

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS

RENEE LEWIN-MENEGAUX

## **Applications rationnelles séparables dominantes sur une variété de type général**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 106 (1978), p. 279-287

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1978\\_\\_106\\_\\_279\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__279_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**APPLICATIONS RATIONNELLES SÉPARABLES DOMINANTES  
SUR UNE VARIÉTÉ DE TYPE GÉNÉRAL**

PAR

MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS  
et RENÉE LEWIN-MENEGAUX

[Université Paris-Sud, Orsay]

---

RÉSUMÉ. — Soit  $k$  un corps de caractéristique quelconque,  $X$  et  $Y$  deux  $k$ -variétés projectives et lisses,  $Y$  étant de type général. On prouve ici que l'ensemble des applications rationnelles séparables et dominantes de  $X$  sur  $Y$  est fini. La démonstration, purement algébrique, utilise les applications rationnelles multicanoniques de  $Y$  dans des espaces projectifs, et fait apparaître les applications rationnelles dominantes séparables de  $X$  sur  $Y$  comme les points rationnels d'un foncteur dont on démontre qu'il est fini.

ABSTRACT. — Let  $k$  be a field of any characteristic,  $X$  and  $Y$  two smooth projective  $k$ -varieties,  $Y$  is supposed to be of general type. In this paper, we show that the number of separable dominant rational maps from  $X$  onto  $Y$  is finite. In the proof, which is purely algebraic, we use multicanonical rational maps from  $Y$  into projective spaces, and consider the separable dominant rational maps from  $X$  onto  $Y$  as the rational points of a functor which is shown to be finite.

Dans un article récent [2], KOBAYASHI et OCHIAI ont démontré le théorème suivant : « Soient  $X$  un espace de Moisozon,  $Y$  un espace complexe de type général. L'ensemble des applications méromorphes de  $X$  sur  $Y$  est fini. »

Ce résultat, bien que démontré par des méthodes analytiques, est en fait de nature algébrique, et ces auteurs, qui se ramènent d'ailleurs dans leur article au cas de variétés complexes projectives non singulières, indiquent qu'il serait intéressant d'en donner une démonstration purement algébrique, ce qui est l'objet de cet article.

Dans toute la suite, nous travaillons avec des variétés, c'est-à-dire des schémas de type fini sur un corps  $k$ .

Pour toute variété  $X$ , de dimension  $d$ , on note  $\Omega_X^1$  le faisceau des 1-formes différentielles,  $\omega_X = \wedge^d \Omega_X^1$  le faisceau des  $d$ -formes différentielles. De même, pour tout morphisme de variétés  $X \rightarrow Y$ , on utilise les notations  $\Omega_{X/Y}$  et  $\omega_{X/Y}$  pour les faisceaux de différentielles relatives.

*Rappels*

1° Si  $S$  est une variété,  $X \xrightarrow{p} S$ ,  $Y \xrightarrow{q} S$  deux  $S$ -variétés, une  $S$ -application rationnelle de  $X$  dans  $Y$  est une application rationnelle  $f: X \rightarrow Y$  dont l'ouvert de définition  $U$  rencontre toutes les fibres de  $X \xrightarrow{p} S$ , et qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & S \end{array}$$

On peut donc parler de la restriction  $f_s: X \times_S k(s) \rightarrow Y \times_S k(s)$  à la fibre d'un point  $s$  de  $S$ . On note  $\text{Rat}_S(X, Y)$  l'ensemble des  $S$ -applications rationnelles de  $X$  dans  $Y$ .

2° Une variété propre et lisse  $X$  est dite de type général si, pour  $n \geq 0$ , l'image de l'application rationnelle multicanonique  $X \dots \rightarrow \mathbf{P}_k(H^0(\omega_X^{\otimes n}))$  a même dimension que  $X$ . Alors, pour  $n$  suffisamment grand, cette application est birationnelle sur son image [4].

Soient donc  $X$  et  $Y$  deux variétés propres et lisses sur  $k$ ,  $Y$  étant de type général. On va faire apparaître l'ensemble des applications rationnelles séparables dominantes de  $X$  dans  $Y$  comme l'ensemble des points rationnels d'un foncteur, dont on démontrera qu'il est fini, d'où le théorème : « L'ensemble des applications rationnelles dominantes séparables de  $X$  dans  $Y$  est fini. »

En corollaire, on obtient aussi le résultat suivant : Soit  $S$  un  $k$ -schéma réduit irréductible,  $f: X \times_k S \dots \rightarrow Y \times_k S$  une  $S$ -application rationnelle dominante séparable. Alors  $f$  est constante.

**1. Notations.**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés propres et lisses sur  $k$ ,  $Y$  étant de type général. Soit  $\mathcal{C}$  la sous-catégorie pleine de la catégorie des  $k$ -schémas de type fini dont les objets sont les  $k$ -variétés réduites. Pour tout objet  $S$  de  $\mathcal{C}$ , on note  $X_S = X \times_k S$  (resp.  $Y_S = Y \times_k S$ ).

Ceci étant posé, il existe un entier  $n$  positif, fixé une fois pour toutes dans ce qui suit, tel que l'application rationnelle multicanonique  $i: Y \dots \rightarrow \mathbf{P}_k(H^0(\omega_Y^{\otimes n}))$  soit birationnelle sur son image.

On note :

$$d = \dim Y;$$

$$F = H^0(Y, \omega_Y^{\otimes n});$$

$\mathcal{G} = S^n (\wedge^d \Omega_X^1)$  ( $n$ -ième puissance symétrique).

En particulier, si  $\dim X = d$ ,  $\mathcal{G} = \omega_X^{\otimes n}$ .

$G = H^0(X, \mathcal{G})$ ,

$E = \text{Hom}(F, G)^\vee$  (le dual de l'espace vectoriel  $\text{Hom}(F, G)$ ).

Soit  $\mathcal{D} : \mathcal{C} \rightarrow (\text{Ens})^0$  le foncteur défini pour tout objet  $S$  de  $\mathcal{C}$  par  $\mathcal{D}(S) = \{f; f \in \text{Rat}_S(X_S, Y_S); \forall s \in S, f_s \text{ est dominante et séparable}\}$ .

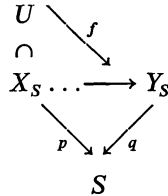
En particulier, pour toute extension de corps  $k \rightarrow K$ ,  $\mathcal{D}(\text{Spec } K)$ , que l'on note  $\mathcal{D}(K)$  par abus de notation, est l'ensemble des  $K$ -applications rationnelles dominantes et séparables de  $X \times_k K$  dans  $Y \times_k K$ .

On va construire des monomorphismes  $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{V}(E)$  et  $v : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{P}(E)$ , et montrer qu'il existe un fermé de  $\mathbf{P}(E)$  contenant l'image de  $v$ , qui se relève dans  $\mathbf{V}(E)$ , et qui est donc fini, puisque propre et affine.

Pour tout morphisme  $S' \rightarrow S$  de  $k$ -schémas, et tout  $\mathcal{O}_S$ -module  $\mathcal{H}$ , on note  $\mathcal{H} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$  le  $\mathcal{O}_{S'}$ -module image réciproque; si  $S = k$  on le note simplement  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_S$ .

**2. Construction de morphismes fonctoriels  $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{V}(E)$  et  $v : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{P}(E)$ .**

Soit  $S$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $f$  un élément de  $\mathcal{D}(S)$ , et  $U$  son ouvert de définition dans  $X_S$ . Son complémentaire ne contient aucune fibre et est de codimension supérieure ou égale à 2 dans la fibre de tout point générique de  $S$ , donc est globalement de codimension supérieure ou égale à 2 [1].



La différentielle de  $f$  est un homomorphisme de  $\mathcal{O}_U$ -modules

$$f^* \Omega_{Y_S/S}^1 \rightarrow \Omega_{X_S/S}^1 \Big|_U,$$

d'où, en prenant les puissances extérieures  $d$ -ièmes,

$$f^* \omega_{Y_S/S} \rightarrow \Lambda^d \Omega_{X_S/S}^1 \Big|_U$$

et

$$\begin{aligned}
 f^* \omega_{Y_S/S}^{\otimes n} &\rightarrow (S^n \Lambda^d \Omega_{X_S/S}^1) \Big|_U \\
 &= \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_S} \Big|_U \\
 &= \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_S \Big|_U
 \end{aligned}$$

et enfin, par adjonction

$$\omega_{Y_S/S}^{\otimes n} \rightarrow f_*(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_S|_U),$$

toutes ces flèches étant injectives parce que  $f$  est dominant et séparable.

D'où une injection  $q_*(\omega_{Y_S/S}^{\otimes n}) \rightarrow p_*(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_S|_U)$ , que l'on note  $df$  par abus de notation.

LEMME 1. — *L'homomorphisme de restriction*

$$p_*(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_S) \rightarrow p_*(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_S|_U)$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que si  $j$  est l'injection  $U \hookrightarrow X_S$ , l'homomorphisme  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow j_*(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_S|_U)$  est un isomorphisme puisque  $X_S$  est de profondeur supérieure ou égale à 2 en tout point de  $X_S - U$ , et  $\mathcal{G}$  est localement libre sur  $X$ .

On a donc une injection  $f^* : q_*(\omega_{Y_S/S}^{\otimes n}) \rightarrow p_*(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_S)$ .

Par les isomorphismes canoniques

$$G \otimes_k \mathcal{O}_S = H^0(\mathcal{G}) \otimes_k \mathcal{O}_S \rightarrow p_*(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_S),$$

$$F \otimes_k \mathcal{O}_S = H^0(\omega_{Y/k}^{\otimes n}) \otimes_k \mathcal{O}_S \rightarrow q_*(\omega_{Y_S/S}^{\otimes n})$$

qui commutent au changement de base, on identifiera désormais

$$G \otimes_k \mathcal{O}_S \text{ et } p_*(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_S) \text{ (resp. } F \otimes_k \mathcal{O}_S \text{ et } q_*(\omega_{Y_S/S}^{\otimes n})).$$

La flèche  $f^*$  correspond donc à une section globale de  $E^\vee \otimes_k \mathcal{O}_S$ , dont la duale  $f^\flat : E \otimes_k \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S$  correspond à un point de  $\mathbf{V}(E)$  à valeur dans  $S$ .

PROPOSITION 1. — *L'application qui à un élément  $f$  de  $\mathcal{D}(S)$  associe le point de  $\mathbf{V}(E)(S)$ , correspondant à  $f^\flat$ , définit un morphisme fonctoriel  $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{V}(E)$ .*

*Démonstration.* — Il faut vérifier que cette construction commute au changement de base. Soit  $\alpha : S' \rightarrow S$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ ,  $f : X_S \dots \rightarrow Y_S$  un élément de  $\mathcal{D}(S)$ ,  $f' = \alpha^*(f) : X_{S'} \dots \rightarrow Y_{S'}$ . Vérifions que  $f'^\flat = \alpha^*(f^\flat)$ , ou encore que  $f'^* = \alpha^*(f^*)$ . On peut supposer  $S$  et  $S'$  affines, soit  $S = \text{Spec } A$  et  $S' = \text{Spec } A'$ . Soit  $U$  l'ouvert de définition de  $f$ ,  $U'$  celui de  $f'$ , qui contient  $\alpha^{-1}(U)$ . Les diagrammes suivants où les flèches verticales sont les morphismes de restriction, commutent :

$$\begin{array}{ccc} H^0(\omega_{Y/k}^{\otimes n}) \otimes_k A & \xrightarrow{df} & H^0(U, \mathcal{G} \otimes_k A) \\ & \searrow f^\flat & \uparrow * \\ & & H^0(\mathcal{G}) \otimes_k A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(\omega_{Y/k}^{\otimes n}) \otimes_k A' & \xrightarrow{df'} & H^0(U', \mathcal{G} \otimes_k A') \\
 & \searrow f'^* & \uparrow \mu \\
 & & H^0(\mathcal{G}) \otimes_k A'
 \end{array}$$

Puisque  $f' = \alpha^*(f)$  et puisque la flèche de restriction

$$H^0(U', \mathcal{G} \otimes_k A') \rightarrow H^0(\alpha^{-1}(U), \mathcal{G} \otimes_k A')$$

est injective, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^0(U, \mathcal{G} \otimes_k A) \otimes_A A' & & \\
 & \nearrow \alpha^*(df) & \uparrow \alpha^*(\lambda) & \searrow & \\
 H^0(\omega_{Y/k}^{\otimes n}) \otimes_k A' & & H^0(\mathcal{G}) \otimes_k A' & & H^0(\alpha^{-1}(U), \mathcal{G} \otimes_k A') \\
 & \searrow df' & \downarrow \mu & \nearrow & \\
 & & H^0(U', \mathcal{G} \otimes_k A') & & 
 \end{array}$$

d'où le résultat.

**COROLLAIRE 1.** — *La flèche  $f^b$  est surjective.*

*Démonstration.* — D'après la proposition précédente,  $f^*$  commute au changement de base, donc n'est nulle dans aucune fibre.

La flèche  $f^b$  définit donc un point de  $\mathbf{P}(E)$  à valeur dans  $S$ , c'est-à-dire un morphisme  $g(f) : S \rightarrow \mathbf{P}(E)$ . Par définition, on note  $v(f)$  la classe de  $f^b$  dans  $\mathbf{P}(E)$ , et  $v$  est un morphisme fonctoriel de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbf{P}(E)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D} & \xrightarrow{u} & \mathbf{V}^1(E) - (0) \\
 & \searrow v & \downarrow \\
 & & \mathbf{P}(E)
 \end{array}$$

### 3. Finitude de $\mathcal{D}$

Sur  $P = \mathbf{P}(E)$ , il existe le quotient universel  $E \otimes \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_P(1) \rightarrow 0$ . En dualisant, on obtient une injection  $\mathcal{O}_P \hookrightarrow E^\vee \otimes \mathcal{O}_P(1)$  qui correspond à un homomorphisme de  $\mathcal{O}_P$ -modules  $u : F \otimes \mathcal{O}_P(-1) \rightarrow G \otimes \mathcal{O}_P$ , donc à une famille d'applications linéaires  $\{u_t : F \rightarrow G, t \in P\}$ , à homothétie près, non nulles, paramétrées par  $P$ .

Notons  $\Lambda^2$  l'homomorphisme canonique

$$G \otimes_k G = H^0(\mathcal{G}) \otimes_k H^0(\mathcal{G}) \rightarrow H^0(\Lambda^2 \mathcal{G}).$$

PROPOSITION 2. — L'ensemble des points  $t$  de  $P$  tels que  $\wedge^2(u_t \otimes u_t) = 0$  est un fermé  $T_1$  de  $P$ . Pour tout point  $t$  de  $T_1$ ,  $u_t$  engendre un sous-faisceau  $\mathcal{L}_t$  de  $G$  inversible en codimension 1, et ces faisceaux  $\mathcal{L}_t$  se recollent en un faisceau inversible sur un ouvert de  $X_{T_1}$  rencontrant toutes les fibres de  $X_{T_1} \rightarrow T_1$ .

Démonstration. —  $T_1$  est le support de l'homomorphisme de  $\mathcal{O}_P$ -modules cohérents :

$$\begin{aligned} (F \otimes \mathcal{O}_P(-1)) \otimes_{\mathcal{O}_P} (F \otimes \mathcal{O}_P(-1)) &\xrightarrow{u \otimes u} (G \otimes \mathcal{O}_P) \otimes_{\mathcal{O}_P} (G \otimes \mathcal{O}_P) \\ &\downarrow \sim \\ (G \otimes \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_P} & \\ &\downarrow \wedge^2 \\ H^0(\wedge^2 \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_P} & \end{aligned}$$

On le munit de sa structure de sous-schéma fermé réduit. Soit  $\mathcal{M}$  l'image (resp.  $\mathcal{M}'$  le conoyau) de l'homomorphisme composé

$$(F \otimes \mathcal{O}_P(-1)) \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_{X_{T_1}} \xrightarrow{u} G \otimes \mathcal{O}_{X_{T_1}} \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_{T_1}}$$

Pour tout point  $t$  de  $T_1$ ,  $\wedge^2(u_t \otimes u_t) = 0$ , et puisque  $X_t$  est un  $k(t)$ -schéma lisse,  $u_t$  engendre un sous-faisceau  $\mathcal{L}_t$  de  $\mathcal{G}$  inversible en codimension 1 (son bidual  $\mathcal{L}_t$  est inversible).

$$\begin{array}{ccccc} F \otimes \mathcal{O}_X & \xrightarrow{u_t} & G \otimes \mathcal{O}_X & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \mathcal{L}_t & \hookrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{M}'_t \rightarrow 0 \end{array}$$

En chaque point  $x$  de  $X$ , on a

- (i) rang  $\mathcal{M}'_{t,x} = \text{rang } \mathcal{G} - 1$  ou
- (ii) rang  $\mathcal{M}'_{t,x} = \text{rang } \mathcal{G}$ , et l'ouvert cherché est l'ensemble des points où (i) est vraie. De plus, sur cet ouvert,  $\mathcal{M}$  est localement facteur direct de  $\mathcal{G}$  et commute au changement de base.

Le faisceau  $\mathcal{M}$  définit donc une  $T_1$ -application rationnelle

$$j : X_{T_1} \dots \rightarrow \mathbf{P}(F) \times T_1.$$

PROPOSITION 3. — Il existe un plus grand fermé  $T$  de  $T_1$  sur lequel  $j$  induit une application rationnelle  $\varphi : X_T \dots \rightarrow Y_T$ , génériquement dominante et séparable.

Démonstration. — L'ensemble des points  $t$  de  $T_1$ , tels que l'image de  $j_t$  soit contenue dans  $Y'$ , est un fermé  $T_2$ . Par construction,  $j$  induit une appli-

cation rationnelle  $\varphi : X_{T_2} \dots \rightarrow Y_{T_2}$  qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{T_2} \dots & \longrightarrow & Y_{T_2} \\ & \searrow j & \swarrow i \\ & \mathbf{P}(F) \times T_2 & \end{array}$$

Soit  $T$  l'adhérence dans  $T_2$  de l'ouvert au-dessus duquel  $\varphi$  est dominante et séparable. C'est le fermé cherché. De plus, l'ouvert de définition de  $\varphi : X_T \dots \rightarrow Y_T$  rencontre les fibres de tous les points  $t$  pour lesquels  $j_t$  est dominante sur son image.

LEMME 2. — Soit  $S$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $f$  un élément de  $\mathcal{D}(S)$ , et  $g : S \rightarrow P$  le morphisme correspondant à  $v(f)$ . Alors l'image de  $g$  est contenue dans  $T$ , et  $g^*(j) = \text{if}$ .

Démonstration. — L'image de  $g$  est contenue dans  $T_1$ , puisque par construction  $f$  est déduite de  $u$  par changement de base.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F \otimes \mathcal{O}_{X_S} & \xrightarrow{g^*(u)} & G \otimes \mathcal{O}_{X_S} \\ \downarrow & & \downarrow \delta \\ f^* \omega_{Y_S/S}^{\otimes n} & \xrightarrow{df} & \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{X_S} \end{array}$$

où les flèches verticales sont les flèches canoniques commute à multiplication près par une section globale inversible de  $\mathcal{O}_{X_S}$ . D'après la proposition 2, sur un ouvert non vide de  $\mathcal{O}_{X_S}$ ,  $g^*(u)$  engendre le sous-faisceau inversible  $g^*(\mathcal{M})$  de  $\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{X_S}$  et la flèche canonique  $F \otimes \mathcal{O}_{X_S} \rightarrow f^* \omega_{Y_S/S}^{\otimes n}$  est surjective.

Sur cet ouvert,  $df$  se factorise donc par l'injection  $g^*(\mathcal{M}) \hookrightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{X_S}$ , ce qui prouve que les deux applications rationnelles

$$\text{if} : X_S \dots \rightarrow Y_S \dots \rightarrow \mathbf{P}(F) \times S$$

et

$$g^*(j) : X_S \dots \rightarrow \mathbf{P}(F) \times S$$

coïncident et l'image de  $g$  est contenue dans  $T$ .

COROLLAIRE 2. —  $u$  et  $v$  sont des monomorphismes, et l'image de  $v$  est contenue dans  $T$ .

COROLLAIRE 3. — L'image de  $u$  est finie.



*Démonstration.* — Soit  $T_0$  l'ouvert de  $T$ , non vide, sur lequel les fibres de  $\varphi$  sont définies, dominantes et séparables. L'application rationnelle  $\varphi|_{T_0}$  définit un morphisme  $w : T_0 \rightarrow \mathbf{V}(E) - (0) \subset \mathbf{V}(E)$ , que nous allons prolonger au normalisé de  $T$ .

Soit  $V_0$  (resp.  $V$ ) le normalisé de  $T_0$  (resp. de  $T$ ). Puisque  $X_V$  est normale, l'ouvert de définition de  $\varphi_V : X_V \dots \rightarrow Y_V$  est de profondeur au moins 2, et on peut construire comme au paragraphe 2 un homomorphisme de  $\mathcal{O}_V$ -modules :  $F \otimes \mathcal{O}_V \rightarrow G \otimes \mathcal{O}_V$ , et un point de  $\mathbf{V}(E)$  à valeur dans  $V$ , qui prolonge le morphisme  $V_0 \xrightarrow{u(\varphi_{V_0})} \mathbf{V}(E)$ . Puisque  $V$  est propre sur  $k$ , son image dans  $\mathbf{V}(E)$  est finie, donc l'image de  $w$  est un point.

Pour terminer la démonstration, il suffit de vérifier que les morphismes  $w \circ v$  et  $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{V}(E)$  sont égaux, ce qui résulte du lemme 2.

THÉORÈME 1. —  $\mathcal{D}$  est fini.

THÉORÈME 2. — L'ensemble des applications rationnelles séparables dominantes de  $X$  dans  $Y$  est fini.

On obtient en particulier le résultat bien connu suivant [3] :

COROLLAIRE 4. — Le groupe des automorphismes (resp. des automorphismes birationnels) d'une variété de type général est fini.

COROLLAIRE 5. — Soit  $S$  un  $k$ -schéma réduit irréductible. Soit  $f : X_S \dots \rightarrow Y_S$  une  $S$ -application rationnelle séparable et dominante. Alors  $f$  est constante.

*Démonstration.* — Il existe un ouvert  $S_0$  de  $S$  tel que  $f|_{S_0}$  soit un élément de  $\mathcal{D}(S_0)$ , une extension pure  $k_0$  de  $k$  contenue dans  $k(S)$ , et une application rationnelle  $f_0 : X \dots \rightarrow Y$  dominante séparable telle que  $f|_{S_0} = f_0 \times_{k_0} S$ . Donc  $f$  est constante.

*Remarque 1.* — La démonstration du théorème est inchangée si on suppose seulement  $X$  et  $Y$  géométriquement normaux.

*Remarque 2.* — Le schéma  $T$  ne représente pas le foncteur  $\mathcal{D}$ . On peut voir sur l'exemple suivant que  $T$  peut ne pas être fini, et d'autre part posséder des composantes correspondant à des applications rationnelles de  $X$  dans  $Y$  non séparables.

*Exemple.* — Soit  $k$  un corps de caractéristique 3. Soit  $C$  (resp.  $C'$ ) la courbe plane d'équation  $X^{16} + Y^{16} + T^{16} = 0$  (resp.  $X^4 + Y^4 + T^4 = 0$ ). On a  $\omega_C = \mathcal{O}_C(13)$  et  $\omega_{C'} = \mathcal{O}_{C'}(1)$ . Le plongement canonique de  $C$  est le plongement donné  $C \subset \mathbf{P}^2$  composé avec le morphisme de Veronese  $\mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_C(13)) = \mathbf{P}^N$ , et celui de  $C'$  est le plongement donné  $C' \subset \mathbf{P}^2$ .

Une application linéaire projective  $\mathbf{P}^N \rightarrow \mathbf{P}^2$  est définie par 3 polynômes homogènes de degré 13 ( $P_1, P_2, P_3$ ). Toutes celles qui sont de la forme  $(PX^4, PY^4, PT^4)$ , où  $P$  est un polynôme homogène de degré 9, induisent le même morphisme  $\varphi : C \rightarrow C'$ ,  $\varphi(x, y, t) = (x^4, y^4, t^4)$ . D'où, dans  $T$ , une composante de dimension 55.

Toutes celles qui sont de la forme  $(QX^{12}, QY^{12}, QT^{12})$ , où  $Q$  est une forme linéaire, induisent le même morphisme  $\psi : C \rightarrow C'$ ,  $\psi(x, y, t) = (x^{12}, y^{12}, t^{12})$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). — *Éléments de géométrie algébrique, IV : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*. — Paris, Presses universitaires de France, 1964-1967 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 20, 24, 28 et 32).
- [2] KOBAYASHI (S.) and OCHIAI (T.). — Meromorphic mappings onto complex spaces of general type, *Invent. Math.*, t. 31, 1975, p. 7-16.
- [3] MATSUMURA (H.). — On algebraic groups of birational transformations, *Rend. Accad. naz. Lincei*, Série 8, t. 34, 1963, p. 151-155.
- [4] UENO (K.). — *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*. — Berlin, Springer-Verlag, 1975 (*Lecture Notes in Mathematics*, 439).

(Texte reçu le 16 novembre 1977.)

Mireille MARTIN-DESCHAMPS,  
11, rue de la Sablonnière,  
91400 Gometz-le-Châtel;

Renée LEWIN-MENEGAUX,  
12, boulevard des Invalides,  
75007 Paris.