

BULLETIN DE LA S. M. F.

GUNNAR FORST

Note sur des principes duaux en théorie du potentiel

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 269-270

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__269_0

© Bulletin de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR DES PRINCIPES DUAUX
EN THÉORIE DU POTENTIEL

PAR

GUNNAR FORST (*)

[Københavns Universitet]

RÉSUMÉ. — Un résultat de dualité des principes du type domination et balayage pour quatre noyaux unifie les deux théorèmes de dualité de BERG.

ABSTRACT. — A duality result for some four-kernel domination and balayage principles unifies two duality theorems of BERG.

Nous allons utiliser les notations de BERG [1]. Soient K, L, M et N des noyaux continus sur X .

DÉFINITION (cf. OHTSUKA [2]). — On dit que K, L, M, N vérifient le principe de domination (de quatre noyaux), noté $D(K, L, M, N)$, si, pour $f, g \in C_c^+(X)$,

$$Kf \leq Lg \text{ sur } \text{supp}(f) \Rightarrow Mf \leq Ng \text{ sur } X.$$

DÉFINITION. — On dit que K, L, M, N vérifient le principe de balayage (de quatre noyaux), noté $B(K, L, M, N)$, si, pour tout ouvert relativement compact $\omega \subseteq X$ et toute $\mu \in M_c^+(X)$, il existe $\mu' \in M_c^+(X)$ telle que $\text{supp}(\mu') \subseteq \bar{\omega}$ et

$$M^*\mu \leq K^*\mu' \text{ sur } \omega \quad \text{et} \quad L^*\mu' \leq N^*\mu \text{ sur } X.$$

Le noyau transposé d'un noyau continu K est noté K^* . Il est clair que nous avons

$$\begin{aligned} D(K, L, K, L) &\Leftrightarrow K \prec L \text{ (principe relatif de domination);} \\ D(K, K, L, L) &\Leftrightarrow K \sqsubset L \text{ (principe transitif de domination);} \\ B(K, L, K, L) &\Leftrightarrow K \sqsubset^* L \text{ (principe transitif du balayage);} \\ B(K, K, L, L) &\Leftrightarrow K \prec^* L \text{ (principe relatif du balayage);} \end{aligned}$$

et le résultat suivant entraîne donc les théorèmes 1 et 2 de [1].

(*) Texte reçu le 4 septembre 1978.

Gunnar Forst, Matematisk Institut, Universitetsparken 5, DK-2100 København Ø.

THÉORÈME. — Soient K, L, M, N des noyaux continus sur X , et supposons que L soit strictement positif. Alors :

$$D(K, L, M, N) \Leftrightarrow B(K, L, M, N).$$

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2 de [1]. Par un argument classique on a « \Leftarrow ». Inversement, pour un ouvert relativement compact $\omega \subseteq X$, on considère l'ensemble

$$B = \{(K^* \sigma - \xi, L^* \sigma + \eta); \sigma \in M_c^+(\bar{\omega}), \eta \in M^+(X), \xi \in M(X), \xi|_{\omega} \geq 0\},$$

et il s'agit de montrer l'inclusion

$$(1) \quad \{(M^* \mu, N^* \mu); \mu \in M_c^+(X)\} \subseteq B.$$

L'ensemble B est un cône convexe vaguement fermé (ici on utilise que L est strictement positif). Si (1) n'est pas vérifiée, il existe $\mu \in M_c^+(X)$ et, par le théorème de Hahn-Banach, un couple $(f, g) \in C_c(X) \times C_c(X)$ tel que

$$\langle M^* \mu, f \rangle + \langle N^* \mu, g \rangle < 0,$$

et

$$\langle \tau', f \rangle + \langle \tau'', g \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } (\tau', \tau'') \in B.$$

Il est facile de voir (comme dans [1]) que c'est en contradiction avec $D(K, L, M, N)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERG (C.). — Principes duaux en théorie du potentiel, *Bull. Soc. math. France*, t. 106, 1978, p. 365-372.
 [2] OHTSUKA (M.). — A remark on duality of domination principle, *Hiroshima math. J.*, t. 5, 1975, p. 561-562.