YVES DUPAIN

Intervalles à restes majorés pour la suite $\{n\alpha\}$. II

Bulletin de la S. M. F., tome 106 (1978), p. 153-159
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__153_0>

Bull. Soc. math. France,
106, 1978, p. 153-160.

INTERVALLES A RESTES MAJORÉS POUR LA SUITE $\{n\alpha\}$, II

PAR

YVES DUPAIN

[Université, Bordeaux-I, Talence]

RÉSUMÉ. — Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments du tore $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Pour tout intervalle I du tore et pour tout entier positif N, on définit

$$\varphi(I, N) = \operatorname{card}\{n;\ 0 \leqslant n < N,\ u_n \in I\} - N\mu(I),$$

où μ est la mesure de Lebesgue de $\mathbf{T}$. On dit que I est à restes bornés (respectivement majorés) si $\varphi(I, N)$ est borné (respectivement majoré).

Dans cet article, on s'intéresse à la suite $\{n\alpha\}$, où α est un nombre irrationnel. H. KESTEN a caractérisé pour ces suites les intervalles à restes bornés. Nous montrons que, pour tout α, il existe des intervalles à restes majorés qui ne sont pas à restes bornés.

1. Introduction. Définitions et notations

Soient α un irrationnel donné, et I un intervalle du tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Pour N entier naturel, posons $\varphi(I, N) = \operatorname{card}\{n, 0 \leqslant n < N, \{n\alpha\} \in I\} - N\mu(I)$ (μ désignant la mesure de Haar normalisée du tore). Nous dirons que I est à restes bornés (respectivement majorés) pour la suite $\{n\alpha\}$ si la suite $N \to \varphi(I, N)$ est bornée (respectivement majorée). Dans [2], H. KESTEN caractérise les intervalles à restes bornés (ceux de longueur congrue à $z\alpha$ (mod 1) pour un z entier). Dans [5], V. T. Sos aborde le problème des intervalles à restes majorés et cite : « Il existe des irrationnels α et des intervalles à restes majorés et à restes non bornés pour la suite $\{n\alpha\}$ ». Dans [1], nous étudions les intervalles à restes majorés ayant une extrémité en 0. Nous nous proposons ici de construire une classe de nombres β (dépendant de α) tels qu'il existe des intervalles du tore de longueur β à restes majorés et à restes non bornés pour la suite $\{n\alpha\}$.

Pour γ élément du tore et N entier naturel, posons :

$$\varphi^-(\gamma, N) = \operatorname{card}\{n, 0 \leqslant n < N, \{n\alpha\} \in [0, \gamma[\,\} - N\mu([0, \gamma[),$$

$$\varphi^+(\gamma, N) = \operatorname{card}\{n, 0 < n \leqslant N, \{n\alpha\} \in]0, \gamma]\} - N\mu(]0, \gamma]).$$

Considérons le développement de α en fraction continue. Désignons par $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ respectivement la suite des quotients partiels de α et celle des dénominateurs des réduites de α $(q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1})$.

Une suite d'entiers $(b_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ sera dite normale si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$0 \leqslant b_1 \leqslant a_1 - 1,$$

$$0 \leqslant b_k \leqslant a_k \qquad \text{pour} \quad k = 2, 3, \ldots$$

$$b_k = a_k \quad \Rightarrow \quad b_{k-1} = 0 \qquad \text{pour} \quad k = 2, 3, \ldots$$

Il n'existe pas d'entier impair u tel que $b_k = a_k$ pour $k = u, u+2, u+4, \ldots$

De même, on dira qu'une suite finie $(b_k)_{k\in\{1,2,\ldots,K\}}$ est normale si elle vérifie les trois premières des propriétés précédentes.

Soit β un réel $(0 < \beta < 1)$. Développer β par rapport à α, c'est associer à β une suite normale $(b_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ et une suite $(r_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ telles que

$$r_k = \textstyle\sum_{i=1}^{k} b_i q_i \qquad \text{et} \qquad \beta = \lim \{ r_k \alpha \}.$$

Un tel développement existe et est unique (*cf.* 4). Réciproquement, toute suite normale définit un nombre β.

On dira que β est distingué par rapport à α si la suite normale $(b_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$, associée à β dans son développement par rapport à α, possède des plages arbitrairement longues de 0 consécutifs.

$\| x \|$ désignera la distance de x à l'entier le plus proche.

2. Rappels

Dans [1], nous avons démontré le lemme suivant :

LEMME 0. — *Soient* $(b_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ *une suite normale, et* $r_k = \sum_{i=1}^{k} b_i q_i$. *Soient* m *et* x *deux entiers* ($m > 0$ *et* $0 \leqslant x < q_{m+1}$)*;* x *s'écrit* $x = y + d\,q_m$ *avec* $0 \leqslant y < q_m$ *et* $0 \leqslant d \leqslant a_m$. *Alors,*

1° *si* m *est impair,*

$$\varphi^-(\{ r_m \alpha \}, x) = \varphi^-(\{ r_{m-1} \alpha \}, y) - \lambda_m (d r_{m-1} + b_m x) + A_m(x),$$

où $\lambda_m = \| q_m \alpha \|$ *et*

$$A_m(x) = \begin{cases} \min(d+1, b_m) & \text{si} \quad y > r_{m-1}, \\ \min(d, b_m) & \text{si} \quad y \leqslant r_{m-1}; \end{cases}$$

2° *si m est pair,*

$$\varphi^-(\{r_m\alpha\}, x) = \varphi^-(\{r_{m-1}\alpha\}, y)+\lambda_m(dr_{m-1}+b_m x)-B_m(x),$$

où $\lambda_m = \| q_m\alpha \|$ *et*

$$B_m(x) = \begin{cases} \min(d, b_m) & si \quad y > r_{m-1}, \\ \min(d, b_m+1) & si \quad 0 < y \leqslant r_{m-1}, \\ \min(\max(d-1,0), b_m) & si \quad y = 0. \end{cases}$$

Notons enfin les propriétés suivantes (que l'on peut trouver dans [3] et [4] ou qui s'en déduisent trivialement).

(i) tout entier $x < q_{n+1}$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{k=1}^n d_k q_k$, où la suite $(d_k)_{k\in\{1,2,\dots,n\}}$ est normale;

(ii) $q_{n+2} \geqslant 2q_n$.

Posons $\lambda_n = \| q_n\alpha \|$ alors :

(iii) pour tout entier $n\,(n > 0)$, $\lambda_n q_{n+1}+\lambda_{n+1} q_n = 1$.

Soit $(d_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite normale définissant le nombre β. Alors :

(iv) pour tous n et p entiers positifs, $\| \sum_{k=n}^{n+p}(-1)^k d_k\lambda_k \| \leqslant \lambda_{n-1}$;

(v) $\| \beta-\sum_{k=1}^n(-1)^k d_k\lambda_k \| \leqslant \lambda_n$;

(vi) pour tous u et v entiers positifs, $\varphi^+(\{u\alpha\}, v) = \varphi^-(\{v\alpha\}, u)$;

(vii) pour tout γ élément du tore et tout entier positif u,

$$|\varphi^+(\gamma, u)-\varphi^-(\gamma, u)| \leqslant 1;$$

(viii) soient k un entier positif, et a et b deux éléments du tore tels que $\| a-b \| \leqslant 2\lambda_k$. Alors, pour $n < q_{k+1}$,

$$|\varphi^-(a, n)-\varphi^-(b, n)| \leqslant 2 \qquad \text{et} \qquad |\varphi^+(a, n)-\varphi^+(b, n)| \leqslant 2.$$

3. Un lemme principal

LEMME 1. — *Soit* β *un nombre réel, distingué par rapport à* α, *associé à la suite normale* $(b_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ $(r_k = \sum_{i=1}^k b_i q_i)$. *Alors il existe une suite normale* $(d_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ $(R_k = \sum_{i=1}^k d_i q_i)$, *une suite strictement croissante d'indices* $(K_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, *une constante* M *telles que*

$$(\bigstar)\begin{cases} \forall n\in\mathbf{N}^*, \quad \forall x, \qquad 0\leqslant x < q_{K_n+1}, \\ \varphi^-(\{r_{K_n}\alpha\}, x) < \varphi^-(\{r_{K_n}\alpha\}, R_{K_n})+M. \end{cases}$$

Après avoir choisi une suite convenable d'indices $(K_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, nous introduisons une suite d'entiers $y^{(n)}$ ($y^{(n)} = \sum_{i=1}^{K_n} f_i^{(n)} q_i$) nous permettant d'atteindre les « plus grandes valeurs successives de φ ». La suite (d_n) sera alors construite en utilisant les $f_i^{(n)}$ pour $K_{n-1} < i \leqslant K_n$.

(a) *Construction des suites* K_n, $y^{(n)}$, R'_{K_n}, R_{K_n} *et* d_k.

β étant distingué par rapport à α, on peut construire une suite $(K_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ vérifiant, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, K_n impair, $K_{n+1} > 4\, K_n$ et, $\forall\, i \in (K_n - n,\ K_n + n)$, $b_i = 0$.

La suite (K_n) étant fixée, définissons $(y^{(n)})$ par : Pour tout n, $y^{(n)}$ est l'entier maximisant la quantité $\varphi^-(\{ r_{K_n} \alpha \}, x)$ pour $0 \leqslant x < q_{K_n+1}$ d'après (i), et il existe une suite normale $(f_k^{(n)})$ telle que $y^{(n)} = \sum_{k=1}^{K_n} f_k^n q_k$.

Remarquons que, par application du lemme 0, $b_{K_n} = 0$ entraîne $f_{K_n}^{(n)} = 0$.

Pour tout p, $1 \leqslant p \leqslant K_n$, nous poserons $\sum_{k=1}^{p} f_k^{(n)} q_k = y_p^{(n)}$.

Définissons (R'_{K_n}) et (R_{K_n}) par récurrence :

$$R'_{K_1} = R_{K_1} = R_{K_2} = R'_{K_2} = 0$$

et, pour $n \geqslant 3$,

$$R'_{K_n} = R_{K_{n-1}} + \sum_{k=K_{n-1}+1}^{K_n} f_k^{(n)} q_k$$

et, si $R'_{K_n} > r_{K_n}$, $R_{K_n} = R'_{K_n}$,

$$\text{si} \quad R'_{K_n} \leqslant r_{K_n}, \quad R_{K_n} = R'_{K_n} + q_{K_n-2}.$$

Remarquons que dans le second cas,

$$f_{K_n-n+1}^{(n)} = f_{K_n-n+2}^{(n)} = \ldots = f_{K_n}^{(n)} = 0$$

car

$$b_{K_n-n} = b_{K_n-n+1} = \ldots = b_{K_n} = 0.$$

Il est alors clair (car $f_{K_n}^{(n)} = 0$) qu'il existe une suite normale $(d_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ telle que, pour tout n, $\mathrm{R}_{K_n} = \sum_{k=1}^{K_n} d_k q_k$ (pour $k \in \,]\, K_n, K_{n+1}\, [$, $d_k = f_k^{(n+1)}$ sauf peut-être pour $k = K_{n+1} - 2$). De plus, pour tout $n > 2$, nous avons $q_{K_n} > R_{K_n} > r_{K_n}$. De même, pour $K_{n-1} \leqslant p \leqslant K_n$, nous poserons

$$\sum_{k=1}^{p} d_k q_k = R_p \qquad \text{et} \qquad R_{K_{n-1}} + \sum_{K_{n-1}+1}^{p} f_k^{(n)} q_k = R'_p.$$

(b) *Démonstration de la propriété* ($\star$).

Il faut majorer uniformément en n la quantité

$$\varphi^-(\{ r_{K_n} \alpha \}, y^{(n)}) - \varphi^-(\{ r_{K_n} \alpha \}, R_{K_n})$$

$$\begin{aligned} \varphi^-(\{ r_{K_n} \alpha \}, y^{(n)}) - \varphi^-(\{ r_{K_n} \alpha \}, R_{K_n}) &= \varphi^-(\{ r_{K_n} \alpha \}, y^{(n)}) - \varphi^-(\{ r_{K_n} \alpha \}, R'_{K_n}) \\ &\quad + \varphi^-(\{ r_{K_n} \alpha \}, R'_{K_n}) - \varphi^-(\{ r_{K_n} \alpha \}, R_{K_n}). \end{aligned}$$

Posons

$$M_n = \varphi^-(\{r_{K_n}\alpha\}, y^{(n)}) - \varphi^-(\{r_{K_n}\alpha\}, R'_{K_n}),$$

et appliquons le lemme 0 :

$$\begin{aligned} M_n = {} & \varphi^-(\{r_{K_{n-1}}\alpha\}, y^{(n)}_{K_{n-1}}) - \varphi^-(\{r_{K_{n-1}}\alpha\}, R_{K_{n-1}}) \\ & + \textstyle\sum_{k=K_{n-1}+1}^{K_n} (-1)^k \lambda_k b_k (y^{(n)}_{K_{n-1}} - R_{K_{n-1}}) \\ & + \textstyle\sum_{k=K_{n-1}+1\,;\,k\ \text{impair}}^{K_n} A_k(y^{(n)}_k) - A_k(R'_k) \\ & - \textstyle\sum_{k=K_{n-1}+1\,;\,k\ \text{pair}}^{K_n} B_k(y^{(n)}_k) - B_k(R'_k). \end{aligned}$$

Car les composantes en q_k (pour $k \in (K_{n-1}+1, K_n)$) de $y^{(n)}$ et R'_{K_n} sont les mêmes ($f^{(n)}_k$), ce qui fait que, d'une part, le terme en « $\lambda_m\, dr_{m-1}$ » dans la formule du lemme 0 se simplifie, et d'autre part, la différence $y^{(n)}_k - R'_k$ est toujours égale à $y^n_{K_{n-1}} - R_{K_{n-1}}$.

Or $b_{K_{n-1}} = b_{K_{n-1}+1} = \ldots = b_{K_{n-1}+n-1} = 0$, d'où

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{k=K_{n-1}+1}^{K_n} (-1)^k \lambda_k b_k (y^{(n)}_{K_{n-1}} - R_{K_{n-1}}) \\ & = (y^{(n)}_{K_{n-1}} - R_{K_{n-1}}) \textstyle\sum_{k=K_{n-1}+n}^{K_n} (-1)^k \lambda_k b_k \\ & \leqslant |\, y^{(n)}_{K_{n-1}} - R_{K_{n-1}} \,|\, \lambda_{K_{n-1}+n-1} \quad \text{(d'après (iv))} \\ & \leqslant q_{K_{n-1}} \lambda_{K_{n-1}+n-1} \quad (\text{car } y_{K_{n-1}} \text{ et } R_{K_{n-1}} < q_{K_{n-1}}) \\ & \leqslant q_{K_{n-1}} (q_{K_{n-1}+n})^{-1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)/2} \quad \text{(d'après (ii) et (iii)).} \end{aligned}$$

De plus, comme $R_{K_{n-1}} > r_{K_{n-1}}$, et comme, à partir de l'indice $K_{n-1}+1$, $y^{(n)}_k$ et R'_k ont les mêmes composantes $f^{(n)}_k$ sur q_k, si $y^{(n)}_k > r_k$, alors $R'_k > r_k$, pour $k = K_{n-1}+1, K_{n-1}+2, \ldots, K_n$, ce qui entraîne

$$A_k(y^{(n)}_k) \leqslant A_k(R'_k) \qquad \text{et} \qquad B_k(R'_k) \leqslant B_k(y^{(n)}_k).$$

Nous obtenons finalement :

$$M_n \leqslant \varphi^-(\{r_{K_{n-1}}\alpha\}, y^{(n)}_{K_{n-1}}) - \varphi^-(\{r_{K_{n-1}}\alpha\}, R_{K_{n-1}}) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}.$$

Posons

$$P_n = \varphi^-(\{r_{K_n}\alpha\}, R'_{K_n}) - \varphi^-(\{r_{K_n}\alpha\}, R_{K_n}).$$

Si $R_{K_n} = R'_{K_n}$, $P_n = 0$.

Si $R_{K_n} = R'_{K_n} + q_{K_n-2}$,

$$P_n = \lambda_{K_n-2}\, r_{K_n-2} \quad (\text{car } b_{K_n-2} = 0),$$

$$P_n = \lambda_{K_n-2}\, r_{K_n-n-1} \quad (\text{car } b_{K_n-n} = b_{K_n-n+1} \ldots = b_{K_n-2} = 0),$$

$$P_n \leqslant \lambda_{K_n-2}\, q_{K_n-n} \quad (\text{d'après (i)}),$$

$$P_n \leqslant q_{K_n-n}\left[q_{K_n-1}\right]^{-1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)/2} \quad (\text{d'après (ii) et (iii)}).$$

Finalement, $P_n \leqslant (1/\sqrt{2})^{n-2}$.

D'où

$$\varphi^-(\{r_{K_n}\alpha\}, y^{(n)}) - \varphi^-(\{r_{K_n}\alpha\}, R_{K_n})$$
$$\leqslant \varphi^-(\{r_{K_{n-1}}\alpha\}, y^{(n-1)}) - \varphi^-(\{r_{K_{n-1}}\alpha\}, R_{K_{n-1}}) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}.$$

La démonstration du lemme s'achève trivialement.

4. THÉORÈME. — *Soient* α *un irrationnel, et* β *un réel distingué par rapport à* α ($0 < \beta < 1$, $\beta \neq \{z\alpha\}$ *pour* $z \in \mathbf{Z}$). *Alors il existe un intervalle de longueur* β *à restes majorés pour la suite* $\{n\alpha\}$.

Soit $(b_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ la suite normale associée à β. Posons $r_n = \sum_{k=1}^n b_k q_k$. β étant distingué par rapport à α, considérons une suite normale $(d_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ vérifiant le lemme 1. Posons $R_n = \sum_{k=1}^n d_k q_k$. La suite $(d_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$, étant normale, définit un nombre γ. Nous allons montrer que l'intervalle $[-\gamma, -\gamma+\beta[$ est à restes majorés.

Nous utiliserons le développement de $1-\gamma$ par rapport à α. Posons $1-\gamma = \lim \{S_k\alpha\}$ (la suite S_k provenant du développement de $1-\gamma$ par rapport à α).

Soit $x \in \mathbf{N}$, nous allons majorer $\varphi([-\gamma, -\gamma+\beta[, x)$. Il existe un entier n tel que $R_{K_n} + x < q_{K_n+1}$ (car $R_{K_n} < q_{K_n}$) :

$$\begin{aligned}
\varphi([-\gamma, -\gamma+\beta[, x) &= \varphi^-(-\gamma+\beta, x) - \varphi^-(-\gamma, x)\\
&\leqslant \varphi^-(\{S_{K_n}\alpha + r_{K_n}\alpha\}, x) - \varphi^-(\{S_{K_n}\alpha\}, x) + 4\\
&\qquad (\text{d'après (v) et (viii)})\\
&= \varphi^+(\{x\alpha\}, S_{K_n} + r_{K_n}) - \varphi^+(\{x\alpha\}, S_{K_n}) + 4\\
&\qquad (\text{d'après (vi)})\\
&\leqslant \varphi^-(\{x\alpha\}, S_{K_n} + r_{K_n}) - \varphi^-(\{x\alpha\}, S_{K_n}) + 6\\
&\qquad (\text{d'après (vii)})\\
&= \varphi([\{-S_{K_n}\alpha\}, \{-S_{K_n}\alpha + x\alpha\}[, r_{K_n}) + 6\\
&= \varphi^-(\{-S_{K_n}\alpha + x\alpha\}, r_{K_n}) - \varphi^-(\{-S_{K_n}\alpha\}, r_{K_n}) + 6.
\end{aligned}$$

Or $\| R_{K_n}\alpha-(-S_{K_n}\alpha)\| \leqslant 2\lambda_{K_n}$ (d'après (v)). En appliquant de nouveau (viii) nous obtenons :

$$\varphi([-\gamma, -\gamma+\beta[, x) \leqslant \varphi^{-}(\{R_{K_n}\alpha+x\alpha\}, r_{K_n})-\varphi^{-}(\{R_{K_n}\alpha\}, r_{K_n})+10$$
$$\leqslant \varphi^{-}(\{r_{K_n}\alpha\}, R_{K_n}+x)-\varphi^{-}(\{r_{K_n}\alpha\}, R_{K_n})+12$$

(d'après (vi) et (vii)).

Or $R_{K_n}+x < q_{K_n+1}$. Nous pouvons appliquer le lemme 1 :

$$\varphi([-\gamma, -\gamma+\beta[, x) < M+12,$$

ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUPAIN (Y.). — Intervalles à restes majorés pour la suite $\{n\alpha\}$, *Acta Math. Acad. scient. Hung.* t. 29, (3-4), 1977, p. 289-303.

[2] KESTEN (H.). — On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1, *Acta Arithm,* Warszawa, t. 12, 1966, p. 193-212.

[3] LESCA (J.). — Sur la répartition modulo 1 des suites $\{n\alpha\}$, *Acta Arithm.* Warszawa, t. 20, 1972, p. 345-352.

[4] LESCA (J.). — Sur la répartition modulo 1 des suites $\{n\alpha\}$, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres,* 8^e année, 1966-1967, n° 2, 9 p.

[5] SOS (V. T.). — On the distribution of the sequence $\{n\alpha\}$, "*Tagung über Zahlentheorie*" [1972.Oberwolfach].

(Texte reçu le 27 janvier 1977.)

Yves DUPAIN,
Laboratoire de Mathématiques
et d'Informatique,
associé au C.N.R.S.,
Université de Bordeaux-I,
351, cours de la Libération,
33405 Talence.