu^i; 0 \leq e < u, 0 \leq i < h\};$$

$$B'' = \{u^h - b; b \in B'\};$$

$$B = B' \cup B''.$$

On a

$$(b. 1) \quad B \subset (0, u^h), \quad |B| < 2uh;$$

$$(b. 2) \quad hB = (0, hu^h);$$

$$(b. 3) \quad (h-1)B \text{ contient tous les multiples de } u \text{ qui sont dans } (0, (h-1)u^h).$$

Démonstration. — La première propriété découle du fait que

$$|B'| = |B''| = 1 + (u-1)h < uh.$$

On montre, par récurrence sur n , $0 < n \leq h$, la propriété :

(P_n) L'ensemble nB contient tous les multiples de u^{h-n} qui sont dans l'intervalle $(0, nu^h)$.

On constate que (P_1) est trivialement vraie. Supposons que (P_n) est vraie, $1 \leq n \leq h-1$, et montrons que (P_{n+1}) est vraie. Soit z un multiple de u^{h-n-1} dans l'intervalle $(0, (n+1)u^h)$; z s'écrit :

$$z = z_{h-n-1}u^{h-n-1} + z_{h-n}u^{h-n} + \dots + z_{h-1}u^{h-1} + z_h u^h,$$

avec $0 \leq z_i < u$, $(h-n-1 \leq i \leq h-1)$, $0 \leq z_h \leq n+1$.

Si $z_h = 0$, on voit que z est dans $(n+1)B'$, et si $z_h = n+1$, alors $z = (n+1)u^h$ est trivialement dans $(n+1)B''$. Supposons donc $0 < z_h < n+1$. Écrivons z sous la forme

$$z = z' + z''$$

où

$$\begin{aligned} z' &= u^h - (u - z_{h-n-1})u^{h-n-1}, \\ z'' &= (z_{h-n} + 1)u^{h-n} + z_{h-n+1}u^{h-n+1} + \dots + z_{h-1}u^{h-1} + (z_h - 1)u^h. \end{aligned}$$

L'entier z'' est multiple de u^{h-n} , et vérifie :

$$0 \leq z'' \leq uu^{h-n} + (u-1)u^{h-n+1} + \dots + (u-1)u^{h-1} + (n-1)u^h = nu^h.$$

D'après (P_h) , z'' est somme de n éléments de B . Ainsi, il suffit de montrer que z' appartient à B . En effet, si $z_{h-n-1} \geq 1$, alors z' appartient à B'' qui est inclus dans B ; si $z_{h-n-1} = 0$, on a $z' = u^h - u^{h-n}$, qui est encore un élément de B , ce qui achève la démonstration du lemme 1.

LEMME 2. — Soit h un entier plus grand que 1. On pose

$$(3) \quad 1 + \delta = (1 + h)^{1/h}, \quad \delta > 0.$$

Soit u_1 un multiple de h tel que

$$(4) \quad u_1 > 2h\delta^{-1}.$$

Pour $n \geq 2$, on définit u_n comme étant le multiple de h qui se trouve dans l'intervalle

$$(5) \quad ((1 + \delta)u_{n-1} - h, (1 + \delta)u_{n-1}).$$

On désigne par $B^{(n)}$ l'ensemble B , construit dans le lemme 1, avec u_n à la place de u . On pose :

$$B_0 = (0, h^{-1}u_1^h), \quad B_n = h^{-1}u_n^h + B^{(n)} \quad (n \geq 1).$$

La suite $\mathcal{B} = \bigcup_{n \geq 0} B_n$ vérifie les propriétés suivantes :

(B. 1) \mathcal{B} est une base d'ordre h ;

(B. 2) il existe une constante C_1 telle que, pour tout $x \geq 1$, on ait

$$B(x) \leq C_1 x^{1/h};$$

(B. 3) t étant un entier naturel, on pose $\mathcal{B}_t = \bigcup_{n=0}^t B_n$; alors

$$h\mathcal{B}_t = (0, (h+1)u_t^h);$$

(B. 4) si l'on écrit $(h-1)\mathcal{B}_t = \{d_1 < d_2 < \dots < d_t\}$,

pour tout r , $1 < r \leq l$, on a

$$d_r - d_{r-1} < \left(\frac{h}{h-1} \right)^{1/h} d_r^{1/h}.$$

Démonstration. — 1° Montrons d'abord que

$$(6) \quad u_1 < u_2 < u_3 < \dots$$

et que

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \delta.$$

On va établir (6) par récurrence. On a

$$u_2 \geq (1 + \delta)u_1 - h > u_1$$

et, pour $n \geq 2$,

$$u_n \geq (1 + \delta)u_{n-1} - h > u_{n-1},$$

car $u_{n-1} \geq u_1 > h\delta^{-1}$.

D'autre part, la relation (7) est une conséquence immédiate de (6) et du choix de u_n :

$$(8) \quad (1 + \delta)u_{n-1} - h \leq u_n < (1 + \delta)u_{n-1}.$$

2° Pour $n \geq 1$, on appelle

$$(9) \quad G_n = (h^{-1}u_n^h, h^{-1}(h+1)u_n^h),$$

le plus petit intervalle qui contient B_n . On montrera que

$$(10) \quad G_n \cap G_{n+2} = \emptyset \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Pour cela il suffit de montrer que

$$h^{-1}(h+1)u_n^h < h^{-1}u_{n+2}^h,$$

ce qui équivaut à $(1 + \delta)u_n < u_{n+2}$

En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &\geq (1 + \delta)u_{n+1} - h \geq (1 + \delta)((1 + \delta)u_n - h) - h \\ &= (1 + \delta)u_n + \delta(1 + \delta)u_n - h(1 + 2\delta) > (1 + \delta)u_n, \end{aligned}$$

d'après (6) et (4).

3° On va montrer la propriété (B. 3); (B. 1) en découle immédiatement.

On a

$$(11) \quad hB_0 = (0, u_1^h)$$

et, d'après le lemme 1, pour tout $n \geq 1$,

$$(12) \quad h B_n = h h^{-1} u_n^h + (0, h u_n^h) = (u_n^h, (h+1) u_n^h).$$

Ainsi, il suffit de remarquer que les intervalles (12) se recouvrent. En effet, d'après le choix de u_n , pour tout $n \geq 2$, on a

$$u_n^h < (h+1) u_{n-1}^h,$$

ce qui démontre (B. 3).

4° Montrons la propriété (B. 2). Soit x un nombre réel assez grand $x \geq h^{-1} u_1^h$. Alors il existe un entier m tel que

$$(13) \quad h^{-1} u_m^h \leq x < h^{-1} (h+1) u_m^h.$$

D'après (10) et la propriété (b. 1) du lemme 1, on obtient :

$$(14) \quad B(x) \leq -1 + \sum_{n=0}^{m+1} |B_n| \leq h^{-1} u_1^h + \sum_{n=1}^{m+1} 2 h u_n.$$

Posons $\alpha = (1 + \delta/2)^{-1}$. D'après (4) et (8), pour $n \geq 1$, on a

$$\alpha^{-1} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 + \delta,$$

et la relation (14) donne

$$\begin{aligned} B(x) &\leq h^{-1} u_1^h + 2 h u_m (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-1} + 1 + \delta) \\ &\leq h^{-1} u_1^h + 2 h u_m \left(\frac{1}{1 - \alpha} + 1 + \delta \right); \end{aligned}$$

compte tenu de la relation (13), ceci entraîne la propriété (B. 2).

5° Afin d'établir (B. 4), on remarque que

$$(15) \quad (h-1) \mathcal{B}_t \subset (0, h^{-1} (h^2 - 1) u_t^h)$$

et que

$$(16) \quad (h-1) \mathcal{B}_t \supset \bigcup_{n=0}^t (h-1) B_n.$$

Par le lemme 1, $(h-1) B_n$ contient tous les entiers

$$z \equiv h^{-1} (h-1) u_n^h \pmod{u_n}$$

qui sont dans l'intervalle

$$H_n = h^{-1} (h-1) u_n^h + (0, (h-1) u_n^h) = (h^{-1} (h-1) u_n^h, h^{-1} (h^2 - 1) u_n^h).$$

Les intervalles H_n se recouvrent : en effet, il s'agit des intervalles (12) dont les extrémités ont été multipliées par $h^{-1} (h-1)$. En outre, on remarquera que les extrémités de H_n appartiennent à $(h-1) B_n$. Soit

$$(h-1) \mathcal{B}_t = \{0 = d_1 < d_2 < \dots < d_t = h^{-1} (h^2 - 1) u_t^h\}.$$

Soit un entier r , $1 < r \leq l$. Alors d_r appartient à au moins un intervalle H_n . On va supposer que d_r n'est pas le plus petit élément de H_n (sinon, on considère H_{n-1} auquel d_r appartiendra également). On a

$$(17) \quad h^{-1}(h-1)u_n^h < d_r \leq h^{-1}(h^2-1)u_n^h.$$

D'après ce qui précède, on a

$$d_r - d_{r-1} \leq u_n < \left(\frac{h}{h-1} \right)^{1/h} d_r^{1/h},$$

ce qui achève la démonstration de la propriété (B. 4) et du lemme 2.

LEMME 3. — Soit h un entier plus grand que 1. Il existe une suite croissante $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ d'entiers Q_k congrus à 1 modulo h :

$$Q_k = hq_k + 1,$$

tels que, pour tout $k \geq 2$, on ait

$$(18) \quad q_k^{1/h} \geq h \sum_{j=1}^{k-1} Q_j,$$

et une suite \mathcal{D} d'entiers qui vérifie :

$$(D. 1) \quad \mathcal{D} \subset \{0, q_1\} \cup \bigcup_{k=2}^\infty (Q_{k-1} + 1, q_k),$$

$$(D. 2) \quad h\mathcal{D} = \mathbb{N} \setminus \{Q_k\}_{k=1}^\infty,$$

$$(D. 3) \quad D(x) = \emptyset (x^{1/h}).$$

Démonstration. — Les symboles $\{u_n\}$ et B_n désignent la suite et les ensembles introduits dans le Lemme 2.

1° On pose $Q_0 = -1$. La suite \mathcal{D} sera définie sous la forme $\mathcal{D} = \bigcup_{k \geq 1} D_k$ avec $D_k \subset (Q_{k-1} + 1, q_k)$, de sorte que la condition (D. 1) est vérifiée.

On pose

$$(19) \quad q_1 = Q_0 + 1 + h^{-1}(h+1)u_1^h,$$

et on vérifie (trivialement) que l'on a la minoration

$$(20) \quad q_1^{h-1} \geq h,$$

on pose également $D_1 = B_0 \cup B_1$.

2° Pour $k \geq 2$, on suppose qu'on a défini D_j , $1 \leq j \leq k-1$. On choisit un entier $t(k)$ assez grand pour que le nombre

$$(21) \quad q_k = Q_{k-1} + 1 + h^{-1}(h+1)u_{t(k)}^h$$

vérifie la relation (18). On définit

$$D_k = Z_k \cup \bigcup_{i=0}^{h-1} I_k^i,$$

où

$$\begin{aligned} Z_k &= Q_{k-1} + 1 + \bigcup_{n=0}^{l^{(k)}} B_n, \\ I_k^0 &= (Q_{k-1} + 1, Q_{k-1} + C_2 q_{k-1}^{1/h}), \quad \text{où } C_2 = h^{1/h}, \\ I_k^i &= i(h-1)q_{k-1} + I_k^0 \quad (i = 1, \dots, h-1). \end{aligned}$$

Les relations (18) et (20) entraînent que $\max(I_k^{h-1}) \leq q_k$, donc D_k est contenu dans $(Q_{k-1} + 1, q_k)$.

3° Démontrons la condition (D. 2) : du fait que la suite \mathcal{D} ne contient pas d'élément plus grand que q_k , et au plus égal à $Q_k = hq_k + 1$, il résulte que, pour $k \geq 1$, Q_k n'appartient pas à $h\mathcal{D}$; par conséquent, il suffit de montrer que

$$(22) \quad (Q_{k-1} + 1, hq_k) \subset h\mathcal{D}.$$

Nous laisserons au lecteur le soin d'effectuer cette vérification pour $k = 1$, et supposons désormais $k \geq 2$; d'après la propriété (B. 3), lemme 2, et la définition de Z_k , on a

$$(23) \quad hZ_k = (h(Q_{k-1} + 1), h(Q_{k-1} + 1) + (h+1)u_{l^{(k)}}^h) = (h(Q_{k-1} + 1), hq_k).$$

D'après la propriété (B. 4) du lemme 2, les éléments de l'ensemble

$(h-1)Z_{k-1} = \{(h-1)(Q_{k-2} + 1) = y_1 < y_2 < \dots < y_l = (h-1)q_{k-1}\}$,
vérifient :

$$y_m - y_{m-1} \leq \left(\frac{h}{h-1}\right)^{1/h} y_m^{1/h} \leq C_2 q_{k-1}^{1/h} \quad (1 < m \leq l).$$

Puisque la différence $y_m - y_{m-1}$ est plus petite que la longueur de l'intervalle I_k^0 , l'ensemble

$$J_0 = (h-1)Z_{k-1} + I_k^0,$$

est l'intervalle

$$J_0 = (Q_{k-1} + 1 + (h-1)(Q_{k-2} + 1), (h-1)q_{k-1} + Q_{k-1} + C_2 q_{k-1}^{1/h}).$$

La longueur de J_0 dépasse strictement $(h-1)q_{k-1}$. Par conséquent J_0 et $J_1 = J_0 + (h-1)q_{k-1}$ se recouvrent, et ainsi de suite; en posant $J_i = J_0 + i(h-1)q_{k-1}$, $1 \leq i \leq h-1$, on a donc

$$(24) \quad \bigcup_{i=0}^{h-1} J_i = (Q_{k-1} + 1 + (h-1)(Q_{k-2} + 1), (h-1)q_{k-1} + Q_{k-1} + C_2 q_{k-1}^{1/h} + (h-1)^2 q_{k-1}).$$

Il est facile de constater que les intervalles dans les relations (23) et (24) se recouvrent. Donc, on obtient :

$$(25) \quad (Q_{k-1} + 1 + (h-1)(Q_{k-2} + 1), hq_k) \subset h\mathcal{D}.$$

Cette dernière relation entraîne immédiatement (22), en remarquant que 0 appartient à \mathcal{D} et que

$$(Q_{k-1} + 1, Q_{k-1} + (h-1)(Q_{k-2} + 1)) \subset I_k^0.$$

4° On va établir la majoration (D. 3). D'abord, on va majorer $D(Q_k)$. D'après la définition de D_k , on a

$$|D_k| \leq |Z_k| + h |I_k^0| \leq C_1 q_k^{1/h} + h C_2 q_{k-1}^{1/h} \leq C_3 q_k^{1/h},$$

d'où, en utilisant (18), on obtient :

$$D(Q_k) = \sum_{j=1}^k |D_j| \leq C_3 \sum_{j=1}^k q_j^{1/h} \leq 2 C_3 q_k^{1/h},$$

Soit un nombre réel $x \geq 1$. On lui associe un k tel que $Q_{k-1} \leq x < Q_k$. On a

$$\begin{aligned} D(x) &\leq D(Q_{k-1}) + h |I_k^0| + B(x - Q_{k-1}) \\ &\leq 2 C_3 q_{k-1}^{1/h} + h C_2 q_{k-1}^{1/h} + C_1 x^{1/h} \leq C_4 x^{1/h}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.

THÉORÈME 1. — *Étant donnés deux entiers $k \geq 2$ et $s \geq 1$, il existe une non-base asymptotique \mathcal{A} , s -maximale d'ordre h telle que $A(x) = O(x^{1/h})$.*

Démonstration. — Les entiers Q_k et les ensembles D_k sont ceux qui ont été introduits dans le lemme 3.

1° On va définir la suite \mathcal{A} sous la forme

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k \geq 1} A_k,$$

où, pour tout $k \geq 1$,

$$D_k \subset A_k \subset (Q_{k-1} + 1, Q_k).$$

Pour $1 \leq k \leq s$, on définit $A_k = D_k$. Soit $f(s+1)$ un ensemble de $s-1$ entiers distincts non négatifs au plus égaux à Q_{s+1} et dont aucun n'appartient à $\bigcup_{j \leq s} A_j$ (cela est possible : on peut prendre par exemple $\{Q_1 - 1, \dots, Q_{s-1} - 1\}$); on pose :

$$A_{s+1} = D_{s+1} \cup E_{s+1}, \quad \text{où } E_{s+1} = L(s+1, s),$$

avec, pour k, l entiers positifs, $k > l$, $k \geq s+1$,

$$(26) \quad L(k, l) = \{Q_k - z \mid z \in [0, h^{-1}Q_l] \setminus (h-1)((\bigcup_{j < k} A_j) \cup f(k))\}.$$

Ayant défini A_j , $1 \leq j \leq k-1$, et $f(j)$, $s+1 \leq j \leq k-1$, on définit d'abord $f(k)$ comme étant un ensemble de $s-1$ entiers distincts positifs au plus égaux à Q_k et donc aucun n'appartient à $\bigcup_{j < k} A_k$, la fonction f devant vérifier la condition suivante :

Pour chaque ensemble W de $s-1$ entiers positifs n'appartenant pas à la suite \mathcal{A} , l'image réciproque $f^{-1}(W)$ est de cardinal infini (le lecteur construira sans difficulté une telle fonction).

Voici comment on définit A_k : s'il existe un $j < k$ pour lequel $f(j) = f(k)$, soit

$$k' = \max \{j < k; f(j) = f(k)\};$$

on pose

$$(27) \quad A_k = D_k \cup E_k \cup \{a(k)\}$$

où

$$E_k = L(k, k')$$

et

$$(28) \quad a(k) = Q_k - Q_{k'} + 1.$$

S'il n'existe pas de $j < k$ tel que $f(j) = f(k)$, on pose

$$(29) \quad A_k = D_k \cup E_k \quad \text{avec} \quad E_k = L(k, k-1).$$

2° On va montrer que, si $|W| = s-1$ avec $\mathcal{A} \cap W = \emptyset$, alors la suite $\mathcal{A} \cup W$ est non-base asymptotique d'ordre h . On montre, par récurrence sur k appartenant à $f^{-1}(W)$, que Q_k n'appartient pas à $h(\mathcal{A} \cup W)$ (on rappelle que $f^{-1}(W)$ est de cardinal infini). Soit d'abord $k = \min f^{-1}(W)$. Supposons

$$(30) \quad Q_k = a_1 + \dots + a_h, \quad a_1 \leq \dots \leq a_h, \quad a_i \in \mathcal{A} \cup W \quad (1 \leq i \leq h).$$

Puisque $Q_k = hq_k + 1$, on a $a_h > q_k$, donc $a_h \in E_k$ par (29). Mais a_h est de la forme

$$(31) \quad a_h = Q_k - \sum_{i=1}^{h-1} a_i, \quad a_i \in (\mathcal{A} \cup f(k)),$$

ce qui n'est pas possible pour un élément de E_k .

Soit $k > \min(f^{-1}(W))$. Posons

$$(32) \quad k' = \max \{j \in f^{-1}(W), j < k\}.$$

On suppose que Q'_k n'est pas somme de h éléments de $\mathcal{A} \cup W$, et on va démontrer que Q_k n'appartient pas à $h(\mathcal{A} \cup W)$. En effet, si Q_k admettait

une écriture de la forme (30), alors a_h appartiendrait à $E_k \cup \{a(k)\}$. Mais a_h est de la forme (31), ce qui n'est possible ni pour les éléments de E_k , par définition, ni pour

$$a(k) = Q_k - (Q_{k'} - 1),$$

car, si $Q_{k'} - 1$ appartenait à $(h-1)(\mathcal{A} \cup W)$, alors $Q_{k'}$, lui, appartiendrait à $h(\mathcal{A} \cup W)$, ce qui est absurde par l'hypothèse de récurrence.

3° Soit W un ensemble de $s-1$ entiers positifs qui ne sont pas dans la suite \mathcal{A} ; d'après le paragraphe précédent, on a

$$h(\mathcal{A} \cup W) \subset \mathbb{N} \setminus \{Q_k; f(k) = W\}.$$

Par conséquent, si w n'est pas dans \mathcal{A} , alors

$$(33) \quad h(\mathcal{A} \cup \{w\}) \subset \mathbb{N} \setminus \{Q_k; w \in f(k)\}.$$

Par la suite, on démontrera la propriété suivante :

(P. 1) *Les deux ensembles qui figurent au premier et au deuxième membre de la relation (33) ne diffèrent que d'un nombre fini d'éléments.*

Cette propriété entraîne immédiatement que \mathcal{A} est une non-base s -maximale. Soit en effet

$$S = \{w_1, \dots, w_s\},$$

un ensemble de s nombres naturels qui n'appartiennent pas à \mathcal{A} . D'après (33) et (P. 1), l'ensemble $h(\mathcal{A} \cup S)$ est égal, à un nombre fini d'éléments près, à

$$\bigcup_{r=1}^s (\mathbb{N} \setminus \{Q_k; w_r \in f(k)\}) = \mathbb{N},$$

c'est-à-dire $\mathcal{A} \cup S$ est une base asymptotique d'ordre h .

4° Démontrons d'abord la propriété (P. 2) ci-dessous, dont on se servira par la suite, afin d'établir (P. 1).

(P. 2) *Soit $W \subset \mathbb{N}$ avec $|W| = s-1$ et $\mathcal{A} \cap W = \emptyset$. Si w n'est élément ni de \mathcal{A} ni de W , alors, pour tout k dans $f^{-1}(W)$, k suffisamment grand, Q_k appartient à $h(\mathcal{A} \cup \{w\})$.*

Si k appartient à $f^{-1}(W)$, on désigne par k' le plus grand $j < k$ pour lequel $f(j) = W$ (cf. relation (32)). Parmi les éléments de $f^{-1}(W)$, on choisit $k(1), \dots, k(h-2)$ avec $\min f^{-1}(W) < k(1) < \dots < k(h-2)$ et tels que

$$\begin{aligned} w &\leq h^{-1}Q_{k'(1)}, \\ a(k(1)) &\leq h^{-1}Q_{k'(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ a(k(h-3)) &\leq h^{-1}Q_{k'(h-2)}. \end{aligned}$$

On va montrer que l'entier

$$(34) \quad w' = w + a(k(1)) + \dots + a(k(h-2)),$$

n'appartient pas à $(h-1)(\mathcal{A} \cup W)$. Supposons le contraire

$$\begin{aligned} w' &= a_0 + a_1 + \dots + a_{h-2}, & a_0 &\leq \dots \leq a_{h-2}, \\ a_i &\in (\mathcal{A} \cup W), & 0 &\leq i \leq h-2. \end{aligned}$$

Le choix des $k(i)$, $1 \leq i \leq h-2$, entraîne que le nombre w' est plus grand que $(h-1)q_{k(h-2)}$ et plus petit que le minimum de $E_{k(h-2)}$. Par conséquent, $a_{h-2} = a(k(h-2))$. En raisonnant de la même manière on obtient :

$$a_{h-3} = a(k(h-3)), \quad \dots, \quad a_1 = a(k(1))$$

et donc $a_0 = w$, ce qui est absurde car w n'appartient ni à \mathcal{A} ni à W .

Puisque w' n'appartient pas à $(h-1)(\mathcal{A} \cup W)$, on conclut que, pour tout k dans $f^{-1}(W)$, k suffisamment grand (tel que $w' \leq h^{-1}Q_k$), le nombre $Q_k - w'$ appartient à E_k et donc

$$Q_k = (Q_k - w') + w + a(k(1)) + \dots + a(k(h-2)),$$

est somme de h éléments de $\mathcal{A} \cup \{w\}$.

5° Démontrons la propriété (P. 1) : on pose

$$\mathcal{K} = \{k; w \notin f(k)\}.$$

On veut montrer que, pour presque tout k dans \mathcal{K} ,

$$(35) \quad Q_k \in h(\mathcal{A} \cup \{w\}).$$

Soit S_1 un ensemble de $s-1$ entiers positifs avec $w \notin S_1$ et $\mathcal{A} \cap S_1 = \emptyset$. Parmi les éléments de $f^{-1}(S_1)$, on choisit les entiers

$$\min f^{-1}(S_1) < k(1, 1) < \dots < k(1, h-2),$$

tels que

$$\begin{aligned} w &\leq h^{-1}Q_{k'(1,1)}, \\ a(k(1,1)) &\leq h^{-1}Q_{k'(1,2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ a(k(1, h-3)) &\leq h^{-1}Q_{k'(1, h-2)}. \end{aligned}$$

Alors l'entier

$$(36) \quad w' = w + a(k(1, 1)) + \dots + a(k(1, h-2)),$$

n'appartient pas à $(h-1)(\mathcal{A} \cup S_1)$. Considérons les entiers, autres que w , qui sont au plus égaux à w' et qui n'appartiennent pas à \mathcal{A} :

$$\{b(1) < b(2) < \dots < b(m(1)) = w'\} = (\mathbb{N} \setminus \mathcal{A}) \cap ((0, w') \setminus \{w\}).$$

On peut écrire \mathcal{K} sous la forme

$$(37) \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}(0) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m(1)} \mathcal{K}(i)\right),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(0) &= \{k \in \mathcal{K}; \min f(k) > w'\}, \\ \mathcal{K}(i) &= \{k \in \mathcal{K}; b(i) \in f(k)\}, \quad 1 \leq i \leq m(1). \end{aligned}$$

On va d'abord montrer que, pour presque tout k dans $\mathcal{K}(0)$, Q_k appartient à $h(\mathcal{A} \cup \{w\})$. Soit k_0 tel que

$$w' \leq h^{-1}Q_{k_0-1}.$$

Les éléments de $\mathcal{K}(0)$ sont de deux sortes :

(i) Ceux pour lesquels $\min f^{-1}(f(k)) \geq k_0$. Pour chaque tel k , on a

$$w' \notin (h-1)(\mathcal{A} \cup f(k)),$$

car, d'une part, $w' \notin (h-1)\mathcal{A}$ et, d'autre part, k est dans $\mathcal{K}(0)$ où, par définition, $w' < \min f(k)$. Il s'en suit que $Q_k - w'$ appartient à E_k , et donc Q_k est somme de h éléments de $\mathcal{A} \cup \{w\}$.

(ii) Le reste des éléments k de $\mathcal{K}(0)$ appartiennent à un nombre fini $p \leq k_0$ d'images réciproques $f^{-1}(W_n)$, $1 \leq n \leq p$, avec $w \notin W_n$, pour tout $1 \leq n \leq p$, et, d'après la propriété (P. 2), presque tous les Q_k correspondants appartiennent à $h(\mathcal{A} \cup \{w\})$.

D'après ce qui précède, il suffit de fixer un i_1 , $1 \leq i_1 \leq m(1)$, et de démontrer que, pour presque tout k dans $\mathcal{K}(i_1)$, Q_k appartient à $h(\mathcal{A} \cup \{w\})$.

Soit S_2 un ensemble de $s-1$ entiers positifs tels que

$$S_2 \cap \mathcal{A} = \emptyset, \quad w \notin S_2, \quad b(i_1) \in S_2.$$

D'une manière analogue à ce que l'on a fait pour S_1 , on choisit des entiers

$$k(2, 1), \dots, k(2, h-2) \in f^{-1}(S_2),$$

et on obtient :

$$w'' = w + a(k(2, 1)) + \dots + a(k(2, h-2)) \notin (h-1)(\mathcal{A} \cup S_2).$$

Soit $\{b(1) < b(2) < \dots < b(m(2))\} = (\mathbb{N} \setminus \mathcal{A}) \cap ((0, w'') \setminus \{w\})$.

On peut écrire :

$$\mathcal{K}(i_1) = \mathcal{K}(i_1, 0) \cup (\bigcup_{i=1, i \neq i_1}^{m(2)} \mathcal{K}(i_1, i)),$$

où

$$\mathcal{K}(i_1, 0) = \{k \in \mathcal{K}(i_1); \min(f(k) \setminus \{b(i_1)\}) > w''\},$$

$$\mathcal{K}(i_1, i) = \{k \in \mathcal{K}(i_1); b(i) \in f(k)\}, \quad 1 \leq i \leq m(2), \quad i \neq i_1.$$

Ainsi le problème se ramène à fixer un i_2 et à démontrer que, pour presque tout k dans $\mathcal{K}(i_1, i_2)$, Q_k est somme de h éléments de $\mathcal{A} \cup \{w\}$.

En raisonnant ainsi de proche en proche, il suffit de montrer que, pour presque tout k appartenant à un certain ensemble

$$\mathcal{K}(i_1, \dots, i_{s-2}) = \{k \in \mathcal{K}; \{b(i_1), \dots, b(i_{s-2})\} \subset f(k)\},$$

Q_k est dans $h(\mathcal{A} \cup \{w\})$. Or, soit :

$$S_{s-1} = \{b(i_1), \dots, b(i_{s-2}), b\},$$

avec $b \neq w, b \notin \mathcal{A}$. On décompose

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(i_1, \dots, i_{s-2}) &= \mathcal{K}(i_1, \dots, i_{s-2}, 0) \\ &\cup (\bigcup_{i=1, i \neq i_1, \dots, i_{s-2}}^{m(s-1)} \mathcal{K}(i_1, \dots, i_{s-2}, i)). \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait sur $\mathcal{K}(0)$ est valide pour $\mathcal{K}(i_1, \dots, i_{s-2}, 0)$, tandis que, d'après la propriété (P. 2), pour presque tout k appartenant à

$$\mathcal{K}(i_1, \dots, i_{s-2}, i) = f^{-1}(\{b(i_1), \dots, b(i_{s-2}), b(i)\}),$$

Q_k est somme de h termes de $\mathcal{A} \cup \{w\}$, ce qui démontre la propriété (P. 1).

6° La majoration $A(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$ s'obtient facilement à partir de la relation (18), de la majoration

$$D(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$$

et du fait que, pour $k \geq s+1$,

$$|E_k| \leq h^{-1} Q_{k-1},$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

THÉORÈME 2. — *Il existe une non-base asymptotique \mathcal{A}' d'ordre h avec $A'(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$ et telle que \mathcal{A}' ne soit pas contenue dans une non-base asymptotique 1-maximale d'ordre h .*

Démonstration. — Les entiers Q_k et les ensembles D_k sont ceux qui ont été introduits dans le lemme 3.

1° On va définir la suite \mathcal{A}' sous la forme $\mathcal{A}' = \bigcup_{k \geq 1} A'_k$ avec

$$D_k \subset A'_k \subset (Q_{k-1} + 1, Q_k).$$

Soit

$$\mathcal{Q} = \{q_k + 1\}_{k=1}^{\infty}.$$

On pose $A'_1 = D_1$. Ayant défini A'_j , $1 \leq j \leq k-1$, on pose

$$A'_k = D_k \cup F_k \cup \{a^*(k)\},$$

où

$$F_k = \{Q_k - z; z \in (0, h^{-1}Q_{k-1}) \setminus (h-1)((\bigcup_{j < k} A'_j) \cup \mathcal{Q})\}$$

et

$$a^*(k) = Q_k - Q_{k-1} + 1.$$

2° Montrons, par récurrence sur k , que l'entier $hq_k = Q_k - 1$ n'appartient pas à $(h-1)(\mathcal{A}' \cup \mathcal{Q})$. Ceci étant vrai pour $k = 1$, supposons que $Q_{k-1} - 1$ n'appartient pas à $(h-1)(\mathcal{A}' \cup \mathcal{Q})$. On montrera par l'absurde que $Q_k - 1$ n'est pas dans $(h-1)(\mathcal{A}' \cup \mathcal{Q})$. Soit :

$$Q_k - 1 = hq_k = a_1 + \dots + a_{h-1}, \quad a_1 \leq \dots \leq a_{h-1}, \\ a_i \in \mathcal{A}' \cup \mathcal{Q} \quad (1 \leq i \leq h-1).$$

On a $a_{h-1} > q_k + 1$, donc a_{h-1} appartient à $F_k \cup \{a^*(k)\}$.

Si $a_{h-1} \in F_k$, on a une contradiction car a_{h-1} est de la forme

$$a_{h-1} = Q_k - (1 + \sum_{i=1}^{h-2} a_i), \quad a_i \in \mathcal{A}' \cup \mathcal{Q} \quad (1 \leq i \leq h-2).$$

Si $a_{h-1} = a^*(k) = Q_k - Q_{k-1} + 1$, on obtient de nouveau une contradiction :

$$Q_{k-1} - 1 = 1 + \sum_{i=1}^{h-2} a_i \in (h-1)(\mathcal{A}' \cup \mathcal{Q}).$$

3° Montrons que la suite \mathcal{A}' est non-base asymptotique d'ordre h . Plus précisément on va montrer que

$$(38) \quad h\mathcal{A}' = \mathbb{N} \setminus \{Q_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Puisque la suite \mathcal{A}' contient la suite \mathcal{Q} , et que cette dernière vérifie la propriété (D. 2), il suffit de montrer que, pour tout $k \geq 1$, Q_k n'appartient pas à $h\mathcal{A}'$. Ceci étant vrai pour $k = 1$, on suppose que Q_{k-1} n'appartient pas à $h\mathcal{A}'$, et on va démontrer que Q_k n'est pas dans $h\mathcal{A}'$. On raisonne par l'absurde. Soit :

$$Q_k = a_1 + \dots + a_h, \quad a_1 \leq \dots \leq a_h, \quad a_i \in \mathcal{A}' \quad (1 \leq i \leq h).$$

Puisque $Q_k = hq_k + 1$, on aura $a_h > q_k$, donc a_h sera un élément de $F_k \cup \{a^*(k)\}$. Mais a_h est de la forme

$$a_h = Q_k - \sum_{i=1}^{h-1} a_i, \quad a_i \in \mathcal{A}' \quad (1 \leq i \leq h-1),$$

ce qui n'est possible ni pour les éléments de F_k , par définition, ni pour $a^*(k) = Q_k - (Q_{k-1} - 1)$: si $Q_{k-1} - 1$ appartenait à $(h-1)\mathcal{A}'$, alors Q_{k-1} , lui, appartiendrait à $h\mathcal{A}'$, ce qui est absurde par hypothèse.

4° Dans le but de déterminer, dans la 5^e étape de la démonstration, toutes les non-bases d'ordre h qui contiennent la suite \mathcal{A}' , montrons à présent la propriété suivante :

Si d n'appartient ni à \mathcal{A}' ni à \mathcal{Q} , alors la suite $\mathcal{A}' \cup \{d\}$ est une base asymptotique d'ordre h .

On choisit successivement les entiers $k(1), \dots, k(h-2)$ tels que

$$\begin{aligned} d &\leq h^{-1}Q_{k(1)-1}, \\ a^*(k(1)) &\leq h^{-1}Q_{k(2)-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ a^*(k(h-3)) &\leq h^{-1}Q_{k(h-2)-1}. \end{aligned}$$

On va montrer que l'entier

$$d' = d + a^*(k(1)) + \dots + a^*(k(h-2)),$$

n'appartient pas à $(h-1)(\mathcal{A}' \cup \mathcal{Q})$. Supposons le contraire :

$$\begin{aligned} d' &= a_0 + a_1 + \dots + a_{h-2}, \quad a_0 \leq \dots \leq a_{h-2}, \\ a_i &\in \mathcal{A}' \cup \mathcal{Q} \quad (0 \leq i \leq h-2). \end{aligned}$$

On remarque que

$$(39) \quad d' > a^*(k(h-2)) > (h-1)(q_{k(h-2)} + 1)$$

et que

$$\begin{aligned} (40) \quad d' &\leq Q_{k(h-2)} - Q_{k(h-2)-1} + 1 + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{h-2} Q_{k(i)-1} \\ &< Q_{k(h-2)} - \frac{1}{h} Q_{k(h-2)-1} \leq \min F_{k(h-2)}. \end{aligned}$$

Les relations (39) et (40) entraînent que $a_{h-2} = a^*(k(h-2))$. En raisonnant de la même manière on obtient :

$$a_{h-3} = a^*(k(h-3)), \quad \dots, \quad a_1 = a^*(k(1))$$

et donc $a_0 = d$, ce qui est absurde, car d n'appartient pas à $\mathcal{A}' \cup \mathcal{Q}$.

On conclut que, pour tout k suffisamment grand (tel que $d' \leq h^{-1} Q_{k-1}$), le nombre $Q_k - d'$ est dans F_k et donc

$$Q_k = (Q_k - d') + d + a^*(k(1)) + \dots + a^*(k(h-2))$$

est somme de h éléments de $\mathcal{A}' \cup \{d\}$, ce qui montre que la suite $\mathcal{A}' \cup \{d\}$ est une base asymptotique d'ordre h .

5° On va déterminer tous les ensembles V avec $\mathcal{A}' \cap V = \emptyset$ tels que la suite $\mathcal{A}' \cup V$ soit encore non-base d'ordre h . D'après l'étape précédente, une condition nécessaire est que V soit contenu dans \mathcal{Q} .

Supposons $V \subset \mathcal{Q}$, et montrons d'abord que

$$(41) \quad h(\mathcal{A}' \cup V) = (h\mathcal{A}') \cup \{Q_k; q_k + 1 \in V\}.$$

Il est clair que, si $q_k + 1 \in V$, puisque $q_k \in D_k \subset \mathcal{A}'$, alors $Q_k = hq_k + 1$ est élément de $h(\mathcal{A}' \cup V)$. Réciproquement, supposons que Q_k est dans $h(\mathcal{A}' \cup V)$:

$$Q_k = a_1 + \dots + a_h, \quad a_1 \leq \dots \leq a_h, \quad a_i \in \mathcal{A}' \cup V \quad (1 \leq i \leq h).$$

On a $a_h > q_k$. Si $a_h \in F_k \cup \{a^*(k)\}$, on obtient une contradiction : en effet,

$$a_h = Q_k - \sum_{i=1}^{h-1} a_i, \quad a_i \in \mathcal{A}' \cup \mathcal{Q} \quad (1 \leq i \leq h-1)$$

et ceci n'est vrai ni pour les éléments de F_k , par définition, ni pour $a^*(k)$, d'après la 2^e étape de la démonstration. Il s'en suit que $a_h = q_k + 1$, c'est-à-dire que $q_k + 1 \in V$.

La relation (41) implique que $\mathcal{A}' \cup V$ est non-base asymptotique d'ordre h si, et seulement si, V est une partie de \mathcal{Q} telle que le complémentaire de V par rapport à \mathcal{Q} soit de cardinal infini. Il est clair qu'une telle suite n'est jamais maximale, c'est-à-dire \mathcal{A}' n'est pas contenue dans une non-base maximale (p. e. 1-maximale) d'ordre h .

6° La majoration $A'(x) = O(x^{1/h})$ s'obtient facilement à partir des relations (18), (D. 3) et du fait que, pour $k \geq 2$,

$$|F_k \cup \{a^*(k)\}| < Q_{k-1},$$

ce qui prouve le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ERDÖS (P.) and NATHANSON (M. B.). — Nonbases of density zero not contained in maximal nonbases, *J. London math. Soc.*, Series 2, t. 15, 1977, p. 403-405.
- [2] NATHANSON (M. B.). — s -maximal nonbases of density zero, *J. London math. Soc.*, Series 2, t. 15, 1977, p. 29-34.