BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-CLAUDE TOUGERON

Sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes qui appartiennent à la classe de Bernstein

Bulletin de la S. M. F., tome 106 (1978), p. 207-224

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__207_0>

Bull. Soc. math. France,
106, 1978, p. 207-224.

SUR L'ANNEAU DES GERMES DE FONCTIONS HOLOMORPHES QUI APPARTIENNENT A LA CLASSE DE BERNSTEIN

PAR

JEAN-CLAUDE TOUGERON

[Université Rennes-I]

RÉSUMÉ. — Soient $\mathcal{O}_n$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}^n$; $\mathcal{P}_n$ l'anneau des polynômes $\mathbf{C}[Z_1, \ldots, Z_n]$. On étudie les propriétés algébriques de l'anneau $\mathcal{B}_n$ (resp. $\mathcal{C}_n$) formé des $f \in \mathcal{O}_n$ tels que f et les $D^\omega f$, $\omega \in \mathbf{N}^n$, engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des fractions $[\mathcal{P}_n]$ de $\mathcal{P}_n$ (resp. engendrent un corps de degré de transcendance fini sur $[\mathcal{P}_n]$). L'anneau $\mathcal{B}_n$ est pathologique, mais possède de bonnes propriétés en tant que module sur $\mathcal{P}_n$; $\mathcal{C}_n$ est un anneau local régulier de dimension n vérifiant toutes les propriétés classiques de $\mathcal{O}_n$.

ABSTRACT. — Let $\mathcal{O}_n$ be the ring of germs of holomorphic functions at the origin of $\mathbf{C}^n$; let $\mathcal{P}_n$ be the ring of polynomials $\mathbf{C}[Z_1, \ldots, Z_n]$. We study the algebraïc properties of the ring $\mathcal{B}_n$ (resp. $\mathcal{C}_n$) whose elements are germs $f \in \mathcal{O}_n$ such that f and $D^\omega f$, $\omega \in \mathbf{N}^n$, generate a finite dimensional vector space on the field of fractions $[\mathcal{P}_n]$ of $\mathcal{P}_n$ (resp. generate a field with finite transcendance degree on $[\mathcal{P}_n]$). The ring $\mathcal{B}_n$ is pathologic, but possesses good properties as a modulus on $\mathcal{P}_n$; $\mathcal{C}_n$ is a regular local ring of dimension n which verifies all classic properties of $\mathcal{O}_n$.

Soient X un germe d'ensemble de Nash irréductible à l'origine de $\mathbf{C}^n$, $\mathcal{N}_X$ l'anneau des germes de fonctions de Nash sur X, $\mathcal{O}_X$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur X, et $[\mathcal{N}_X]$ (resp. $[\mathcal{O}_X]$) le corps des fractions de $\mathcal{N}_X$ (resp. $\mathcal{O}_X$). Soit $\mathrm{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_X]$ l'ensemble des $\mathbf{C}$-dérivations de $[\mathcal{N}_X]$ dans lui-même : une telle $\mathbf{C}$-dérivation se prolonge de façon unique en une $\mathbf{C}$-dérivation de $[\mathcal{O}_X]$ dans lui-même. Dans cet article, nous étudions d'abord l'ensemble $\mathcal{B}_X$ des $f \in \mathcal{O}_X$ tels que l'espace vectoriel engendré sur $[\mathcal{N}_X]$ par tous les $D_1 \ldots D_s f$, $s \in \mathbf{N}$ et $D_i \in \mathrm{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_X]$, soit de dimension finie sur $[\mathcal{N}_X]$: $\mathcal{B}_X$ est un anneau ($\mathcal{N}_X \subset \mathcal{B}_X \subset \mathcal{O}_X$) qui n'est pas local et qui n'est pas noethérien (sauf évidemment si $\dim X = 0$). Cependant, $\mathcal{B}_X$ vérifie de bonnes propriétés par rapport à $\mathcal{N}_X$: par exemple, $\mathcal{B}_X$ est un module plat sur $\mathcal{N}_X$; si $X \varsubsetneq (\mathbf{C}^n, 0)$ est un plongement et si $\mathcal{B}_{\mathbf{C}^n} = \mathcal{B}_n$, on a $\mathcal{B}_X \sim \mathcal{B}_n / I . \mathcal{B}_n$, où I désigne l'idéal de $\mathcal{N}_{\mathbf{C}^n} = \mathcal{N}_n$ formé des f tels que $f \mid X = 0$ (th. 2.12). Ainsi, l'étude des $\mathcal{B}_X$ est ramenée à celle des $\mathcal{B}_n$. Un germe $f \in \mathcal{O}_n = \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}$ appartient à $\mathcal{B}_n$ si, et seulement si, $A_n(\mathbf{C}) . f$ est un module de Bernstein sur $A_n(\mathbf{C})$ (*cf.* [1], $A_n(\mathbf{C})$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients polynômes en les variables $z_1, \ldots, z_n$).

On définit ensuite un sous-anneau $\mathscr{C}_X$ de $\mathscr{O}_X$ ($\mathscr{B}_X \subset \mathscr{C}_X \subset \mathscr{O}_X$) de la façon suivante : $f \in \mathscr{C}_X$ si le corps engendré sur $[\mathscr{N}_X]$ par tous les $D_1 \ldots D_s f$, $s \in \mathbf{N}$ et $D_i \in \mathrm{Der}_{\mathbf{C}}[\mathscr{N}_X]$, est de degré de transcendance fini sur $[\mathscr{N}_X]$; $\mathscr{C}_X$ se comporte mieux que $\mathscr{B}_X$; c'est un anneau local noethérien jouissant des propriétés bien connues de $\mathscr{N}_X$ ou $\mathscr{O}_X$: théorème de préparation, théorème des fonctions implicites, platitude de $\mathscr{C}_X$ sur $\mathscr{N}_X$ ou de $\mathscr{O}_X$ sur $\mathscr{C}_X$, théorème d'Artin sur les solutions d'un système d'équations analytiques, etc.

Les démonstrations utilisent comme outils principaux un critère de platitude et un critère de noethérianité pour des sous-anneaux A_n de $\mathscr{O}_n$ contenant $\mathscr{N}_n$: ces critères sont démontrés au paragraphe 1. Pour terminer, signalons une question intéressante : en quelle mesure, les résultats de cet article subsistent-ils quand on considère, au lieu de germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}^n$, des germes de fonctions holomorphes au voisinage d'un compact convenable de $\mathbf{C}^n$ ou des germes de fonctions $\mathbf{C}^\infty$ au voisinage de l'origine (ou plus généralement d'un compact) de $\mathbf{R}^n$?

1. Un critère de platitude et un critère de noethérianité

On pose $\mathscr{P}_n = \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$; $\mathscr{O}_n = \mathbf{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$; $\mathscr{N}_n$ désigne l'anneau des germes de fonctions de Nash à l'origine de $\mathbf{C}^n$. Si K est un anneau intègre, $[K]$ désigne son corps des fractions. Pour tout $n \geqslant 0$, soit A_n un sous-anneau de $\mathscr{O}_n$ contenant $\mathscr{N}_n$.

PROPOSITION 1.1. — *On suppose que la famille A_n vérifie les conditions suivantes :*

1° *si $a : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ a ses composantes dans $\mathscr{N}_n$ et si $f \in A_p$, alors $f \circ a \in A_n$;*

2° *si $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{P}_n$ forment un système de paramètres de $\mathscr{N}_n$, et si $a = (a_1, \ldots, a_n) : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ et $f \in \mathscr{O}_n$ vérifient $f \circ a \in A_n$, on a $f \in A_n$;*

3° *si $f \in A_n$, $g \in \mathscr{O}_n$ et $a \in \mathscr{P}_n \setminus \{0\}$ vérifient $f = a.g$, on a $g \in A_n$.*

Soit $f \in A_n$ et soit $\Pi \in \mathscr{N}_n$ un germe de Nash distingué d'ordre p en la variable z_n (i. e. $\Pi(0; z_n) = \alpha_n z_n^p + \ldots$, avec $\alpha_n \neq 0$). Si $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$, on a

$$f(z) = q(z)\Pi(z) + \textstyle\sum_{i=1}^{p} g_i(z')\, z_n^{p-i},$$

avec $q \in A_n$ et $g_i \in A_{n-1}$. Une telle décomposition est unique.

Preuve. — Posons $y = (y_1, \ldots, y_p)$. Soit

$$\Gamma(z_n; y) = z_n^p + y_1 z_n^{p-1} + \ldots + y_p$$

le polynôme générique en z_n de degré p. Considérons l'application a :

$$C^{n+p} \ni (z, \xi) \to (z, s(\xi)) \in \mathbf{C}^{n+p},$$

où les composantes de s sont au signe près, les fonctions symétriques élémentaires de $\xi_1, \ldots, \xi_p$ de telle sorte que

$$\Gamma \circ a(z_n; \xi) = (z_n - \xi_1) \ldots (z_n - \xi_p).$$

Soit $f \in A_n$; alors $g = f \circ a \in A_{n+p}$ d'après le 1°. En outre, si $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$:

$$g(z'; z_n; \xi) - g(z'; \xi_1; \xi) = (z_n - \xi_1) g_1(z'; z_n; \xi)$$

et $g(z'; \xi_1; \xi)$, g_1 appartiennent à A_{n+p} d'après 1° et 3°. En recommençant avec g_1, puis en itérant, on voit que

$$g(z; \xi) = q(z; \xi)(z_n - \xi_1) \ldots (z_n - \xi_p) + \textstyle\sum_{i=1}^p z_n^{p-i} g_i(z'; \xi), \tag{1.1.4}$$

avec q et $g_i \in A_{n+p}$; q et g_i sont symétriques en ξ; donc $q = Q \circ a$, $g = G_i \circ a$, avec $Q, G_i \in A_{n+p}$, d'après le théorème de Newton pour les germes de fonctions holomorphes et le 2°. D'après (1.1.4) :

$$f(z) = Q(z; y)\Gamma(z_n; y) + \textstyle\sum_{i=1}^p z_n^{p-i} G_i(z'; y) \tag{1.1.5}$$

Π étant distingué d'ordre p en la variable z_n, on a $\Pi P' \neq P$ avec $P' \in \mathcal{N}_n$ inversible et P polynôme distingué en z_n :

$$P(z) = z_n^p + y_1(z') z_n^{p-1} + \ldots + y_p(z').$$

D'après (1.1.5), après substitution $y \to y(z')$:

$$f(z) = Q(z; y(z')) P'(z) \Pi(z) + \textstyle\sum_{i=1}^p G_i(z'; y(z')) z_n^{p-i}.$$

Il suffit de poser

$$q(z) = Q(z; y(z')) P'(z) \quad \text{et} \quad g_i(z') = G_i(z'; y(z')).$$

PROPOSITION 1.2. — *Sous les hypothèses de* 1.1, $\mathcal{O}_n / A_n$ *est un module plat sur* $\mathcal{N}_n$.

Preuve. — $\mathcal{O}_n$ étant un module plat sur $\mathcal{N}_n$, on a, pour tout idéal I de $\mathcal{N}_n$, une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Tor}_1\left(\mathcal{O}_n/A_n, \frac{\mathcal{N}_n}{I}\right) \to \frac{A_n}{I.A_n} \to \frac{\mathcal{O}_n}{I.\mathcal{O}_n}.$$

Donc, $\mathcal{O}_n/A_n$ est un module plat sur $\mathcal{N}_n$ si, et seulement si, pour tout idéal I de $\mathcal{N}_n$:

$$A_n \cap I.\mathcal{O}_n = I.A_n.$$

On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, l'idéal I est principal, et le théorème résulte de (1.1.3). Si $n > 1$, soit $a_1, \ldots, a_q$ une famille de générateurs de I ($I \neq 0$ et $\mathcal{N}_n$). On peut supposer que a_1 est un polynôme distingué de degré p en z_n et que $a_2, \ldots, a_q$ sont des polynômes en z_n de degré $< p$. Soit $b \in A_n$ tel que $b = \sum_{i=1}^q f_i\, a_i, f_i \in \mathcal{O}_n$. Après division de b et $f_2, \ldots, f_q$ par a_1, on peut supposer que b et $f_2, \ldots, f_q$ sont des polynômes en z_n de degré $< q$ (b à coefficients dans A_{n-1}, d'après 1.1). De l'unicité de la décomposition dans le théorème de division, on déduit que f_1 est aussi un polynôme en z_n de degré $< q-1$. Ainsi, à l'idéal I, on a associé un sous-module N de $\mathcal{N}_{n-1}^{2q-1}$, et l'on doit montrer que $N.\mathcal{O}_{n-1} \cap A_{n-1}^{2q-1} = N.A_{n-1}$. Mais ceci résulte de l'hypothèse de récurrence.

COROLLAIRE 1.3. — *Sous les hypothèses de* 1.1, *soit M un sous-module de $\mathcal{N}_n^q$. Alors, $M.\mathcal{O}_n \cap A_n^q = M.A_n$.*

COROLLAIRE 1.4. — *Sous les hypothèses de* 1.1, *A_n est un module plat sur $\mathcal{N}_n$.*

PROPOSITION 1.5. — *Soit $a : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ un morphisme de Nash. Soit M un module de type fini sur $\mathcal{N}_n$ tel que $a_* M$ soit de type fini sur $\mathcal{N}_p$. Sous les hypothèses de* 1.1,

$$1 \otimes a^* : \quad a_* M \otimes_{\mathcal{N}_p} A_p \to M \otimes_{\mathcal{N}_n} A_n$$

est un isomorphisme.

Preuve. — On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} a_* M \otimes_{\mathcal{N}_p} \mathcal{O}_p & \xrightarrow{\sim} & M \otimes_{\mathcal{N}_n} \mathcal{O}_n \\ \uparrow & & \uparrow \\ a_* M \otimes_{\mathcal{N}_p} A_p & \xrightarrow{1 \otimes a^*} & M \otimes_{\mathcal{N}_n} A_n \end{array}$$

Les deux flèches verticales sont injectives d'après 1.2, donc $1 \otimes a^*$ est injective. En décomposant a à l'aide de son graphe, on voit qu'il suffit de démontrer la surjectivité de $1 \otimes a^*$ lorsque a est une immersion ou lorsque a est la submersion $(\mathbf{C}^n, 0) \ni (z', z_n) \to z' \in (\mathbf{C}^{n-1}, 0)$. Le cas d'une immersion est trivial, car alors $a^* : A_p \to A_n$ est surjectif.

Reste à examiner la submersion $a : (z', z_n) \to z'$. Soit $m_1, \ldots, m_p$ une famille de générateurs de $a_* M$ sur $\mathcal{N}_{n-1}$. On a, pour $i = 1, \ldots, p$:

$$z_n . m_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} m_j, \qquad a_{ij} \in \mathcal{N}_{n-1}.$$

Si P est le déterminant de la matrice $| \delta_{ij} z_n - a_{ij} |$, on a $P . m_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, p$. Soit $m = \sum_{i=1}^{p} m_i \otimes b_i \in M \otimes_{\mathcal{N}_n} A_n$; d'après le théorème de division 1.1 :

$$b_i = P . q_i + \sum_{j=1}^{p} g_{ij} z_n^{p-j},$$

avec $g_{ij} \in A_{n-1}$ et $q_i \in A_n$. D'où :

$$m = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} z_n^{p-j} m_i \otimes g_{ij},$$

si m' désigne la somme $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} z_n^{p-j} m_i \otimes g_{ij}$ calculée dans $a_* M \otimes_{\mathcal{N}_{n-1}} A_{n-1}$, on a évidemment :

$$1 \otimes a^* (m') = m,$$

C.Q.F.D.

1.6. Soit X le germe en un point d'un ensemble de Nash complexe non nécessairement réduit. Soient $X \subsetneq (\mathbf{C}^n, 0)$, $X \subsetneq (\mathbf{C}^p, 0)$ deux plongements de X; soit I (resp. J) l'idéal de $\mathcal{N}_n$ (resp. $\mathcal{N}_p$) formé des germes nuls sur X. On a un isomorphisme $\mathcal{N}_n / I \sim \mathcal{N}_p / J$; sous les hypothèses de 1.1, d'après 1.5, on a donc un isomorphisme $A_n / I . A_n \sim A_p / J . A_p$. Ainsi, $A_n / I . A_n$ est indépendant du plongement $X \subsetneq (\mathbf{C}^n, 0)$ choisi; nous désignerons cet anneau par A_X. D'après 1.2, A_X est un sous-anneau de $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_n / I . \mathcal{O}_n$.

PROPOSITION 1.7. — *On suppose que la famille A_n vérifie les conditions suivantes :*

1° *si $a : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ a ses composantes dans A_n et si $f \in A_p$, $f \circ a \in A_n$;*

2° *si $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{P}_n$ forment un système de paramètres de $\mathcal{N}_n$ et si $a = (a_1, \ldots, a_n) : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ et $f \in \mathcal{O}_n$ vérifient $f \circ a \in A_n$, on a $f \in A_n$;*

3° *si* $a_1, \ldots, a_n \in A_n$ *forment un système régulier de paramètres de* $\mathcal{O}_n$, *les fonctions inverses* $b_1, \ldots, b_n$ ($b_i \circ a = z_i$ *pour* $i = 1, \ldots, n$) *appartiennent à* A_n;

4° A_n *est un anneau local, i. e. si* $a \in A_n$ *et* $a(0) \neq 0$, $a^{-1} \in A_n$;

5° *si* $f \in A_n$, $g \in \mathcal{O}_n$ *et* $a \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}$ *vérifient* $f = a.g$, *on a* $g \in A_n$.

Alors, A_n *est un anneau local régulier de dimension n. En outre, les anneaux* A_n *vérifient le théorème des fonctions implicites et le théorème de préparation.*

Preuve. — D'après 1° et 3°, le théorème des fonctions implicites est vrai pour les anneaux A_n. Les conditions 1°, 2° et 5° entraînent celles de la proposition 1.1. On sait donc diviser $\Pi \in A_n$ par le polynôme générique : $\Gamma(z_n; y) = z_n^p + \sum_{i=1}^p y_i z_n^{p-1}$:

$$\Pi(z) = \Gamma(z_n; y).Q(z; y) + \sum_{i=1}^p G_i(z'; y) z_n^{p-i},$$

avec $Q \in A_{n+p}$; $G_i \in A_{n+p-1}$. Si Π est distingué d'ordre p en la variable z_n on vérifie que

$$Q(0; 0) \neq 0; \; G_i(0; 0) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, p;$$

en outre, le jacobien des G_i par rapport aux y_j est $\neq 0$ en (0, 0). Ainsi, par le théorème des fonctions implicites, il existe

$$y_1(z'), \ldots, y_p(z') \in A_{n-1}, \; y_i(0) = 0,$$

tels que

$$\Pi(z) = \Gamma(z_n; y(z')).Q(z; y(z')).$$

D'après le 4°, $Q(z; y(z'))$ est inversible dans A_n. Ainsi, $\Pi(z)$ est équivalent dans A_n au polynôme distingué $\Gamma(z_n; y(z'))$. On sait diviser $f \in A_n$ par $\Gamma(z_n; y)$. donc par $\Gamma(z_n; y(z'))$ après substitution $y \to y(z')$ (ceci est possible d'après le 1°), donc par $\Pi(z)$. Ainsi :

$$f(z) = q(z).\Pi(z) + \sum_{i=1}^p g_i(z') z_n^{p-i},$$

avec $q(z) \in A_n$ et $g_i(z') \in A_{n-1}$, pour $i = 1, \ldots$, p. Une telle décomposition est évidemment unique.

Du théorème de préparation, on déduit que A_n est un anneau local noethérien; les inclusions $\mathcal{N}_n \subset A_n \subset \mathcal{O}_n$ entraînent

$$\hat{A}_n = \hat{\mathcal{O}}_n = \mathbf{C}[[z_1, \ldots, z_n]].$$

Le complété de A_n étant régulier de dimension n, il en est de même de A_n.

Les conséquences de 1.7 sont nombreuses. Signalons les deux suivantes :

COROLLAIRE 1.8. — *Sous les hypothèses de* 1.7, $\mathcal{O}_n/A_n$ *et* $\mathcal{O}_n$ *sont des modules plats sur* A_n.

COROLLAIRE 1.9. — *Sous les hypothèses de* 1.7, *soit*

$$a : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$$

un morphisme à composantes dans A_n, *et soit* M *un module de type fini sur* A_n. *Le module* $a_* M$ *est de type fini sur* A_p *si, et seulement si,* $a_* M/\mathfrak{m}_p . a_* M$ *est de dimension finie sur* $\mathbf{C}$ ($\mathfrak{m}_p$: *idéal maximal de* A_p).

2. Les anneaux de Bernstein $\mathscr{B}_n^{(i)}$

2.1. Soit A_n une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{O}_n$ stable par dérivation (donc $1 \in A_n$; si $f \in A_n$, $\partial_i f \in A_n$ pour $i = 1, \ldots, n$). On note $\mathscr{B}(A_n)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{O}_n$ qui vérifient les deux conditions suivantes, visiblement équivalentes :

1° la dimension $\nu_{A_n}(f)$ (ou $\nu(f)$ si aucune confusion n'est à redouter) de l'espace vectoriel, engendré sur $[A_n]$ par les $\partial^\omega f$, $\omega \in \mathbf{N}^n$, est finie;

2° il existe un entier $p \geqslant 0$, $a \in A_n \setminus \{ 0 \}$, des $b_{i,\omega} \in A_n$ tels que

$$a . \frac{\partial^p f}{\partial z_i^p} = \sum\nolimits_{|\omega| < p} b_{i,\omega} \partial^\omega f, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

On vérifie immédiatement les inégalités suivantes, si $f, g \in \mathcal{O}_n$:

$$\nu(f+g) \leqslant \nu(f) + \nu(g); \qquad \nu(fg) \leqslant \nu(f) . \nu(g); \qquad \nu(\partial_i f) \leqslant \nu(f)$$
$$\text{pour} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Il en résulte que $\mathscr{B}(A_n)$ est une algèbre unitaire stable par dérivation et contenant A_n. On pose $\mathscr{B}^{(0)}(A_n) = A_n$; $\mathscr{B}^{(1)}(A_n) = \mathscr{B}(A_n)$; et par récurrence $\mathscr{B}^{(i+1)}(A_n) = \mathscr{B}(\mathscr{B}^{(i)}(A_n))$; $\mathscr{B}^*(A_n) = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \mathscr{B}^{(i)}(A_n)$. Nous dirons que $\mathscr{B}(A_n)$ *est l'anneau de Bernstein de* A_n.

Soit $\mathscr{N}(A_n)$ la sous-algèbre de $\mathcal{O}_n$ (visiblement unitaire et stable par dérivation) formée des $f \in \mathcal{O}_n$ qui sont algèbriques sur $[A_n]$.

LEMME 2.2. — *Avec les notations précédentes,* $\mathscr{B}(\mathscr{N}(A_n)) = \mathscr{B}(A_n)$.

Preuve. — Bien entendu, $\mathscr{B}(A_n) \subset \mathscr{B}(\mathscr{N}(A_n))$. Réciproquement, soit $f \in \mathscr{B}(\mathscr{N}(A_n))$. Il existe un entier p, $a \in \mathscr{N}(A_n) \setminus \{ 0 \}$ et des $b_{i,\omega} \in \mathscr{N}(A_n)$ tels que

$$a . \frac{\partial^p f}{\partial z_i^p} = \sum\nolimits_{|\omega| < p} b_{i,\omega} \partial^\omega f, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Soit K le corps engendré sur $[A_n]$ par a et les $b_{i,\omega}$: K est une extension finie de $[A_n]$ contenant toutes les dérivées de a et des $b_{i,\omega}$. En dérivant les relations précédentes, on voit que l'espace vectoriel engendré sur K par les $\partial^\omega f$, $\omega \in \mathbf{N}^n$, est de dimension finie sur K, donc de dimension finie sur $[A_n]$. Ainsi $f \in \mathscr{B}(A_n)$.

C.Q.F.D.

LEMME 2.3. — *Soient $f \in \mathscr{B}(A_n)$, $a \in A_n \setminus \{0\}$ et $g \in \mathcal{O}_n$ tels que $f = a.g$. Alors $g \in \mathscr{B}(A_n)$.*

Preuve. — Elle est évidente.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit A_n une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{O}_n$, stable par dérivation.

LEMME 2.4. — *Soit $a : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ un morphisme dont les cumposantes a_i appartiennent à A_n, et supposons que $a^*(A_p) \subset A_n$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{O}_p$, on a l'inégalité : $\nu_{A_n}(f \circ a) \leqslant \nu_{A_p}(f)$. En particulier, $a^*(\mathscr{B}(A_p)) \subset \mathscr{B}(A_n)$.*

Preuve. — Soit $f \in \mathcal{O}_p$ telle que $\nu_{A_p}(f) = s < \infty$. L'espace vectoriel sur $[A_n]$ engendré par les $\partial^\omega(f \circ a)$ est contenu dans l'espace vectoriel sur $[A_n]$ engendré par les $\partial^\omega f \circ a$. Il suffit donc de montrer le résultat suivant : soient $g_1, \ldots, g_{s+1} \in \mathcal{O}_p$ linéairement dépendantes sur $[A_p]$; alors $g_1 \circ a, \ldots, g_{s+1} \circ a$ sont linéairement dépendantes sur $[A_n]$. Soit $\sum_{i=1}^{s+1} \Theta_i g_i = 0$ une relation, $\Theta_i \in A_p$, et l'un des Θ_i est $\neq 0$. Soit $\mu \in \mathbf{N}^p$ un multi-indice tel que :

(i) il existe un indice i avec $\partial^\mu \Theta_i \circ a \neq 0$;

(ii) pour tout i et tout $\omega \in \mathbf{N}^p$, $|\omega| < |\mu|$, $\partial^\omega \Theta_i \circ a = 0$ (un tel μ existe certainement).

Visiblement,

$$0 = \partial^\mu(\textstyle\sum_{i=1}^{s+1} \Theta_i g_i) \circ a = \sum_{i=1}^{s+1} (\partial^\mu \Theta_i \circ a)(g_i \circ a).$$

Ainsi, $g_1 \circ a, \ldots, g_{s+1} \circ a$ sont linéairement dépendantes sur $[A_n]$.

C.Q.F.D.

LEMME 2.5. — *Soit $a : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ un morphisme dont les composantes a_i appartiennent à A_n, et forment un système de paramètres de $\mathcal{O}_n$. On suppose que $a^*(A_p) \subset A_n$, et qu'il existe $e_1, \ldots, e_q \in A_n$ formant une base de $a_*(A_n)$ sur A_n et de $a_*(\mathcal{O}_n)$ sur $\mathcal{O}_n$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{O}_n$, on a l'égalité : $\nu_{A_n}(f \circ a) = \nu_{A_n}(f)$. En particulier, $f \in \mathscr{B}(A_n)$ si, et seulement si $f \circ a \in \mathscr{B}(A_n)$.*

Preuve. — Le jacobien $D(a_1, \ldots, a_n)/D(z_1, \ldots, z_n)$ est $\neq 0$; ainsi, l'espace vectoriel engendré sur $[A_n]$ par les $\partial^\omega f \circ a$ est égal à l'espace vectoriel engendré sur $[A_n]$ par les $\partial^\omega (f \circ a)$. Compte tenu de 2.4, il suffit de montrer le résultat suivant : soient $g_1, \ldots, g_{s+1} \in \mathcal{O}_n$ telles que $g_1 \circ a, \ldots, g_{s+1} \circ a$ soient linéairement dépendantes sur $[A_n]$; alors $g_1, \ldots, g_{s+1}$ sont linéairement dépendantes sur $[A_n]$. Soit $\sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i g_i \circ a = 0$ une relation, $\alpha_i \in A_n$, et l'un des α_i est $\neq 0$. Alors :

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{q} (\alpha_{ij} \circ a) . e_j, \qquad \alpha_{ij} \in A_n;$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{q} (\sum_{i=1}^{s+1} (\alpha_{ij} g_i) \circ a) e_j = 0$$

et donc, pour $j = 1, \ldots, q$, $\sum_{i=1}^{s+1} \alpha_{ij} g_i = 0$.

L'un des α_{ij} étant non nul, il existe une relation non triviale entre les g_i.

C.Q.F.D.

On pose

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(\mathcal{P}_n); \qquad \mathcal{B}_n^{(i)} = \mathcal{B}^{(i)}(\mathcal{P}_n); \qquad \mathcal{B}_n^* = \mathcal{B}^*(\mathcal{P}_n).$$

LEMME 2.6. — *Soit* $a : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ *un morphisme dont les composantes appartiennent à* $\mathcal{B}_n^{(i)}$. *Si* $f \in \mathcal{B}_p^{(j)}$, *on a* $f \circ a \in \mathcal{B}_n^{(i+j)}$.

Preuve. — On procède par récurrence sur j. Si $j = 0$, f est un polynôme, et $f \circ a \in \mathcal{B}_n^{(i)}$. Supposons que $a^* \mathcal{B}_p^{(j)} \subset \mathcal{B}_n^{(i+j)}$; alors, d'après 2.4 : $a^* \mathcal{B}_p^{(j+1)} \subset \mathcal{B}_n^{(i+j+1)}$.

THÉORÈME 2.7. — *Les anneaux* $A_n = \mathcal{B}_n^{(i)}$ (i fixé > 0) *et* $A_n = \mathcal{B}_n^*$ *vérifient les conditions* 1°, 2°, 3° *de la proposition* 1.1. *Les propositions* 1.1, ..., 1.5, *s'appliquent donc à ces anneaux.*

Preuve. — Visiblement, si les conditions 1°, 2°, 3° sont vérifiées par les anneaux $A_n = \mathcal{B}_n^{(i)}$, pour chaque i fixé, elles sont vérifiées par $A_n = \mathcal{B}_n^*$.

Pour tout $i > 0$, on a $\mathcal{B}_n^{(i)} \supset \mathcal{B}_n = \mathcal{B}(\mathcal{N}_n) \supset \mathcal{N}_n$, d'après 2.2. D'après 2.3, la condition 3° est satisfaite par les $A_n = \mathcal{B}_n^{(i)}$.

La condition 1° est vérifiée par $A_n = \mathcal{B}_n$, d'après 2.4. Procédant par récurrence sur i, on voit qu'elle est aussi vérifiée par $A_n = \mathcal{B}_n^{(i)}$, toujours d'après 2.4.

Enfin, la condition 2° est vérifiée par $\mathcal{B}_n$, ceci d'après le lemme 2.5 appliqué à $A_n = \mathcal{N}_n$. Supposons la condition 2° vérifiée par $A_n = \mathcal{B}_n^{(j)}, j \leqslant i$. La proposition 1.1 est alors vérifiée par les $A_n = \mathcal{B}_n^{(i)}$, de même que la proposition 1.5. Si les composantes $a_1, \ldots, a_n$ de $a : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$

forment un système de paramètres de $\mathcal{N}_n$, il existe $e_1, \ldots, e_q \in \mathcal{N}_n$ formant une base de $a_* \mathcal{N}_n$ sur $\mathcal{N}_n$ et une base de $a_* \mathcal{O}_n$ sur $\mathcal{O}_n$. D'après 1.5, les $e_1, \ldots, e_q$ forment aussi une base de $a_* \mathcal{B}_n^{(i)}$ sur $\mathcal{B}_n^{(i)}$. D'après 2.5, si $f \in \mathcal{O}_n$ vérifie $f \circ a \in \mathcal{B}_n^{(i+1)}$, on a $f \in \mathcal{B}_n^{(i+1)}$. Ceci démontre, par récurrence sur i, la condition 2° pour $\mathcal{B}_n^{(i)}$.

L'anneau $\mathcal{B}_n^*$ vérifie quelques propriétés supplémentaires résumées dans la proposition suivante :

PROPOSITION 2.8 :

1° *$\mathcal{B}_n^*$ est le plus petit ensemble B de $\mathcal{O}_n$ contenant $\mathcal{P}_n$ et vérifiant la condition suivante : si $f \in \mathcal{O}_n$ est solution d'un système :*

$$a \cdot \frac{\partial^p f}{\partial z_i^p} = \sum_{|\omega| < p} b_{i,\omega} \partial^\omega f, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

avec

$$a \in B \backslash \{0\} \qquad et \qquad b_{i,\omega} \in B,$$

on a $f \in B$;

2° $\mathcal{B}(\mathcal{B}_n^*) = \mathcal{N}(\mathcal{B}_n^*) = \mathcal{B}_n^*$;

3° *si $f = a.g$, $f \in \mathcal{B}_n^*$, $a \in \mathcal{B}_n^*$ et $g \in \mathcal{O}_n$, on a $g \in \mathcal{B}_n^*$.*

En particulier, $\mathcal{B}_n^*$ est un anneau local;

4° *si $a : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ a ses composantes dans $\mathcal{B}_n^*$ et si $f \in \mathcal{B}_p^*$, on a : $f \circ a \in \mathcal{B}_n^*$.*

Preuve. — Le 1° résulte de la définition même de $\mathcal{B}_n^* = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \mathcal{B}_n^{(i)}$; le 2° résulte du lemme 2.2; le 3° résulte de 2.3 et le 4° résulte de 2.6.

Les anneaux $A_n = \mathcal{B}_n^*$ vérifient donc toutes les conditions de la proposition 1.7 sauf la condition 3° (théorème des fonctions implicites).

Soit $A_n(\mathbf{C})$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{P}_n$. Pour tout module à gauche de type fini, et $\neq 0$, M sur $A_n(\mathbf{C})$, on a $n \leqslant \dim M \leqslant 2n$; M est un module de Bernstein si $M = 0$ ou $\dim M = n$ (*cf.* [1]). La proposition suivante fournit diverses caractérisations des éléments de $\mathcal{B}_n$.

PROPOSITION 2.9. — *Soit $f \in \mathcal{O}_n$; $f \in \mathcal{B}_n$ si, et seulement si, les conditions suivantes (équivalentes) sont satisfaites :*

1° *l'espace vectoriel engendré sur $[\mathcal{P}_n]$ (ou sur $[\mathcal{N}_n]$) par les $\partial^\omega f$, $\omega \in \mathbf{N}^n$, est de dimension finie sur $[\mathcal{P}_n]$ (ou sur $[\mathcal{N}_n]$);*

2° *il existe un entier $p \geqslant 0$, a, $b_{i,\omega} \in \mathcal{P}_n$ (ou $\in \mathcal{N}_n$), $a \neq 0$, tels que*

$$a \cdot \frac{\partial^p f}{\partial z_i^p} = \sum_{|\omega| < p} b_{i,\omega} \partial^\omega f, \qquad pour \quad i = 1, \ldots, n;$$

3° *$A_n(C).f$ est un module de Bernstein sur $A_n(C)$.*

Preuve. — D'après 2.2, les conditions 1° et 2° signifient l'une et l'autre que $f \in \mathscr{B}_n$. Le 3° entraîne le 2°, d'après BERNSTEIN (*cf.* [1]).

2° $\Rightarrow$ 3° : cela résulte du fait que tout polynôme $P \in \mathscr{P}_n$ n'est pas diviseur de zéro pour $A_n(\mathbf{C}).f \subset \mathscr{O}_n$. Plus précisément. soit r la borne supérieure des degrés des polynômes a, $b_{i,\omega}$. En dérivant les relations 2°, on a, pour tout multi-indices μ, $|\mu|$ assez grand :

$$\partial^\mu f = \sum_{|\omega|<p} \frac{C\mu,\omega}{a^{|\mu|-p+1}} \partial^\omega f,$$

où $C_{\mu,\omega} \in \mathscr{P}_n$ et $\deg C_{\mu,\omega} \leqslant (|\mu|-p+1)\, r$. Donc, si $\mu' \in \mathbf{N}^n$ et

$$|\mu|+|\mu'| = v,$$

$$z^{\mu'}.\partial^\mu f = \sum_{|\omega|<p} \frac{d\mu',\mu,\omega}{a^{v-p+1}} \partial^\omega f,$$

où $d_{\mu',\mu,\omega} \in \mathscr{P}_n$ et $\deg d_{\mu',\mu,\omega} \leqslant v\,(r+1)$ pour $|\mu|$ assez grand. Soit T_v le sous-espace de $A_n(\mathbf{C})$ formé des opérateurs de degré total $\leqslant v$; soit ρ_w la dimension de l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ formé des $P \in \mathscr{P}_n$, $\deg P \leqslant w$ Visiblement, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \geqslant 0$: $\dim_{\mathbf{C}} T_v.f \leqslant C\,\rho_{v\,(r+1)}$; ainsi, pour v assez grand, $\dim_{\mathbf{C}} T_v.f$ est un polynôme en v de degré $\leqslant n$, i. e. $A_n(\mathbf{C}).f$ est un module de Bernstein.

Remarque 2.10. — Soit $f \in \mathscr{B}_n$. Soit $L(f)$ l'idéal à gauche de $A_n(\mathbf{C})$, formé des opérateurs D tels que $D.f = 0$. Si $z \in \mathbf{C}^n$, soit $\mathscr{P}_z$ le localisé de $\mathscr{P}_n$ en z, et soit $\mathscr{O}_z$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes en z. Désignons par $\mathscr{P}_z[\partial]$, $\mathscr{O}_z[\partial]$ les anneaux d'opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathscr{P}_z$ et $\mathscr{O}_z$ respectivement. Enfin, soit $\nu(f)$ la dimension sur $[\mathscr{P}_n]$ de l'espace vectoriel engendré sur $[\mathscr{P}_n]$ par les $\partial^\omega f$, $\omega \in \mathbf{N}^n$.

Soit X_f l'ensemble des $z \in \mathbf{C}^n$ tels que $\mathscr{P}_z[\partial]/\mathscr{P}_z[\partial].L(f)$ ne soit pas un module de type fini sur $\mathscr{P}_z$. On voit facilement que X_f est une variété algébrique fermée de $\mathbf{C}^n$ et que $X_f \neq \mathbf{C}^n$ (1). En chaque point, $z \in \mathbf{C}^n \setminus X_f$, $\mathscr{P}_z[\partial]/\mathscr{P}_z[\partial].L(f)$ est un module de type fini sur $\mathscr{P}_z$, donc un module *libre* de type fini sur $\mathscr{P}_z$, d'après un résultat classique (*cf.* [1], chap. III). On vérifie alors que la dimension de ce module libre est constante sur $\mathbf{C}^n \setminus X_f$ et égale à $\nu(f)$.

(1) Si $X_f \neq \varnothing$, X_f est toujours une hypersurface, i. e. X_f est définie par une seule équation $P=0$, $P \in \mathscr{P}_n$.

Pour tout $z \in \mathbf{C}^n - X_f$, $\mathcal{O}_z[\partial]/\mathcal{O}_z[\partial].L(f) = \mathcal{O}_z[\partial]/L_z(f)$ est donc un module libre de rang $\nu(f)$ sur $\mathcal{O}_z$. Soit $S_z(f)$ l'espace vectoriel des solutions de $L_z(f)$, i. e. $S_z(f) = \{ g \in \mathcal{O}_z ; D.g = 0 \text{ pour tout } D \in L_z(f) \}$. D'après [1], chapitre III,

$$\dim_{\mathbf{C}} S_z(f) = \nu(f).$$

Il en résulte facilement que f se prolonge analytiquement le long de tout chemin contenu dans $\mathbf{C}^n \setminus X_f$; en outre, si f_z est l'un des germes en $z \in \mathbf{C}^n \setminus X_f$ obtenu par prolongement analytique de f, $f_z \in S_z(f)$.

Remarques 2.11.

(2.11.1) $\mathcal{B}_n$ n'est pas local et n'est pas noethérien. Exemple, dû à LENGYEL, pour $n = 1$: si $\lambda \in C \setminus \{ 0 \}$, $\cos \lambda z \in \mathcal{B}_1$, mais $(\cos \lambda z)^{-1} \notin \mathcal{B}_1$, donc $\mathcal{B}_1$ n'est pas local. En outre, la suite $(\sin (z/2^p))$ est une suite croissante d'idéaux qui n'est pas stationnaire, donc $\mathcal{B}_1$ n'est pas noethérien.

(2.11.2) Le théorème des fonctions implicites n'est pas vrai dans $\mathcal{B}_n$: par exemple, arc tg $z \in \mathcal{B}_1$ mais tg $z \notin \mathcal{B}_1$. Il est sans doute faux dans $\mathcal{B}_n^*$, mais je n'ai pas de contre-exemple.

(2.11.3) $e^z \in \mathcal{B}_1$, mais $e^{e^z} \in \mathcal{B}_1^{(2)} \setminus \mathcal{B}_1$; plus généralement, le germe e^{0i} l'exponentielle composée $(i-1)$ fois avec elle-même) appartient à $\mathcal{B}_1^{(i)} \setminus \mathcal{B}_1^{(i-1)}$.

(2.11.4) Si $P \in \mathcal{P}_n$, $P \neq 0$, on note $m(P)$ (resp. $M(P)$) la borne inférieure (resp. la borne supérieure) des degrés des monômes qui interviennent dans P. Une série $f = \sum_\omega a_\omega z^\omega \in \mathcal{O}_n$ étant supposée *lacunaire*, on peut, après regroupement des monômes $a_\omega z^\omega$, l'écrire sous la forme $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$, avec $P_i \in \mathcal{P}_n \setminus \{ 0 \}$ et, pour tout $i \geqslant 0$, $m(P_{i+1}) \geqslant M(P_i) + i$. *Une série lacunaire n'appartient jamais à* $\mathcal{B}_n$: en effet, si f est solution du système d'équations aux dérivées partielles 2.9.2, tous les P_i, pour i assez grand, sont solutions du même système, ce qui est absurde puisque l'espace des solutions est de dimension finie sur $\mathbf{C}$.

Soit X un germe d'ensemble de Nash, réduit ou non. D'après 1.6 et le théorème 2.7, on sait définir les anneaux $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_X^{(i)}$ et $\mathcal{B}_X^*$: ce sont des sous-anneaux de $\mathcal{O}_X$. Si X est un germe irréductible, on a une caractérisation de $\mathcal{B}_X$ analogue à celle de $\mathcal{B}_n$. Soit $\mathrm{Der}_{\mathbf{C}} [\mathcal{N}_X]$ l'ensemble des $\mathbf{C}$-dérivations de $[\mathcal{N}_X]$ dans lui-même : une telle $\mathbf{C}$-dérivation se prolonge de manière unique en une $\mathbf{C}$-dérivation de $[\mathcal{O}_X]$ dans lui-même.

THÉORÈME 2.12. — *Si $f \in \mathcal{O}_X$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° $f \in \mathcal{B}_X$;

2° *l'espace vectoriel sur* $[\mathcal{N}_X]$, *engendré par tous les* $D_1 \ldots D_s f$, $s \in \mathbf{N}$, *et* $D_i \in \mathrm{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_X]$, *est de dimension finie sur* $[\mathcal{N}_X]$.

Preuve. — Soit p la dimension de X, et plongeons X dans $(\mathbf{C}^n, 0)$, d'où un isomorphisme $\mathcal{N}_X \sim \mathcal{N}_n/I$. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées sur $\mathbf{C}^n$, on peut supposer (*cf.* [2]) :

(i) si $\mathcal{N}_p$ désigne l'anneau des germes de fonctions de Nash en les variables $z_1, \ldots, z_p$, l'application $\mathcal{N}_p \to \mathcal{N}_X$ est injective, et $\mathcal{N}_X$ est un module de type fini sur $\mathcal{N}_p$; en outre, $\bar{z}_{p+1} = z_{p+1} \bmod I$ est un générateur de $[\mathcal{N}_X]$ sur $[\mathcal{N}_p]$;

(ii) si $Z^q + \sum_{i=1}^q \Theta_i Z^{q-i}$ est le polynôme minimal de $\bar{z}_{p+1}$, on a $\Theta_i \in \mathcal{N}_p$ (*a priori* $\Theta_i \in [\mathcal{N}_p]$);

(iii) si δ est le discriminant de ce polynôme minimal, $\delta \in \mathcal{N}_p \setminus \{0\}$, et pour tout $\xi \in \mathcal{O}_X$, il existe $b_1, \ldots, b_q \in \mathcal{O}_p$ tels que $\delta . \xi = \sum_{j=1}^q b_j \bar{z}_{p+1}^{q-j}$

(iv) pour tout $i = p+1, \ldots, n$, il existe un polynôme $P_i \in I$, distingué en z_i, à coefficients germes de fonctions de Nash des variables $z_1, \ldots, z_{i-1}$.

Soit $\mathcal{B}'_X$ le sous-ensemble de $\mathcal{O}_X$ formé des germes qui vérifient la condition 2° du théorème. Les remarques suivantes sont à peu près évidentes :

(v) $\mathcal{B}'_X$ est un anneau contenant $\mathcal{N}_X$ et $\mathcal{B}_p$;

(vi) Soit $\mathrm{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_p]$ l'ensemble des $\mathbf{C}$-dérivations de $[\mathcal{N}_p]$ dans lui-même : une telle $\mathbf{C}$-dérivation se prolonge de manière unique en une $\mathbf{C}$-dérivation de $[\mathcal{O}_X]$ dans lui-même. Si $f \in \mathcal{O}_X$, on a $f \in \mathcal{B}'_X$ si, et seulement si, l'espace vectoriel sur $[\mathcal{N}_p]$ engendré par tous les $D_1, \ldots, D_s f$, $s \in \mathbf{N}$ et $D_i \in \mathrm{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_p]$ est de dimension finie (immédiat, car

$$\mathrm{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_X] = \mathrm{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_p] \otimes_{[\mathcal{N}_p]} [\mathcal{N}_X]$$

est de dimension finie sur $[\mathcal{N}_p]$).

Preuve de $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{B}'_X$. — Soit $f \in \mathcal{B}_n$. Par divisions successives par les polynômes $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_{p+1}$ (*cf.* (iv) et 2.7), on voit qu'il existe $g \in I . \mathcal{B}_n$ telle que

$$f - g = \sum a_{\omega_1 \ldots \omega_{n-p}} z_{p+1}^{\omega_1} \ldots z_n^{\omega_{n-p}},$$

où la somme est finie, et $a_{\omega_1 \ldots \omega_{n-p}} \in \mathcal{B}_p$. Donc, mod $I . \mathcal{B}_n$:

$$\bar{f} = \sum a_{\omega_1 \ldots \omega_{n-p}} \bar{z}_{p+1}^{\omega_1} \ldots \bar{z}_n^{\omega_{n-p}}.$$

D'après (v), $\bar{f} \in \mathcal{B}'_X$; d'où l'inclusion : $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{B}'_X$.

Preuve de $\mathcal{B}'_X \subset \mathcal{B}_X$. — Il existe un corps K, extension finie de $[\mathcal{O}_X]$, dans lequel l'équation $Z^q + \sum_{i=1}^q \Theta_i Z^{q-i} = 0$ admet q racines distinctes $\bar{z}_{p+1} = x_1, x_2, \ldots, x_q$; des $[\mathcal{O}_p]$-automorphismes $\sigma_1 = \mathrm{id}, \sigma_2, \ldots, \sigma_q$

de K tels que pour tout i, $\sigma_i(x_1) = x_i$. Tout élément de $\mathrm{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_p]$ se prolonge de manière unique en une $\mathbf{C}$-dérivation de K dans lui-même. Si $\xi \in K$, désignons par E_ξ l'espace vectoriel sur $[\mathcal{N}_p]$ engendré par les $D_1 \ldots D_s \xi$, où $s \in \mathbf{N}$, et $D_i \in \mathrm{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_p]$; pour tout $i = 1, \ldots, q$, et tout $D \in \mathrm{Der}_{\mathbf{C}}[\mathcal{N}_p]$, on a visiblement $\sigma_i D = D\sigma_i$, d'où $\sigma_i E_\xi = E_{\sigma_i(\xi)}$.

Soit $\xi \in \mathcal{B}'_X$; d'après (iii), il existe $b_1, \ldots, b_q \in \mathcal{O}_p$ tels que

$$\delta.\xi = \textstyle\sum_{j=1}^q b_j . z_{p+1}^{q-j},$$

d'où pour tout $i = 1, \ldots, q$:

$$\delta.\sigma_i(\xi) = \textstyle\sum_{j=1}^q b_j . x_i^{q-j}.$$

Remarquons que $\delta = (\det | x_i^{q-j} |)^2$. En résolvant ce système par rapport aux b_j, on trouve que b_j est un polynôme à coefficients entiers en les $\sigma_i(\xi)$, et $x_i^{q-j} = \sigma_i(\bar{z}_{p+1}^{q-j})$. On a $\xi \in \mathcal{B}'_X$, $\bar{z}_{p+1}^{q-j} \in \mathcal{B}'_X$; d'après (vi), E_ξ et $E_{\bar{z}_{p+1}^{q-j}}$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $[\mathcal{N}_p]$; d'après une remarque antérieure, il en est de même de $E_{\sigma_i(\xi)}$ et $E_{x_i^{q-j}}$, et donc de E_{b_j}, $j = 1, \ldots, q$. Ainsi $b_j \in \mathcal{B}_p$ et $\delta.\xi \in \mathcal{B}_X$.

Soit $f \in \mathcal{O}_n$ telle que $\bar{f} = \xi$. Il existe $b \in \mathcal{B}_n$, $a_1, \ldots, a_s \in I \subset \mathcal{N}_n$, $f_1, \ldots, f_s \in \mathcal{O}_n$ tels que

$$b = f.\delta + \textstyle\sum_{i=1}^s f_i . a_i.$$

D'après 1.3 et 2.7,

$$b = f'.\delta + \textstyle\sum_{i=1}^s f'_i . a_i \qquad \text{avec } f', f'_i \in \mathcal{B}_n.$$

D'où

$$(f-f')\delta + \textstyle\sum_{i=1}^s (f_i - f'_i)\, a_i = 0.$$

Mais δ n'est pas diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_n / I.\mathcal{O}_n$; donc :

$$f - f' \in I.\mathcal{O}_n \qquad \text{et} \qquad \bar{f} = \bar{f'} = \xi \in \mathcal{B}_X.$$

Ainsi, $\mathcal{B}'_X \subset \mathcal{B}_X$,

C.Q.F.D.

Remarques 2.13.

(2.13.1) On a des caractérisations, analogues à celle du théorème 2.12, de $\mathcal{B}_X^{(i)}$ et $\mathcal{B}_X^*$, lorsque X est un germe de Nash irréductible.

(2.13.2) Les résultats de 2.10 s'étendent au cas singulier. Soit $\tilde{X}$ une sous-variété algébrique fermée et irréductible de $\mathbf{C}^n$, contenant l'origine, et soit X le germe de $\tilde{X}$ en 0. Si $f \in \mathcal{B}_X$, il existe une sous-variété $\tilde{Y}$ de $\tilde{X}$ telle que $\dim \tilde{Y} < \dim \tilde{X}$; $\tilde{X} \setminus \tilde{Y}$ est une variété régulière de dimension égale à celle de $\tilde{X}$; enfin, f est prolongeable analytiquement le long de tout chemin situé dans $\tilde{X} \setminus \tilde{Y}$.

3. L'anneau $\mathscr{C}_n$

PROPOSITION 3.1. — *Soit* $f \in \mathcal{O}_n$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *le corps engendré sur* **C** *par les* $\partial^\omega f$, $\omega \in \mathbf{N}^n$, *est de degré de transcendance fini sur* **C**;

2° *il existe un entier* $p \geqslant 0$ *et des polynômes* $P_1(X), \ldots, P_n(X)$ *non identiquement nuls, à coefficients dans l'anneau* $\mathbf{C}[\partial^\omega f]$, avec $|\omega| < p$, *tels que, pour* $i = 1, \ldots, n$,

$$P_i\left(\frac{\partial^p f}{\partial z_i^p}\right) = 0.$$

Preuve. — Elle est immédiate et laissée au lecteur.

PROPOSITION 3.2. — *Soit* $\mathscr{C}_n$ *l'ensemble des* $f \in \mathcal{O}_n$ *qui vérifient les conditions équivalentes de la proposition* 3.1. $\mathscr{C}_n$ *est un anneau local unitaire et* $\mathscr{C}_n$ *est stable par dérivation.*

Preuve. — Elle est immédiate et laissée au lecteur.

PROPOSITION 3.3. — *Soit* $f \in \mathcal{O}_n$. *Supposons qu'il existe un entier* $p \geqslant 0$, *des polynômes* $P_1(X), \ldots, P_n(X)$ *non identiquement nuls, à coefficients dans l'anneau* $\mathscr{C}_n[\partial^\omega f]$, *avec* $|\omega| < p$, *tels que, pour* $i = 1, \ldots, n$, $P_i(\partial^p f/\partial z_i^p) = 0$; *alors* $f \in \mathscr{C}_n$.

Preuve. — Soit Δ le sous-ensemble de $\mathscr{C}_n$ formé des coefficients de tous les polynômes coefficients des $P_i(X)$, $i = 1, \ldots, n$. Soit K le corps engendré sur **C** par les éléments de Δ et toutes leurs dérivées : le degré de transcendance de K sur **C** est fini. En dérivant les relations $P_i(\partial^p f/\partial z_i^p) = 0$, on voit que les $\partial^\omega f$ engendrent sur K un corps dont le degré de transcendance sur K, et donc sur **C**, est fini.

C.Q.F.D

COROLLAIRE 3.4. — $\mathscr{B}_n^* \subset \mathscr{C}_n$.

THÉORÈME 3.5. — *Les anneaux* $A_n = \mathscr{C}_n$ *vérifient les conditions de la proposition* 1.7. *En conséquence, les anneaux* $\mathscr{C}_n$ *sont des anneaux locaux réguliers de dimension n stables par dérivation; les anneaux* $\mathscr{C}_n$ *vérifient le théorème des fonctions implicites et le théorème de préparation.*

Preuve. — Vérifions les conditions 1°, ..., 5° de 1.7.

1° Visiblement, le degré de transcendance sur **C** du corps engendré sur **C** par les $\partial^\mu f \circ a$ est $\leqslant$ au degré de transcendance sur **C** du corps engendré sur **C** par les $\partial^\mu f$.

Soit K le corps engendré sur $\mathbf{C}$ par les $\partial^\mu a_i$, $\omega \in \mathbf{N}^n$ et $i = 1, \ldots, p$: le degré de transcendance de K sur $\mathbf{C}$ est fini. Le corps engendré sur $\mathbf{C}$ par les $\partial^\mu (f \circ a)$ est contenu dans le corps engendré sur K par les $\partial^\mu f \circ a$, corps dont le degré de transcendance sur K, et donc sur $\mathbf{C}$, est fini, d'où le 1°.

2° Le corps engendré sur $[\mathscr{P}_n]$ par les $\partial^\omega (f \circ a)$ est le même que le corps engendré sur $[\mathscr{P}_n]$ par les $\partial^\mu f \circ a$, car le jacobien

$$D(a_1, \ldots, a_n)/D(z_1, \ldots, z_n)$$

est $\neq 0$. Le corps engendré sur $\mathbf{C}$ par les $\partial^\mu f \circ a$ est donc de degré de transcendance fini sur $\mathbf{C}$. L'application $a^* : \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$ étant injective, il en sera de même du corps engendré sur $\mathbf{C}$ par les $\partial^\mu f$.

3° Le corps engendré sur $[\mathscr{P}_n]$ par les $\partial^\omega a_i$ est de degré de transcendance fini sur $\mathbf{C}$. Il en sera de même du corps engendré sur $\mathbf{C}$ par les $\partial^\omega b_i \circ a$, et donc du corps engendré sur $\mathbf{C}$ par les $\partial^\omega b_i$.

Enfin, 4° et 5° résultent de la remarque suivante (évidente) : si $f = a.g$, $f \in \mathscr{C}_n$, $a \in \mathscr{C}_n$ et $g \in \mathcal{O}_n$, on a $g \in \mathscr{C}_n$.

3.6. Les conséquences du théorème 3.5 sont nombreuses. Par exemple, le théorème d'Artin sur les solutions d'un système d'équations analytiques est vrai pour les anneaux $\mathscr{C}_n$. Les anneaux $A_n = \mathscr{C}_n$ vérifient *a fortiori* les hypothèses de la proposition 1.1, donc toutes les propositions du paragraphe 1 s'appliquent à ces anneaux. En particulier, si X est un germe d'ensemble de Nash réduit ou non, on sait définir $\mathscr{C}_X \subset \mathcal{O}_X$. Si X est irréductible, et si $f \in \mathcal{O}_X$, on démontre l'équivalence des conditions suivantes :

1° $f \in \mathscr{C}_X$;

2° le corps engendré sur $[\mathscr{N}_X]$ par tous les $D_1 \ldots D_s f$, $s \in \mathbf{N}$ et $D_i \in \mathrm{Der}_{\mathbf{C}} [\mathscr{N}_X]$, est de degré de transcendance fini sur $[\mathscr{N}_X]$ (les notations sont celles de 2.12; la preuve est analogue).

Remarque 3.7. — Il n'est pas trivial d'exhiber une série appartenant à $\mathcal{O}_n \setminus \mathscr{C}_n$. On peut procéder comme suit. Rappelons tout d'abord qu'un sous-ensemble Σ de $\mathcal{O}_n$ est *une sous-variété algébrique fermée de* $\mathcal{O}_n$ s'il existe une famille dénombrable de polynômes $P_i \in \mathbf{C}[y_\omega]_{\omega \in \mathbf{N}^n}$ telle que

$$f = \textstyle\sum_{\omega \in \mathbf{N}^n} a_\omega z^\omega \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad P_i(a_\omega) = 0 \quad \text{pour tout } i.$$

Si $p, p' \in \mathbf{N}$, $p' \geqslant p$, soit $\prod_{p,p'}$ la projection associant à tout polynôme $\sum_{|\omega| \leqslant p'} a_\omega z^\omega$ le polynôme $\sum_{|\omega| \leqslant p} a_\omega z^\omega$; soit $\prod_p$ l'application associant à $f = \sum_{\omega \in \mathbf{N}^n} a_\omega z^\omega$ le polynôme $\sum_{|\omega| \leqslant p} a_\omega z^\omega$.

On définit sans peine la codimension d'une sous-variété Σ de $\mathcal{O}_n$ (*cf.* [2], p. 150). La variété Σ est de codimension infinie si, et seulement si, la condition suivante est satisfaite : $\forall p \in \mathbf{N}$, il existe un entier $p' \geqslant p$ et une sous-variété algébrique $V_{p,\,p'}$ de l'espace des polynômes de deg $\leqslant p'$ telle que :

(i) quel que soit le polynôme f_p de deg $\leqslant p$, $V_{p,\,p'} \cap \prod_{p,p'}^{-1}(f_p)$ est une sous-variété algébrique propre de $\prod_{p,p'}^{-1}(f_p)$;

(ii) $\forall f_{p'} \in \prod_{p,p'}^{-1}(f_p) \setminus V_{p,\,p'}$, on a $\prod_{p'}^{-1}(f_{p'}) \cap \Sigma = \emptyset$.

Munissons $\mathcal{O}_n$ de la topologie fine (un système fondamental de voisinages de $\Sigma\, a_\omega z^\omega$ est formé par les $\mathscr{V}(\varepsilon_\omega)_{\omega \in \mathbf{N}^n}$, où $\varepsilon_\omega > 0$ pour tout ω, et $\mathscr{V}(\varepsilon_\omega) = \{\Sigma\, b_\omega z^\omega, \mid a_\omega - b_\omega \mid < \varepsilon_\omega \text{ pour tout } \omega\}$. On a le résultat suivant :

(3.7.1) *Soit Σ_i une famille dénombrable de sous-variétés fermées de $\mathcal{O}_n$ toutes de codimension infinie. Alors, si $f_q = \sum_{|\omega| \leqslant q} a_\omega z^\omega$,*

$$\prod_q^{-1}(f_q) \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma_i$$

est dense dans $\prod_q^{-1}(f_q)$ muni de la topologie fine.

Preuve. — Cela résulte de (i) et (ii) et du fait que $\prod_q^{-1}(f_q)$ est un espace de Baire; la démonstration directe à partir de (i) et (ii) est d'ailleurs évidente.]

Soit $i \in \mathbf{N}$. Si $f \in \mathcal{O}_n$, considérons l'ensemble des

$$f_{\nu,\,\mu,\,\alpha} = z^\nu (\partial^{\mu^1} f)^{\alpha_1} \ldots (\partial^{\mu^i} f)^{\alpha_i} \qquad \text{où} \quad \nu \in \mathbf{N}^n;$$

$\mu^1 < \ldots < \mu^i \in \mathbf{N}^n$ (on suppose que $\mathbf{N}^n$ est ordonné), et $\mu = (\mu^1, \ldots, \mu^i)$; $\alpha_i \in \mathbf{N}$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, $\mid \alpha \mid \leqslant i$. Posons

$$f_{\nu,\,\mu,\,\alpha} = \sum_{\omega \in \mathbf{N}^n} a_\omega^{\nu,\,\mu,\,\alpha} z^\omega;$$

les $f_{\nu,\mu,\alpha}$ sont linéairement dépendants sur $\mathbf{C}$, si, et seulement si, la matrice $(a_\omega^{\nu,\mu,\alpha})$ (qui a un nombre infini de lignes mais un nombre fini de colonnes) n'est pas de rang maximal, c'est-à-dire si tous les mineurs d'ordre maximal sont nuls. Ainsi, les $f_{\nu,\mu,\alpha}$ sont linéairement dépendants sur $\mathbf{C}$ si, et seulement si, $f \in \Sigma_i$, où Σ_i est une variété algébrique de codimension infinie (vérification immédiate). Posons $\Sigma = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \Sigma_i$: on voit que $f \in \mathcal{O}_n \setminus \Sigma$ si, et seulement si, les $\partial^\omega f$, $\omega \in \mathbf{N}^n$, sont algébriquement indépendantes sur $\mathbf{C}[z]$. On a $\mathscr{C}_n \subset \Sigma$, i. e. $\mathcal{O}_n \setminus \mathscr{C}_n \supset \mathcal{O}_n \setminus \Sigma$. D'après (3.7.1), on a le résultat suivant.

(3.7.2) *Si $f \in \mathscr{C}_n$ et si $q \in \mathbf{N}$, il existe $g \in \mathcal{O}_n \setminus \mathscr{C}_n$ aussi proche que l'on veut de f pour la topologie fine, et vérifiant $\prod_q(f) = \prod_q(g)$.*

Remarque 3.8. — En remplaçant $\mathcal{O}_n$ par l'anneau $\mathscr{F}_n = \mathbf{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$, on définirait des anneaux $\overline{\mathscr{B}}_n$, $\overline{\mathscr{B}}_n^{(i)}$, $\overline{\mathscr{B}}_n^*$, $\overline{\mathscr{C}}_n$. Les résultats précédents se transposent immédiatement.

PROBLÈMES. — Une série lacunaire (*cf.* 2.11.4) peut-elle appartenir à $\mathscr{C}_n$? Que peut-on dire du prolongement analytique d'un germe appartenant à $\mathscr{C}_n$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BJÖRK (Jan-Erik). — *The Weyl algebra* A_n (C), Lectures from the Summer School at Grebbestad, June 1975.

[2] TOUGERON (J.-C.). — *Idéaux de fonctions différentiables.* — Berlin, Springer-Verlag, 1972, (Ergebnisse der Mathematik, 71).

(Texte reçu le 25 mai 1977.)

Jean-Claude TOUGERON,
Département de Mathématiques et Informatique,
Université de Rennes-I,
avenue du Général-Leclerc, B.P. n° 25-A,
35031 Rennes Cedex.