BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL BRUNEAU

Sur les fonctions non dérivables de Weierstrass

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 337-347
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__337_0>

Bull. Soc. math. France,
105, 1977, p. 337-347.

SUR LES FONCTIONS NON DÉRIVABLES DE WEIERSTRASS

PAR

Michel BRUNEAU

[Université de Rabat]

RÉSUMÉ. — A tous nombres $0 < \alpha < 1$, $\theta > 1$, sont associées les fonctions de Weierstrass définies par les séries de termes généraux $\theta^{-n\alpha} \sin 2 \pi \theta^n x$, $\theta^{-n\alpha} \cos 2 \pi \theta^n x$. α étant fixé, on cherche quels sont les nombres $\theta > 1$ pour lesquels ces fonctions ont, en presque tout point, la plus grande irrégularité possible, compte tenu de la condition de Lipschitz d'ordre α. Il en est ainsi pour $\theta \in 2\mathbf{N}$ et pour $\theta > 1$ transcendant, mais le problème reste ouvert pour les autres valeurs de θ.

Si l'on fait exception du manuscrit de BOLZANO (1834) et de l'exemple de CELLÉRIER, qui de toute façon ne fût publié qu'en 1890, les fonctions de Weierstrass,

$$(1)\qquad \begin{cases} x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^{-n\alpha} \sin 2\pi\theta^n x & (x \in \mathbf{R}), \\ x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^{-n\alpha} \cos 2\pi\theta^n x & (x \in \mathbf{R}), \end{cases}$$

où $0 < \alpha < 1$, $\theta > 1$, ont fourni le premier exemple historique de fonctions continues sans dérivée. La démonstration originale de Weierstrass se trouve dans DU BOIS-REYMOND [7]. Par la suite, ces fonctions ont donné lieu à de nombreux travaux dont ceux de BROMWICH [1], G. H. HARDY [9], R. SALEM et A. ZYGMUND [11], G. C. YOUNG [12].

Nous cherchons si, pour tout $\theta > 1$, les fonctions (1) ont, en presque tout point, la plus grande irrégularité possible, compte tenu de la condition de Lipschitz. Il en est bien ainsi lorsque $\theta \in 2\mathbf{N}$ et lorsque θ est transcendant. En revanche, le problème reste ouvert pour $\theta = 3$, et plus généralement pour tout nombre algébrique qui n'est pas un entier pair.

1. Finesse des fonctions de Weierstrass

(*a*) *Fonctions fines*. — Soient des nombres donnés $0 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$. Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite *fine* (relativement à α et γ) si

$$(2)\qquad |f(y) - f(x)| \leqslant \gamma |y - x|^\alpha \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

et presque partout sur **R**,

$$\overline{\lim}_{y\to x}\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|^{\alpha}}=\gamma \tag{3}$$

(conformément à la terminologie de BRUNEAU [4], ces fonctions sont encore dites $(1/\alpha)$, $\gamma^{1/\alpha}$ - fines).

(*b*) *Fonctions de Weierstrass.* — On a les résultats suivants :

THÉORÈME 1. — *Pour tout nombre* $0 < \alpha < 1$, *les fonctions* (1) *sont fines lorsque :*

1° $\theta \in 2\,\mathbf{N}$;

2° θ *est transcendant.*

Dans le cas où $\theta \in 2\,\mathbf{N}$, c'est un résultat qui figurait déjà dans BRUNEAU [2] et [3], et dont on trouve la preuve dans BRUNEAU [4] (page 292). Nous nous intéressons donc ici exclusivement au cas où θ est transcendant. Alors des résultats classiques d'équirépartition donnent la clef de la démonstration. On obtient même un résultat plus précis :

THÉORÈME 2. — *Pour tout nombre* $0 < \alpha < 1$ *et tout nombre* $\theta > 1$ *transcendant, les fonctions* (1) *vérifient* (2) *et* (3) *avec*

$$\gamma=\overline{\lim}_{h\downarrow 0}\sum_{n=0}^{+\infty}2(\theta^{n}h)^{-\alpha}|\sin\pi\theta^{n}h|. \tag{4}$$

On notera que, *pour tout choix de* $0 < \alpha < 1$ *et de* $\theta > 1$, $\gamma < +\infty$.

2. Condition de Lipschitz

Dans ce paragraphe, $0 < \alpha < 1$ et $\theta > 1$ sont des nombres réels donnés.

LEMME 1. — *Si f est l'une des fonctions* (1), *quels que soient x, y dans* **R**,

$$|f(y)-f(x)|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}2\theta^{-n\alpha}|\sin\pi\theta^{n}(y-x)|. \tag{5}$$

C'est une conséquence immédiate des majorations

$$\left\{\begin{aligned}&|\sin p-\sin q|\leqslant 2\left|\sin\frac{p-q}{2}\right|,\\&|\cos p-\cos q|\leqslant 2\left|\sin\frac{p-q}{2}\right|.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

LEMME 2. — *Lorsque* $h \to 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\theta^{-n\alpha}|\sin\pi\theta^{n}h|=O(|h|^{\alpha}). \tag{7}$$

Soit $0 < |h| < 1$. Il existe un nombre entier $n_0 \geqslant 0$ tel que

$$\theta^{-(n_0+1)} \leqslant |h| < \theta^{-n_0}. \tag{8}$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{n_0} \theta^{-n\alpha} |\sin \pi \theta^n h| \leqslant \pi (\sum_{n=0}^{n_0} \theta^{n(1-\alpha)}) |h|$$
$$\leqslant \pi \theta^{n_0(1-\alpha)} \frac{|h|}{1-\theta^{\alpha-1}} \leqslant \frac{\pi}{1-\theta^{\alpha-1}} |h|^\alpha$$

et

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \theta^{-n\alpha} |\sin \pi \theta^n h| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \theta^{-n\alpha}$$
$$= \frac{\theta^{-(n_0+1)\alpha}}{1-\theta^{-\alpha}} \leqslant \frac{|h|^\alpha}{1-\theta^{-\alpha}}.$$

LEMME 3. — *γ étant défini par* (4),

$$\sup_{h>0} \sum_{n=0}^{+\infty} 2(\theta^n h)^{-\alpha} |\sin \pi \theta^n h| = \gamma. \tag{9}$$

Soit, pour tout $h > 0$,

$$g(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(\theta^n h)^{-\alpha} |\sin \pi \theta^n h|.$$

Alors, nous voulons prouver que

$$\gamma = \sup_{m \in \mathbf{Z}} \gamma_m$$

où, pour tout $m \in \mathbf{Z}$,

$$\gamma_m = \sup_{0<h<\theta^m} g(h). \tag{10}$$

De l'inégalité $g(\theta^{-1} h) \geqslant g(h)$ $(h > 0)$, on déduit que, pour tout $m \in \mathbf{Z}$, $\gamma_m \geqslant \gamma_{m+1}$, donc $\gamma_m = \gamma_{m+1}$. Ainsi, la suite $(\gamma_m)_{m \in \mathbf{Z}}$ est constante si bien que

$$\gamma = \lim_{m \to -\infty} \gamma_m = \sup_{m \in \mathbf{Z}} \gamma_m. \tag{11}$$

3. Comportement local et équirépartition

(*a*) *Un résultat d'équirépartition.* — Nous utiliserons ici le résultat classique suivant :

LEMME 4. — *Pour tout nombre transcendant* $\theta \neq 0$ et tout $l \in \mathbf{N}$, *la suite*

$$k \to (\theta k, \theta^2 k, \ldots, \theta^l k) \tag{12}$$

est uniformément équirépartie modulo 1, *dans* $\mathbf{R}^l$.

Posons

$$\boldsymbol{\lambda} = (\theta, \theta^2, \ldots, \theta^l).$$

Le seul vecteur $\mathbf{h} \in Z^l$, tel que $\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\lambda}$ soit entier rationnel, est le vecteur $\mathbf{0}$, d'où le résultat (*voir* CHAUVINEAU [6], page 34).

Ce lemme signifie que, quels que soient $0 \leqslant a_i < b_i \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$ et $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, quels que soient les entiers $n \geqslant n_0$, $\nu \geqslant 0$, l'ensemble E des entiers

$$\nu \leqslant k \leqslant \nu + n, \tag{13}$$

tels que

$$a_i \leqslant \{\theta^i k\} \leqslant b_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant l), \tag{14}$$

vérifie

$$\left| \frac{\operatorname{Card} E}{n} - \prod_{i=1}^{l} (b_i - a_i) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{15}$$

(*b*) *Détermination du nombre* γ. — Soient des nombres réels donnés $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $\theta \geqslant 1$. Désignons par f l'une des fonctions (1), et par γ le nombre défini par (4). Des lemmes 1, 2 et 3, il résulte (2) :

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \gamma \, |y - x|^{\alpha} \qquad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Supposons maintenant θ transcendant. Nous allons alors vérifier que si f est fine [i. e. vérifie (2) et (3)], ce ne peut être que relativement au nombre γ défini par (4). Pour cela il suffit de montrer le lemme suivant :

LEMME 5. — *Si $\theta > 1$ est transcendant,*

$$\overline{\lim}_{0 < |y-x| \to 0} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^{\alpha}} = \gamma. \tag{16}$$

Soit un nombre $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $h > 0$ et $l \in \mathbf{N}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{l} 2(\theta^{i-1} h)^{-\alpha} \, |\sin \pi \theta^{i-1} h| \geqslant \gamma - \varepsilon; \tag{17}$$

donc

$$\sum_{n=l}^{+\infty} 2(\theta^{n} h)^{-\alpha} \, |\sin \pi \theta^{n} h| \leqslant \varepsilon. \tag{18}$$

On peut en outre supposer que $\varepsilon h^{\alpha} < 1/4$.
l et h étant ainsi fixés, posons, pour tout $1 \leqslant i \leqslant l$,

$$\xi_i = \frac{\sin \pi \theta^{i-1} h}{|\sin \pi \theta^{i-1} h|} \qquad (1 \leqslant i \leqslant l),$$

en convenant que ce nombre est $+1$ si $\sin \pi \theta^{i-1} h = 0$.

Supposons que f désigne la série en cosinus,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^{-n\alpha} \cos 2\pi \theta^n x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Alors, quel que soit $x \in \mathbf{R}$,

$$f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right) = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \theta^{-n\alpha} \sin 2\pi \theta^n x \sin \pi \theta^n h. \tag{19}$$

Nous allons utiliser cette expression, où h est fixé, avec $x = k\,\theta$, k étant un entier à choisir convenablement.

Posons, pour $1 \leqslant i \leqslant l$,

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{2-\xi_i}{4} - \varepsilon h^{\alpha}, \\ b_i = \dfrac{2-\xi_i}{4} + \varepsilon h^{\alpha}. \end{cases} \tag{20}$$

De l'équirépartition modulo 1 de la suite (12), il résulte qu'il existe un indice $k \in \mathbf{N}$ vérifiant (14). Alors, pour $1 < i \leqslant l$,

$$|\sin 2\pi \theta^i k - \xi_i| \leqslant 2\varepsilon\pi h^{\alpha}. \tag{21}$$

Pour un tel choix de k, nous nous proposons de minorer

$$\varphi(k) = \left| f\left(k\theta+\frac{h}{2}\right)-f\left(k\theta-\frac{h}{2}\right)\right| h^{-\alpha}. \tag{22}$$

Il vient, d'après (18) et (19),

$$\varphi(k) \geqslant -\varepsilon + \left|\sum_{i=1}^{l} 2(\theta^{i-1} h)^{-\alpha} \sin 2\pi \theta^i k \sin \pi \theta^{i-1} h\right|.$$

Ainsi, compte tenu des inégalités (21), il vient

$$\varphi(k) \geqslant -\varepsilon + \sum_{i=1}^{l} 2(\theta^{i-1} h)^{-\alpha} |\sin \pi \theta^{i-1} h| - 2\varepsilon\pi h^{\alpha} \sum_{i=1}^{l} 2(\theta^{i-1} h)^{-\alpha}.$$

Ceci donne finalement, d'après (17),

$$\varphi(k) \geqslant -\varepsilon\left(1+\frac{4\pi}{1-\theta^{-\alpha}}\right)+(\gamma-\varepsilon). \tag{23}$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, ceci prouve que

$$\lim_{k\to+\infty,\, h\to 0} \frac{|f(k\theta+h/2)-f(k\theta-h/2)|}{h^\alpha} = \gamma. \tag{24}$$

Le cas où f désigne la série en sinus se traite de la même façon en remarquant que, quel que soit $x \in \mathbf{R}$,

$$f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \theta^{-n\alpha} \cos 2\pi\theta^n x \sin \pi\theta^n h.$$

(*c*) *Irrégularité de f à distance finie.* — Le lemme 5 est un résultat très faible par rapport à celui que nous ambitionnons, d'autant qu'il ne concerne en fait que le comportement asymptotique de $|f(y)-f(x)|/|y-x|^\alpha$ quand x, $y \to +\infty$. On en déduit cependant le lemme suivant :

LEMME 6. — Si $\theta > 1$ est transcendant, pour tout nombre $\eta > 0$,

$$\overline{\lim}_{0<|y-x|\to 0,\, 0\leqslant x,\, y\leqslant\eta} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|^\alpha} = \gamma. \tag{25}$$

Posons pour $x \neq y$ dans $\mathbf{R}$

$$g(x, y) = \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|^\alpha}. \tag{26}$$

Le lemme 6 se déduit du lemme 5, grâce à l'inégalité

$$\inf_{n\in\mathbf{N}} g(x\theta^{-n}, y\theta^{-n}) \geqslant g(x, y) - \frac{2\pi}{1-\theta^{\alpha-1}}|y-x|^{1-\alpha}, \tag{27}$$

que nous allons maintenant établir. Pour un entier $n \in \mathbf{N}$ fixé, il vient, dans le cas où f désigne la série en sinus,

$$\begin{aligned} g(x\theta^{-n}, y\theta^{-n})|y-x|^\alpha \\ &= \left|\sum_{k=-n}^{+\infty} \theta^{-k\alpha}(\sin 2\pi\theta^k y - \sin 2\pi\theta^k x)\right| \\ &\geqslant g(x, y)|y-x|^\alpha - \sum_{k=-n}^{-1} 2\theta^{-k\alpha}|\sin \pi\theta^k (y-x)|. \end{aligned}$$

Donc

$$g(x, y)-g(x\theta^{-n}, y\theta^{-n}) \leqslant 2\pi\,|y-x|^{1-\alpha}\textstyle\sum_{k=1}^{n}\theta^{k(\alpha-1)}$$
$$\leqslant \frac{2\pi}{1-\theta^{\alpha-1}}\,|y-x|^{1-\alpha}.$$

On prouve de même (27) lorsque f est la série en cosinus.

4. Preuve du théorème 2

On se donne un nombre réel $0<\alpha<1$ et un nombre transcendant $\theta>1$. f désigne l'une des fonctions (1), et γ est le nombre défini par (4). On sait déjà (lemmes 1, 2 et 3) que $|f(y)-f(x)| \leqslant \gamma\,|y-x|^{\alpha}$.

Fixons un nombre $\rho>0$. Nous allons établir que, pour presque tout $x\in\mathbf{R}$,

$$\sup_{y\leqslant x\leqslant z,\, 0<|z-y|\leqslant\rho} g(y, z) \geqslant \gamma-\frac{2\pi}{1-\theta^{\alpha-1}}\rho^{1-\alpha}, \tag{28}$$

avec $g(x, y) = |f(y)-f(x)|\,/\,|y-x|^{\alpha}$ $(x\neq y)$.

Supposons que f est la série en cosinus. Soit $\varepsilon>0$ un nombre arbitrairement choisi. Désignons par U l'ensemble des $x\in\mathbf{R}$ pour lesquels il existe des nombres $y<x<z$ tels que

$$|z-y|\leqslant\rho \qquad \text{et} \qquad g(y, z)\geqslant\gamma-\lambda(\varepsilon, \rho), \tag{29}$$

où

$$\lambda(\varepsilon, \rho)=\left(2+\frac{4\pi}{1-\theta^{-\alpha}}\right)\varepsilon+\frac{2\pi}{1-\theta^{\alpha-1}}\rho^{1-\alpha}. \tag{30}$$

Nous nous proposons d'établir que U est un ensemble de mesure pleine (i. e. que $\mathbf{R}\setminus U$ est négligeable).

Choisissons $0<h\leqslant\rho\wedge 1$ et $l\in\mathbf{N}$ tels que (17) soit satisfaite

$$\textstyle\sum_{i=1}^{l} 2(\theta^{i-1}h)^{-\alpha}\,|\sin\pi\theta^{i-1}h| \geqslant \gamma-\varepsilon.$$

On déduit du lemme 4 et de la démonstration du lemme 5 qu'il existe un entier $n_0\in\mathbf{N}$ tel que, quels que soient les entiers $n\geqslant n_0$, $\nu\geqslant 0$, l'ensemble E des entiers $\nu\leqslant k\leqslant\nu+n$, tels que

$$g\left(k\theta-\frac{h}{2}, k\theta+\frac{h}{2}\right)\geqslant\gamma-\varepsilon\left(2+\frac{4\pi}{1-\theta^{-\alpha}}\right), \tag{31}$$

vérifie

$$\left|\frac{\operatorname{Card} E}{n} - \prod_{i=1}^{l}(b_i - a_i)\right| \leqslant \varepsilon^l h^{l\alpha}$$

où, pour $1 \leqslant i \leqslant l$, on a (20) :

$$a_i = \frac{2-\xi_i}{4} - \varepsilon h^\alpha,$$

$$b_i = \frac{2-\xi_i}{4} + \varepsilon h^\alpha.$$

Dans ces conditions,

$$\frac{\operatorname{Card} E}{n} \geqslant \varepsilon^l h^{l\alpha}. \tag{32}$$

Considérons maintenant un intervalle borné I de $\mathbf{R}_+$ tel que $|I| > 0$. Fixons un entier $m \in \mathbf{N}$ pour lequel

$$\theta^{m-1} |I| \geqslant n_0 + 3, \tag{33}$$

et désignons respectivement par ν et $\nu+n$ le plus petit et le plus grand entier k tel que $\theta\, k \in \theta^m I$.

Puisque $n \geqslant n_0$, l'ensemble des entiers $\nu \leqslant k \leqslant \nu+n$ vérifiant (31) satisfait à la condition (32). Or, pour $k \in E$, on déduit de (27) et (31) que

$$g\left(k\theta^{1-m} - \frac{h}{2}\theta^{-m},\ k\theta^{1-m} + \frac{h}{2}\theta^{-m}\right) \geqslant \gamma - \lambda(\varepsilon, \rho).$$

Alors, puisque $0 < h \leqslant \rho \wedge 1$, les intervalles

$$\left]k\theta^{1-m} - \frac{h}{2}\theta^{-m},\ k\theta^{1-m} + \frac{h}{2}\theta^{-m}\right[\qquad (k \in E) \tag{34}$$

sont inclus dans U, et deux à deux disjoints.

Par conséquent, d'après (32),

$$\frac{|U \cap I|}{|I|} \geqslant \frac{\operatorname{Card} E - 2}{|I|} h\theta^{-m} \geqslant \frac{n\varepsilon^l h^{l\alpha} - 2}{|I|} h\theta^{-m}$$

et, puisque d'après le choix de n, $\theta^m |I| \leqslant \theta(n+3)$, il vient

$$\frac{|U \cap I|}{|I|} \geqslant \frac{n\varepsilon^l h^{l\alpha} - 2}{\theta(n+3)} h. \tag{35}$$

Dans les conditions précédentes, $n \geqslant n_0$, et n_0 peut être choisi arbitrairement grand. Supposons donc

$$n_0 \varepsilon^l h^{l\alpha} - 2 \geqslant (n_0+3) \frac{\varepsilon^l h^{l\alpha}}{2}.$$

Dans ces conditions, on peut affirmer que, pour tout intervalle borné I de $\mathbf{R}_+$, donc plus généralement de $\mathbf{R}$, tel que $|I| > 0$,

$$\frac{|U \cap I|}{|I|} \geqslant \frac{\varepsilon^l h^{l\alpha+1}}{2\theta}. \tag{36}$$

On déduit alors du théorème de densité que U est une partie pleine de $\mathbf{R}$. A des modifications de détail près, la même démonstration tient lorsque f désigne la série en sinus.

Ainsi, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, et que

$$\lambda(0, \rho) = \frac{2\pi}{1-\theta^{\alpha-1}} \rho^{1-\alpha},$$

on a prouvé que l'on a (28) pour presque tout $x \in \mathbf{R}$. En faisant tendre ρ vers zéro, il en résulte que, presque partout sur $\mathbf{R}$,

$$\overline{\lim}_{y \leqslant x \leqslant z,\, 0 < |z-y| \to 0} \frac{|f(z)-f(y)|}{|z-y|^\alpha} = \gamma. \tag{37}$$

Il reste alors à remplacer dans (37) la limite bilatérale par la limite ordinaire. Or cela est possible grâce au lemme suivant :

LEMME 7. — *Pour toute fonction* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *et tout nombre* $0 < \alpha < 1$, *presque partout sur* $\mathbf{R}$,

$$\overline{\lim}_{y \leqslant x \leqslant z,\, 0 < |z-y| \to 0} \frac{|f(z)-f(y)|}{|z-y|^\alpha} = \overline{\lim}_{y \uparrow x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|^\alpha} = \overline{\lim}_{y \downarrow x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|^\alpha}. \tag{38}$$

C'est un corollaire du théorème 1 du chapitre VII de BRUNEAU [4] (page 248).

Remarque. — Le lemme 7 est la conséquence d'un théorème assez difficile. On peut toutefois lui substituer un résultat plus facile : le théorème 6 du chapitre III de BRUNEAU [4], page 87, dont on trouvera la démonstration page 281.

5. Problèmes

PROBLÈME 1. — *Les fonctions* (1) *sont-elles fines lorsque* $\theta = 3$? *Plus généralement, lorsque* $\theta > 1$ *est un nombre algébrique distinct d'un entier pair ?*

Posons, pour tout nombre réel $\theta > 1$,

$$\gamma(\theta) = \overline{\lim}_{h \downarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} 2(\theta^n h)^{-\alpha} |\sin \pi \theta^n h| \tag{39}$$

et

$$\delta(\theta) = \sup_{h > 0,\, x \in \mathbf{R}} h^{-\alpha} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^{-n\alpha} [\sin 2\pi \theta^n (x+h) - \sin 2\pi \theta^n x] \right|. \tag{40}$$

La fonction

$$s(\theta) = \frac{\delta(\theta)}{\gamma(\theta)} \qquad (\theta > 1) \tag{41}$$

vérifie :

1° $0 \leqslant s \leqslant 1$;

2° $s(\theta) = 1$ *pour tout* $\theta > 1$ *transcendant.*

PROBLÈME 2. — *Est-ce que* $s(\theta) < 1$ *pour tout nombre algébrique* $\theta > 1$?

PROBLÈME 3. — *Est-ce que l'ensemble au plus dénombrable* $s(]1, +\infty[)$ *admet* 0,1 *pour points d'accumulation*? *Est dense dans* $[0, 1]$?

On a les mêmes résultats et les mêmes problèmes pour la fonction $c :]1, +\infty[\to \mathbf{R}_+$ définie semblablement en remplaçant dans (40) les sinus par des cosinus.

6. Commentaire

En 1974, nous avons annoncé ([5], page 5 - 09, théorème 6) le résultat établi ici (et même, que la série en sinus était fine pour tout réel $\theta > 1$, alors que nous ne savons toujours pas si ce résultat est vrai !). J.-P. KAHANE et Y. MEYER nous ont fait remarquer que la démonstration était inexacte. Ce sont leurs suggestions, dont nous tenons à les remercier, qui nous ont aidé à trouver la bonne valeur de γ.

Dans notre première démonstration, l'idée était de comparer le comportement de f au point x, au comportement de f à l'origine. Or il se trouve que

$$\overline{\lim}_{x \downarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} < \gamma.$$

Toutefois, $||\,.\,||$ désignant la distance à l'entier le plus proche, cette première technique permet d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Pour tous nombres réels* $0 < \alpha < 1$ et $\theta > 1$, les fonctions

$$\left\{\begin{array}{l} x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^{-n\alpha} \, |\sin 2\pi \theta^n x|, \\ x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^{-n\alpha} \, ||\theta^n x|| \end{array}\right. \tag{42}$$

sont fines.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROMVICH (T. J. I'A.). — *An introduction to the theory of infinite series*. 2nd ed. — London, Macmillan, 1949.

[2] BRUNEAU (M.). — p-variation fine d'une fonction à p-variation bornée, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, 1970, Série A, p. 585-588.

[3] BRUNEAU (M.). — *Étude et généralisation d'une classe de fonctions lipschitziennes très régulières*, Thèse Sc. math., Strasbourg 1970 (multigraphiée).

[4] BRUNEAU (M.). — *Variation totale d'une fonction*. — Berlin, Springer-Verlag, 1974, (*Lecture Notes in Mathematics*, 413).

[5] BRUNEAU (M.). — Comportement local des fonctions et approximation sur le tore, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres*, 16e année, 1974/1975, n° 5, 10 p.

[6] CHAUVINEAU (J.). — Équirépartition et équirépartition uniforme modulo 1, *Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres*, 3e année, 1961/1962, n° 7, 35 p.

[7] DU BOIS-REYMOND (P.). — Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente, *J. für reine und angew. Math.*, t. 79, 1875, p. 21-37.

[8] ERDÖS (P.) and TAYLOR (S. J.). — On the set of convergence of lacunary trigonometric series and the equidistribution properties of related sequences, *Proc. London math. Soc.*, t. 7, 1957, p. 598-615.

[9] HARDY (G. H.). — Weierstrass's non differentiable function, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 17, 1916, p. 301-325.

[10] HOBSON (E. W.). — *The theory of functions of a real variable*. Reprinted from the 3rd edition (1927), vol. 2. — New York, Dover Publications, 1957.

[11] SALEM (R.) and ZYGMUND (A.). — Lacunary power series and Peano curves, *Duke math. J.*, t. 12, 1945, p. 569-578.

[12] YOUNG (G. C.). — *On infinite derivates*, *Quarterly J.*, t. 47, 1916, p. 127-175.

(Texte reçu le 4 octobre 1976.)

Michel BRUNEAU,
Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Université Mohamed V,
Avenue Moulay Chérif,
Rabat (Maroc).