

BULLETIN DE LA S. M. F.

YVES DUPAIN

Intervalles à restes majorés pour la suite $\{n\alpha\}$. II

Bulletin de la S. M. F., tome 106 (1978), p. 153-159

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__153_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__153_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTERVALLES A RESTES MAJORÉS POUR LA SUITE $\{n\alpha\}$, II

PAR

YVES DUPAIN

[Université, Bordeaux-I, Talence]

RÉSUMÉ. — Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments du tore $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pour tout intervalle I du tore et pour tout entier positif N , on définit

$$\varphi(I, N) = \text{card} \{n; 0 \leq n < N, u_n \in I\} - N\mu(I),$$

où μ est la mesure de Lebesgue de T . On dit que I est à restes bornés (respectivement majorés) si $\varphi(I, N)$ est borné (respectivement majoré).

Dans cet article, on s'intéresse à la suite $\{n\alpha\}$, où α est un nombre irrationnel. H. KESTEN a caractérisé pour ces suites les intervalles à restes bornés. Nous montrons que, pour tout α , il existe des intervalles à restes majorés qui ne sont pas à restes bornés.

1. Introduction. Définitions et notations

Soient α un irrationnel donné, et I un intervalle du tore \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Pour N entier naturel, posons $\varphi(I, N) = \text{card} \{n, 0 \leq n < N, \{n\alpha\} \in I\} - N\mu(I)$ (μ désignant la mesure de Haar normalisée du tore). Nous dirons que I est à restes bornés (respectivement majorés) pour la suite $\{n\alpha\}$ si la suite $N \rightarrow \varphi(I, N)$ est bornée (respectivement majorée). Dans [2], H. KESTEN caractérise les intervalles à restes bornés (ceux de longueur congrue à $z\alpha \pmod{1}$ pour un z entier). Dans [5], V. T. SOS aborde le problème des intervalles à restes majorés et cite : « Il existe des irrationnels α et des intervalles à restes majorés et à restes non bornés pour la suite $\{n\alpha\}$ ». Dans [1], nous étudions les intervalles à restes majorés ayant une extrémité en 0. Nous nous proposons ici de construire une classe de nombres β (dépendant de α) tels qu'il existe des intervalles du tore de longueur β à restes majorés et à restes non bornés pour la suite $\{n\alpha\}$.

Pour γ élément du tore et N entier naturel, posons :

$$\varphi^-(\gamma, N) = \text{card} \{n, 0 \leq n < N, \{n\alpha\} \in (0, \gamma[) \} - N\mu((0, \gamma[),$$

$$\varphi^+(\gamma, N) = \text{card} \{n, 0 < n \leq N, \{n\alpha\} \in]0, \gamma] \} - N\mu(]0, \gamma]).$$

Considérons le développement de α en fraction continue. Désignons par $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ respectivement la suite des quotients partiels de α et celle des dénominateurs des réduites de α ($q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}$).

Une suite d'entiers $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sera dite normale si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$0 \leq b_1 \leq a_1 - 1,$$

$$0 \leq b_k \leq a_k \quad \text{pour } k = 2, 3, \dots$$

$$b_k = a_k \Rightarrow b_{k-1} = 0 \quad \text{pour } k = 2, 3, \dots$$

Il n'existe pas d'entier impair u tel que $b_k = a_k$ pour $k = u, u+2, u+4, \dots$

De même, on dira qu'une suite finie $(b_k)_{k \in \{1, 2, \dots, K\}}$ est normale si elle vérifie les trois premières des propriétés précédentes.

Soit β un réel ($0 < \beta < 1$). Développer β par rapport à α , c'est associer à β une suite normale $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et une suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telles que

$$r_k = \sum_{i=1}^k b_i q_i \quad \text{et} \quad \beta = \lim \{r_k \alpha\}.$$

Un tel développement existe et est unique (cf. 4). Réciproquement, toute suite normale définit un nombre β .

On dira que β est distingué par rapport à α si la suite normale $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, associée à β dans son développement par rapport à α , possède des plages arbitrairement longues de 0 consécutifs.

$\|x\|$ désignera la distance de x à l'entier le plus proche.

2. Rappels

Dans [1], nous avons démontré le lemme suivant :

LEMME 0. — Soient $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite normale, et $r_k = \sum_{i=1}^k b_i q_i$. Soient m et x deux entiers ($m > 0$ et $0 \leq x < q_{m+1}$); x s'écrit $x = y + d q_m$ avec $0 \leq y < q_m$ et $0 \leq d \leq a_m$. Alors,

1° si m est impair,

$$\varphi^-(\{r_m \alpha\}, x) = \varphi^-(\{r_{m-1} \alpha\}, y) - \lambda_m (d r_{m-1} + b_m x) + A_m(x),$$

où $\lambda_m = \|q_m \alpha\|$ et

$$A_m(x) = \begin{cases} \min(d+1, b_m) & \text{si } y > r_{m-1}, \\ \min(d, b_m) & \text{si } y \leq r_{m-1}; \end{cases}$$

2° si m est pair,

$$\varphi^{-}(\{r_m \alpha\}, x) = \varphi^{-}(\{r_{m-1} \alpha\}, y) + \lambda_m(dr_{m-1} + b_m x) - B_m(x),$$

où $\lambda_m = \|q_m \alpha\|$ et

$$B_m(x) = \begin{cases} \min(d, b_m) & \text{si } y > r_{m-1}, \\ \min(d, b_m + 1) & \text{si } 0 < y \leq r_{m-1}, \\ \min(\max(d-1, 0), b_m) & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Notons enfin les propriétés suivantes (que l'on peut trouver dans [3] et [4] ou qui s'en déduisent trivialement).

(i) tout entier $x < q_{n+1}$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{k=1}^n d_k q_k$, où la suite $(d_k)_{k \in \{1, 2, \dots, n\}}$ est normale;

(ii) $q_{n+2} \geq 2 q_n$.

Posons $\lambda_n = \|q_n \alpha\|$ alors :

(iii) pour tout entier n ($n > 0$), $\lambda_n q_{n+1} + \lambda_{n+1} q_n = 1$.

Soit $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite normale définissant le nombre β . Alors :

(iv) pour tous n et p entiers positifs, $\|\sum_{k=n}^{n+p} (-1)^k d_k \lambda_k\| \leq \lambda_{n-1}$;

(v) $\|\beta - \sum_{k=1}^n (-1)^k d_k \lambda_k\| \leq \lambda_n$;

(vi) pour tous u et v entiers positifs, $\varphi^+(\{u \alpha\}, v) = \varphi^-(\{v \alpha\}, u)$;

(vii) pour tout γ élément du tore et tout entier positif u ,

$$|\varphi^+(\gamma, u) - \varphi^-(\gamma, u)| \leq 1;$$

(viii) soient k un entier positif, et a et b deux éléments du tore tels que $\|a - b\| \leq 2 \lambda_k$. Alors, pour $n < q_{k+1}$,

$$|\varphi^-(a, n) - \varphi^-(b, n)| \leq 2 \quad \text{et} \quad |\varphi^+(a, n) - \varphi^+(b, n)| \leq 2.$$

3. Un lemme principal

LEMME 1. — Soit β un nombre réel, distingué par rapport à α , associé à la suite normale $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ($r_k = \sum_{i=1}^k b_i q_i$). Alors il existe une suite normale $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ($R_k = \sum_{i=1}^k d_i q_i$), une suite strictement croissante d'indices $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, une constante M telles que

$$(\star) \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x, & 0 \leq x < q_{K_n+1}, \\ \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, x) < \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, R_{K_n}) + M. \end{cases}$$

Après avoir choisi une suite convenable d'indices $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, nous introduisons une suite d'entiers $y^{(n)}$ ($y^{(n)} = \sum_{i=1}^{K_n} f_i^{(n)} q_i$) nous permettant d'atteindre les « plus grandes valeurs successives de φ ». La suite (d_n) sera alors construite en utilisant les $f_i^{(n)}$ pour $K_{n-1} < i \leq K_n$.

(a) *Construction des suites $K_n, y^{(n)}, R'_{K_n}, R_{K_n}$ et d_k .*

β étant distingué par rapport à α , on peut construire une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant, $\forall n \in \mathbb{N}^*, K_n$ impair, $K_{n+1} > 4 K_n$ et, $\forall i \in (K_n - n, K_n + n), b_i = 0$.

La suite (K_n) étant fixée, définissons $(y^{(n)})$ par : Pour tout $n, y^{(n)}$ est l'entier maximisant la quantité $\varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, x)$ pour $0 \leq x < q_{K_n+1}$ d'après (i), et il existe une suite normale $(f_k^{(n)})$ telle que $y^{(n)} = \sum_{k=1}^{K_n} f_k^{(n)} q_k$.

Remarquons que, par application du lemme 0, $b_{K_n} = 0$ entraîne $f_{K_n}^{(n)} = 0$.

Pour tout $p, 1 \leq p \leq K_n$, nous poserons $\sum_{k=1}^p f_k^{(n)} q_k = y_p^{(n)}$.

Définissons (R'_{K_n}) et (R_{K_n}) par récurrence :

$$R'_{K_1} = R_{K_1} = R_{K_2} = R'_{K_2} = 0$$

et, pour $n \geq 3$,

$$R'_{K_n} = R_{K_{n-1}} + \sum_{k=K_{n-1}+1}^{K_n} f_k^{(n)} q_k$$

et, si $R'_{K_n} > r_{K_n}$, $R_{K_n} = R'_{K_n}$,

$$\text{si } R'_{K_n} \leq r_{K_n}, \quad R_{K_n} = R'_{K_n} + q_{K_n-2}.$$

Remarquons que dans le second cas,

$$f_{K_n-n+1}^{(n)} = f_{K_n-n+2}^{(n)} = \dots = f_{K_n}^{(n)} = 0$$

car

$$b_{K_n-n} = b_{K_n-n+1} = \dots = b_{K_n} = 0.$$

Il est alors clair (car $f_{K_n}^{(n)} = 0$) qu'il existe une suite \overline{f} normale $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n, R_{K_n} = \sum_{k=1}^{K_n} d_k q_k$ (pour $k \in]K_n, K_{n+1}[$), $d_k = f_k^{(n+1)}$ sauf peut-être pour $k = K_{n+1} - 2$. De plus, pour tout $n > 2$, nous avons $q_{K_n} > R_{K_n} > r_{K_n}$. De même, pour $K_{n-1} \leq p \leq K_n$, nous poserons

$$\sum_{k=1}^p d_k q_k = R_p \quad \text{et} \quad R_{K_{n-1}} + \sum_{k=K_{n-1}+1}^p f_k^{(n)} q_k = R'_p.$$

(b) *Démonstration de la propriété (*)*.

Il faut majorer uniformément en n la quantité

$$\begin{aligned} & \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, y^{(n)}) - \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, R_{K_n}) \\ & \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, y^{(n)}) - \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, R_{K_n}) \\ & = \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, y^{(n)}) - \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, R'_{K_n}) \\ & \quad + \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, R'_{K_n}) - \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, R_{K_n}). \end{aligned}$$

Posons

$$M_n = \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, y^{(n)}) - \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, R'_{K_n}),$$

et appliquons le lemme 0 :

$$\begin{aligned} M_n &= \varphi^-(\{r_{K_{n-1}} \alpha\}, y^{(n)}_{K_{n-1}}) - \varphi^-(\{r_{K_{n-1}} \alpha\}, R_{K_{n-1}}) \\ &\quad + \sum_{k=K_{n-1}+1}^{K_n} (-1)^k \lambda_k b_k (y^{(n)}_{K_{n-1}} - R_{K_{n-1}}) \\ &\quad + \sum_{k=K_{n-1}+1; k \text{ impair}}^{K_n} A_k(y^{(n)}_k) - A_k(R'_k) \\ &\quad - \sum_{k=K_{n-1}+1; k \text{ pair}}^{K_n} B_k(y^{(n)}_k) - B_k(R'_k). \end{aligned}$$

Car les composantes en q_k (pour $k \in (K_{n-1}+1, K_n)$) de $y^{(n)}$ et R'_{K_n} sont les mêmes ($f^{(n)}_k$), ce qui fait que, d'une part, le terme en « $\lambda_m dr_{m-1}$ » dans la formule du lemme 0 se simplifie, et d'autre part, la différence $y^{(n)}_k - R'_k$ est toujours égale à $y^{(n)}_{K_{n-1}} - R_{K_{n-1}}$.

Or $b_{K_{n-1}} = b_{K_{n-1}+1} = \dots = b_{K_{n-1}+n-1} = 0$, d'où

$$\begin{aligned} &\sum_{k=K_{n-1}+1}^{K_n} (-1)^k \lambda_k b_k (y^{(n)}_{K_{n-1}} - R_{K_{n-1}}) \\ &= (y^{(n)}_{K_{n-1}} - R_{K_{n-1}}) \sum_{k=K_{n-1}+n}^{K_n} (-1)^k \lambda_k b_k \\ &\leq |y^{(n)}_{K_{n-1}} - R_{K_{n-1}}| \lambda_{K_{n-1}+n-1} \quad (\text{d'après (iv)}) \\ &\leq q_{K_{n-1}} \lambda_{K_{n-1}+n-1} \quad (\text{car } y_{K_{n-1}} \text{ et } R_{K_{n-1}} < q_{K_{n-1}}) \\ &\leq q_{K_{n-1}} (q_{K_{n-1}+n})^{-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2} \quad (\text{d'après (ii) et (iii)}). \end{aligned}$$

De plus, comme $R_{K_{n-1}} > r_{K_{n-1}}$, et comme, à partir de l'indice $K_{n-1}+1$, $y^{(n)}_k$ et R'_k ont les mêmes composantes $f^{(n)}_k$ sur q_k , si $y^{(n)}_k > r_k$, alors $R'_k > r_k$, pour $k = K_{n-1}+1, K_{n-1}+2, \dots, K_n$, ce qui entraîne

$$A_k(y^{(n)}_k) \leq A_k(R'_k) \quad \text{et} \quad B_k(R'_k) \leq B_k(y^{(n)}_k).$$

Nous obtenons finalement :

$$M_n \leq \varphi^-(\{r_{K_{n-1}} \alpha\}, y^{(n)}_{K_{n-1}}) - \varphi^-(\{r_{K_{n-1}} \alpha\}, R_{K_{n-1}}) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}.$$

Posons

$$P_n = \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, R'_{K_n}) - \varphi^-(\{r_{K_n} \alpha\}, R_{K_n}).$$

Si $R_{K_n} = R'_{K_n}$, $P_n = 0$.

$$\text{Si } R_{K_n} = R'_{K_n} + q_{K_n-2},$$

$$P_n = \lambda_{K_n-2} r_{K_n-2} \quad (\text{car } b_{K_n-2} = 0),$$

$$P_n = \lambda_{K_n-2} r_{K_n-n-1} \quad (\text{car } b_{K_n-n} = b_{K_n-n+1} \dots = b_{K_n-2} = 0),$$

$$P_n \leq \lambda_{K_n-2} q_{K_n-n} \quad (\text{d'après (i)}),$$

$$P_n \leq q_{K_n-n} [q_{K_n-1}]^{-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)/2} \quad (\text{d'après (ii) et (iii)}).$$

Finalement, $P_n \leq (1/\sqrt{2})^{n-2}$.

D'où

$$\begin{aligned} & \varphi^-(\{r_{K_n}\alpha\}, y^{(n)}) - \varphi^-(\{r_{K_n}\alpha\}, R_{K_n}) \\ & \leq \varphi^-(\{r_{K_n-1}\alpha\}, y^{(n-1)}) - \varphi^-(\{r_{K_n-1}\alpha\}, R_{K_n-1}) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

La démonstration du lemme s'achève trivialement.

4. THÉORÈME. — Soient α un irrationnel, et β un réel distingué par rapport à α ($0 < \beta < 1$, $\beta \neq \{z\alpha\}$ pour $z \in \mathbb{Z}$). Alors il existe un intervalle de longueur β à restes majorés pour la suite $\{n\alpha\}$.

Soit $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite normale associée à β . Posons $r_n = \sum_{k=1}^n b_k q_k$. β étant distingué par rapport à α , considérons une suite normale $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant le lemme 1. Posons $R_n = \sum_{k=1}^n d_k q_k$. La suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, étant normale, définit un nombre γ . Nous allons montrer que l'intervalle $(-\gamma, -\gamma + \beta[$ est à restes majorés.

Nous utiliserons le développement de $1 - \gamma$ par rapport à α . Posons $1 - \gamma = \lim \{S_k \alpha\}$ (la suite S_k provenant du développement de $1 - \gamma$ par rapport à α).

Soit $x \in \mathbb{N}$, nous allons majorer $\varphi((-\gamma, -\gamma + \beta[, x)$. Il existe un entier n tel que $R_{K_n} + x < q_{K_n+1}$ (car $R_{K_n} < q_{K_n}$) :

$$\begin{aligned} \varphi((-\gamma, -\gamma + \beta[, x) &= \varphi^-(-\gamma + \beta, x) - \varphi^-(-\gamma, x) \\ &\leq \varphi^-(\{S_{K_n}\alpha + r_{K_n}\alpha\}, x) - \varphi^-(\{S_{K_n}\alpha\}, x) + 4 \\ &\quad (\text{d'après (v) et (viii)}) \\ &= \varphi^+(\{x\alpha\}, S_{K_n} + r_{K_n}) - \varphi^+(\{x\alpha\}, S_{K_n}) + 4 \\ &\quad (\text{d'après (vi)}) \\ &\leq \varphi^-(\{x\alpha\}, S_{K_n} + r_{K_n}) - \varphi^-(\{x\alpha\}, S_{K_n}) + 6 \\ &\quad (\text{d'après (vii)}) \\ &= \varphi((\{-S_{K_n}\alpha\}, \{-S_{K_n}\alpha + x\alpha\}, r_{K_n}) + 6 \\ &= \varphi^-(\{-S_{K_n}\alpha + x\alpha\}, r_{K_n}) - \varphi^-(\{-S_{K_n}\alpha\}, r_{K_n}) + 6. \end{aligned}$$

Or $\|R_{K_n}\alpha - (-S_{K_n}\alpha)\| \leq 2\lambda_{K_n}$ (d'après (v)). En appliquant de nouveau (viii) nous obtenons :

$$\begin{aligned}\varphi((-\gamma, -\gamma + \beta), x) &\leq \varphi^-(\{R_{K_n}\alpha + x\}, r_{K_n}) - \varphi^-(\{R_{K_n}\alpha\}, r_{K_n}) + 10 \\ &\leq \varphi^-(\{r_{K_n}\alpha\}, R_{K_n} + x) - \varphi^-(\{r_{K_n}\alpha\}, R_{K_n}) + 12 \\ &\quad (\text{d'après (vi) et (vii)}).\end{aligned}$$

Or $R_{K_n} + x < q_{K_n+1}$. Nous pouvons appliquer le lemme 1 :

$$\varphi((-\gamma, -\gamma + \beta), x) < M + 12,$$

ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DUPAIN (Y.). — Intervalles à restes majorés pour la suite $\{n\alpha\}$, *Acta Math. Acad. scient. Hung.* t. 29, (3-4), 1977, p. 289-303.
- [2] KESTEN (H.). — On a conjecture of Erdős and Szűs related to uniform distribution mod 1, *Acta Arithm.* Warszawa, t. 12, 1966, p. 193-212.
- [3] LESCA (J.). — Sur la répartition modulo 1 des suites $\{n\alpha\}$, *Acta Arithm.* Warszawa, t. 20, 1972, p. 345-352.
- [4] LESCA (J.). — Sur la répartition modulo 1 des suites $\{n\alpha\}$, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres*, 8^e année, 1966-1967, n° 2, 9 p.
- [5] SOS (V. T.). — On the distribution of the sequence $\{n\alpha\}$, "*Tagung über Zahlentheorie*" [1972.Oberwolfach].

(Texte reçu le 27 janvier 1977.)

Yves DUPAIN,
Laboratoire de Mathématiques
et d'Informatique,
associé au C.N.R.S.,
Université de Bordeaux-I,
351, cours de la Libération,
33405 Talence.