BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES MEYER

Sur les fonctions additives bornées sur les nombres de la forme $p+1$, avec p premier

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 33-45
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__33_0>

Bull. Soc. math. France,
105, 1977, p. 33-45.

SUR LES FONCTIONS ADDITIVES BORNÉES SUR LES NOMBRES DE LA FORME $p + 1$, AVEC p PREMIER

par

JACQUES MEYER
[Paris]

RÉSUMÉ. — P.D.T.A. ELLIOTT a montré que toute fonction additive nulle sur l'ensemble formé des nombres $\{ p + 1 \}$, où p parcours l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers, est identiquement nulle. Dans cet article, on démontre que toute fonction additive f, bornée sur cet ensemble, est bornée sur tout $\mathbf{N}^*$ et que $\sup_{p \in \mathscr{P} - \{2\}} |f(p+1)|$ est égale à $\sup_{n \in \mathbf{N}^*} |f(2\,n)|$. On établit également deux autres théorèmes sur les fonctions additives dont les valeurs sur les nombres $\{ p + 1 \}$ ont des propriétés particulières.

Introduction. Notation

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On considère l'ensemble formé des nombres $\{ p+1 \}$, p parcourant $\mathscr{P}$. Améliorant des résultats antérieurs de KÁTAI ([3], [4]), P.D.T.A. ELLIOTT ([1]) a montré que toute fonction additive nulle sur cet ensemble est identiquement nulle. Il établit également le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit f une fonction additive et A un nombre positif tel que, pour tout nombre premier p, $|f(p+1)| \leqslant A$. Alors les deux séries :*

$$\sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p} \quad et \quad \sum_{|f(p)|\leqslant 1} \frac{|f^2(p)|}{p},$$

convergent.

Je me propose d'améliorer ici ce théorème en montrant que toute fonction additive bornée sur l'ensemble des $\{ p+1 \}$ est bornée sur tout $\mathbf{N}^*$. Plus précisément, je vais montrer le résultat suivant.

THÉORÈME A. — *Soit f une fonction additive et A un nombre positif tel que, pour tout nombre premier $p > 2$, $|f(p+1)| \leqslant A$. Alors $|f(2\,n)| \leqslant A$ pour tout entier $n \geqslant 1$; et l'on a, dans $\overline{\mathbf{R}}$, l'égalité*

$$\sup_{p \in \mathscr{P} \setminus \{2\}} |f(p+1)| = \sup_{n \in \mathbf{N}^*} |f(2\,n)|.$$

(Il est à noter que ceci entraîne $|f(m)| \leqslant A+\inf_{k\in \mathbf{N}^*}|f(2^k)|$ pour tout entier $m \geqslant 1$, car si m est impair, on a, pour tout entier k,

$$f(m)=f(2^k m)-f(2^k).$$

Je vais également établir les deux théorèmes suivants qui recouvrent les résultats d'ELLIOTT.

THÉORÈME B. — *Soit f une fonction additive. S'il existe un nombre complexe α et un nombre positif A, tels que, pour tout nombre premier $p > 2$, $|f(p+1)-\alpha| \leqslant A$, on a*

$$|f(2n)-\alpha| \leqslant A \quad \textit{pour tout entier } n \geqslant 1.$$

THÉORÈME C. — *Soit f une fonction additive. Si $f(p+1)$ tend vers α lorsque p tend vers $+\infty$, on a*

$$f(2^\nu) = \alpha \quad \textit{pour tout entier } \nu \geqslant 1,$$

et f est nulle sur toutes les puissances des autres nombres premiers.

Pour établir les théorèmes A, B, C, on aura besoin d'un résultat préliminaire, dont l'énoncé (mis sous une forme plus précise) et la démonstration font l'objet du paragraphe 1 :

Soit S un ensemble de nombres premiers dont la série des inverses converge; pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe une infinité de nombres premiers p tels que l'on ait $p+1 = 2km$, où

m est sans facteur carré,
m est premier avec $2k$,
m n'a aucun facteur premier dans S,
m a au plus 12 facteurs premiers et tous sont supérieurs à $p^{1/12}$.

Notation. — Pour démontrer le résultat préliminaire, on aura besoin de théorèmes obtenus par les cribles de Selberg et de Brun. Je les utiliserai sous leur forme donnée par HALBERSTAM et RICHERT dans leur ouvrage [2], et je reprendrai les notations de ces auteurs, notamment en ce qui concerne les conditions (Ω_0), (Ω_1), $(\Omega_2(\varkappa))$, $(\Omega_1(1, L))$, $(R(1, \alpha))$ et (R) ainsi que la fonction η_1. Par exemple, on désignera par $\mathcal{P}_K$ l'ensemble $\{p \in \mathcal{P}, p \nmid K\}$ et par $P_K(z)$ le produit $\prod_{p<z,\, p \nmid K} p$. Ainsi $(d P_K(z)) = 1$ si et seulement si $(d, p) = 1$ pour tout nombre premier $p \nmid K < z$.

D'autre part, $\nu(n)$ désignera le nombre des diviseurs premiers distincts de n.

Enfin, on notera $\pi(x, k, l)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x et congrus à l modulo k.

1. Résultat préliminaire

1.1. — Soit S un ensemble de nombres premiers tel que la série $\sum_{p \in S} 1/p$ converge.

Soit u un nombre réel quelconque supérieur à 4. Soit k un nombre entier $\geqslant 1$.

Pour tout nombre réel positif x, on pose $X = (\mathrm{li}\, x)/\varphi(4k^2)$ (φ fonction d'Euler), et on désigne par $T(x, k, u)$ le nombre de couples (p, m) appartenant à $\mathscr{P} \times \mathbf{N}^*$ tels que :

(α) $p \leqslant x$ et $p+1 = 2km$,

(β) m est sans facteur carré et congru à 1 modulo $2k$, et n'est divisible par aucun élément de S; et tout nombre premier q divisant m vérifie $X^{1/u} \leqslant q \leqslant (x/2k)^{1-(1/2u)}$. Autrement dit, $T(x, k, u)$ est le cardinal de l'ensemble des nombres premiers p vérifiant les conditions suivantes :

(a) $p \leqslant x$ et $p \equiv 2k-1 \mod (4k^2)$,

(b) $\forall q \mid P_{2k}(X^{1/u})$, q ne divise pas $p+1$,

(c) $\forall q \in S \cap \mathscr{P}_{2k}$, q ne divise pas $p+1$,

(d) $\forall q \in \mathscr{P}_{2k}$ et $> (x/2k)^{1-(1/2u)}$, q ne divise pas $p+1$,

(e) $\forall q \in \mathscr{P}_{2k}$, q^2 ne divise pas $p+1$.

PROPOSITION (résultat préliminaire). — *Pour $k \geqslant 1$ fixé, on a, pour tout x assez grand;*

$$T(x, k, 12) \geqslant 0{,}21 \prod_{2<p \mid k} \left(\frac{p-1}{p-2}\right) \frac{x}{\varphi(4k^2) \log^2 x}. \tag{I}$$

1.2. — Remarquons que, pour x assez grand, on a :

$$4k^2 \leqslant \log x, \tag{1}$$

$$X \leqslant x, \tag{2}$$

$$x^{1/2} \leqslant X, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{li}\, x}{\log \mathrm{li}\, x} \geqslant \frac{x}{\log^2 x}, \tag{4}$$

$$2k \leqslant \left(\frac{x}{2k}\right)^{1/2u} < X^{1/u} - 1 < X^{1/u} < \left(\frac{x}{2k}\right)^{1-(1/2u)}. \tag{5}$$

(On a $1-(1/2u) > 1/u$ puisque $u > 4$). Remarquons également que la relation (4) entraîne la relation (4') :

$$\frac{x}{\varphi(4k^2)\log^2 x} \leqslant \frac{X}{\log X}. \tag{4'}$$

En effet,

$$\frac{x}{\varphi(4k^2)\log^2 x} \leqslant \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(4k^2)\log \operatorname{li} x} \leqslant \frac{X}{\log \operatorname{li} x} \leqslant \frac{X}{\log X}.$$

On a alors

$$T(x, k, u) \geqslant T_1 - T_2 - T_3 - T_4, \tag{II}$$

où

$$\begin{aligned}
T_1 &= \left| \left\{ p \leqslant x,\ p \equiv 2k-1 \bmod (4k^2),\ (p+1,\ P_{2k}(X^{1/u})) = 1 \right\} \right|,\\
T_2 &= \textstyle\sum_{X^{1/u} \leqslant q \leqslant (x/2k)^{1-(1/2u)},\ q \in S} T^{(q)},\\
T_3 &= \textstyle\sum_{(x/2k)^{1-(1/2u)} < q \leqslant (x+1)/2k} T^{(q)},\\
T^{(q)} &= \left| \left\{ p \leqslant x,\ p \equiv 2k-1 \bmod (4k^2),\right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. p \equiv -1 \bmod (q),\ (p+1,\ P_{2kq}(X^{1/u})) = 1 \right\} \right|,\\
T_4 &= \textstyle\sum_{q \geqslant X^{1/u}} \left| \left\{ p \leqslant x,\ p \equiv 2k-1 \bmod (4k^2),\ p \equiv -1 \bmod (q^2) \right\} \right|.
\end{aligned}$$

1.3. — *Minoration de* T_1. — Pour cela, on utilise un résultat obtenu par le crible de Selberg. On considère l'emsemble $\mathscr{A} = \{ p+1 ; p \leqslant x, p \equiv 2k-1 \bmod (4k^2) \}$ et le « sifting set » $\mathscr{P}_{2k}$.

On pose $\mathscr{A}_d = \{ a \in \mathscr{A}, a \equiv 0 \bmod (d) \}$, de sorte que $|\mathscr{A}_d| = |\{ p+1 ; p \leqslant x, p \equiv 2k-1 \bmod (4k^2), p \equiv -1 \bmod (d) \}|$.

Pour tout nombre d sans facteur carré et premier avec $2k$, on a

$$|\mathscr{A}_d| = \pi(x, 4k^2 d, l),$$

la progression arithmétique $\{ n \equiv l \bmod (4k^2 d) \}$ étant l'intersection des progressions $\{ n \equiv 2k-1 \bmod (4k^2) \}$ et $\{ n \equiv -1 \bmod (d) \}$.

Définissons la fonction multiplicative ω par

$$\omega(p) = \begin{cases} \dfrac{p}{p-1} & \text{si } p \nmid 2k, \\ 0 & \text{si } p \mid 2k. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout nombre d sans facteur carré et premier avec $2k$, on a

$$|\mathscr{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d} X + r_d, \qquad r_d = \pi(x, 4k^2 d, l) - \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(4k^2 d)}.$$

Écrivant $\mathrm{E}(x, n) = \max_{2 \leqslant y \leqslant x} \max_{1 \leqslant l \leqslant n, (l, n)=1} |\pi(y, n, l) - \operatorname{li} y/\varphi(n)|$, il vient $|r_d| \leqslant \mathrm{E}(x, 4k^2 d)$.

Les conditions suivantes sur l'ensemble $\mathscr{A}$ sont vérifiées :

(Ω_1) : Il existe une constante A_1 telle que, pour tout p,

$$0 \leqslant \frac{\omega(p)}{p} \leqslant 1 - \frac{1}{A_1}.$$

Comme $\omega(2) = 0$, (Ω_1) est vérifiée en prenant $A_1 = 2$.

$(\Omega_2(1, L))$: Il existe deux constantes A_2 et L supérieures ou égales à 1 telles que, si $2 \leqslant w \leqslant z$,

$$-L \leqslant \sum_{w \leqslant p < z} \frac{\omega(p) \log p}{p} - \log \frac{z}{w} \leqslant A_2.$$

La condition $(\Omega_2(1, L))$ est vérifiée, car

$$\sum_{w \leqslant p \leqslant z} \frac{\log p}{p} = \log \frac{z}{w} + O(1).$$

$(R(1, 1/2))$: Il existe deux constantes A_3 et A_4 supérieures ou égales à 1 telles que

$$\sum_{d < X^{1/2}/(\log X)^{A_4}, (d, 2k)=1} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} E(x, 4k^2 d) \leqslant A_3 \frac{X}{\log^2 X}.$$

Pour établir cette condition, on utilise un lemme ([2], p. 116), basé sur le théorème de Bombieri, qui permet d'affirmer qu'il existe une constante C telle que

$$\sum_{d \leqslant x^{1/2}/4k^2 (\log x)^C} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} E(x, 4k^2 d) = 0\left(\frac{x}{\varphi(4k^2) \log^3 x}\right).$$

Le lecteur vérifiera sans peine que la condition $(R(1, 1/2))$ est vérifiee avec $A_4 = C + 3/2$.

On peut alors appliquer un théorème du « Crible de Selberg » ([2]), p. 219) qui implique la *minoration* (*cf.* errata de [2]) :

$$T_1 \geqslant X\, W(X^{1/u}) \left\{ 1 - \eta_1\left(\frac{u}{2}\right) - B \frac{L(\log \log 3X)^5}{\log X} \right\},$$

où B est une constante, $W(X^{1/u})$ est égal au produit

$$\prod_{p<X^{1/u},\, p\nmid 2k}\left(1-\frac{1}{p-1}\right),$$

et η_1 est une fonction décroissante vérifiant $\eta_1(y) < 1$ pour tout y supérieur à $\nu_1 = 2{,}06\ldots$

En remarquant que, pour x assez grand, $2k < X^{1/u}$ [relation (5)], et donc

$$W(X^{1/u}) = \prod_{2<p\mid k}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)^{-1}\prod_{2<p<X^{1/u}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right),$$

et en tenant compte de la valeur approchée ([2], p. 128) :

$$\prod_{p>2}(1-(p-1)^{-2}) = 0{,}6601\ldots,$$

on obtient, à partir du théorème de Mertens, la minoration

$$W(X^{1/u}) \geqslant 0{,}741\prod_{2<p\mid k}\left(\frac{p-1}{p-2}\right)\frac{u}{\log X}.$$

D'autre part, pour tout x assez grand, on a

$$B\frac{L(\log\log 3X)^5}{\log X} < \frac{1}{100}(1-\eta_1(3));$$

et donc, pour u supérieur ou égal à 6,

$$\left\{1-\eta_1\left(\frac{u}{2}\right)-B\frac{L(\log\log 3X)^5}{\log X}\right\} \geqslant \frac{99}{100}(1-\eta_1(3)).$$

Une minoration de cette dernière expression s'obtient aisément ([2], p. 211) :

$$\begin{aligned}\eta_1(\nu_1)-\eta_1(3) &= \frac{1}{\nu_1}\int_{\nu_1}^{\infty}(\sigma_1^{-1}(t-1)-1)\,dt-\frac{1}{3}\int_{3}^{\infty}(\sigma_1^{-1}(t-1)-1)\,dt\\ &\geqslant \frac{1}{2{,}07}\int_{2{,}07}^{3}(\sigma_1^{-1}(t-1)-1)\,dt.\end{aligned}$$

On utilise alors la relation suivante ([2], p. 194) :

$$\sigma_1(t) = \frac{e^{-\gamma}t}{2\Gamma(2)} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2;$$

et l'on obtient la minoration $1-\eta_1(3) \geqq 0{,}627$.

Par conséquent, pour $u \geqq 6$, on obtient la minoration

$$T_1 \geqslant \frac{99}{100} \times 0{,}627 \times 0{,}741\, u \prod\nolimits_{2<p \mid k} \left(\frac{p-1}{p-2}\right) \frac{X}{\log X},$$

soit, en utilisant la relation (4′),

$$T_1 \geqslant 0{,}4599\, u \prod\nolimits_{2<p \mid k} \left(\frac{p-1}{p-2}\right) \frac{x}{\varphi(4k^2) \log^2 x}.$$

1.4. *Majoration de* T_2 : Nous commencerons par le calcul de $T^{(q)}$ pour tout nombre premier q vérifiant

$$X^{1/u} \leqslant q \leqslant \left(\frac{x}{2k}\right)^{1-(1/2u)}.$$

En remarquant que q est nécessairement premier avec $2k$ [relation (5)], on voit que

$$T^{(q)} = \left| \left\{ p \leqslant x,\ p \equiv l \bmod (4k^2 q),\ (p+1,\ \mathrm{P}_{2kq}(X^{1/u})) = 1 \right\} \right|,$$

(la progression arithmétique $\{ n \equiv l \bmod (4k^2 q) \}$ étant l'intersection des progressions $\{ n \equiv 2k-1 \bmod (4k^2) \}$ et $\{ n \equiv -1 \bmod (q) \}$).

Pour x assez grand, $(x/2k)^{1/2u}$ est inférieur à $\mathrm{X}^{1/u}$ [d'après (5)]; donc

$$T^{(q)} \leqslant \left| \left\{ p \leqslant x,\ p \equiv l \bmod (4k^2 q),\ \left(p+1,\ P_{2kq}\left(\left(\frac{x}{2k}\right)^{1/2u}\right)\right) = 1 \right\} \right|.$$

D'autre part, tout nombre premier p congru à -1 modulo q est supérieur à $X^{1/u}-1$ et est donc, si x est assez grand [relation (5)], supérieur à $(x/2k)^{1/2u}$. Par conséquent, si x est assez grand, un tel nombre premier p est premier avec $P_{2kq}((x/2k)^{1/2u})$, et l'on a

$$T^{(q)} \leqslant \left| \left\{ n \leqslant x,\ n \equiv l \bmod (4k^2 q),\ \left(n(n+1),\ P_{2kq}\left(\left(\frac{x}{2k}\right)^{1/2u}\right)\right) = 1 \right\} \right|.$$

Ici, nous utiliserons un théorème du « crible de Brun ».

On considère l'ensemble $\mathscr{B} = \{ n(n+1);\ n \leqslant x,\ n \equiv l \bmod (4k^2 q) \}$ et le « sifting set » $\mathscr{P}_{2kq}$.

On pose

$$\mathscr{B}_d = \{ n(n+1) \equiv 0(d),\ n \leqslant x,\ n \equiv l \bmod (4k^2 q) \}.$$

Pour tout nombre d sans facteur carré et premier avec $2\,kq$, on a

$$|\mathscr{B}_d| = \rho(d)\left(\frac{x}{4k^2 qd} + \theta\right), \qquad |\theta| \leqslant 1,$$

où $\rho(d)$ est le nombre de solutions incongruentes de l'équation $n(n+1) \equiv 0 \bmod (d)$.

Définissons la fonction multiplicative ω par

$$\omega(p) = \begin{cases} 2 & \text{si } p \nmid 2kq \\ 0 & \text{si } p \mid 2kq. \end{cases}$$

Ainsi

$$|\mathscr{B}_d| = \frac{\omega(d)}{d}\,\frac{x}{4k^2 q} + r_d \qquad \text{et} \qquad |r_d| \leqslant \omega(d).$$

Les conditions suivantes sur l'ensemble $\mathscr{B}$ sont vérifiées :

(Ω_1) est vérifiée en prenant $A_1 = 3$ (car $\omega(2) = 0$).

(Ω_0) : Il existe une constante A_0 telle que, pour tout p, $\omega(p) \leqslant A_0$.

(Ω_0) est vérifiée avec $A_0 = 2$.

$(\Omega_2(\varkappa))$: Il existe une constante A_2 supérieure ou égale à 1 telle que, si $2 \leqslant w < z$,

$$\sum_{w \leqslant p \leqslant z} \frac{\omega(p)\log p}{p} \leqslant \chi \log\frac{z}{w} + A_2.$$

$(\Omega_2(\varkappa))$ est vérifiée avec $\varkappa = A_2 = 2$, car Ω_0 l'est (*cf.* [2], p. 52).

(R) : Pour tout nombre d sans facteur carré et premier avec $2\,kq$, on a $|r_d| \leqslant \omega(d)$.

En remarquant que $(x/2\,k)^{1/2u}$ est inférieur à $x/2\,kq$ (puisque $q \leqslant (x/2\,k)^{1-(1/2u)}$, on voit que l'on peut appliquer un théorème du « Crible de Brun » ([2], p. 68), et affirmer que

$$T^{(q)} \leqslant B' \frac{x}{4k^2 q} \prod_{p < (x/2k)^{1/2u},\ p \nmid 2kq} \left(1 - \frac{2}{p}\right) (B' \text{ constante absolue}).$$

En remarquant que si x est assez grand, on a $q > (x/2\,k)^{1/2u}$ [relation (5)], on voit que :

$$\prod_{p < (x/2k)^{1/2u},\ p \nmid 2kq} \left(1 - \frac{2}{p}\right) = \prod_{p < (x/2k)^{1/2u},\ p \nmid 2k} \left(1 - \frac{2}{p}\right)$$

$$\leqslant \frac{4}{\prod_{2 < p \mid k} (1 - 2/p)} \prod_{2 < p < (x/2k)^{1/2u}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2.$$

Par suite, en appliquant le théorème de Mertens, on voit qu'il existe une constante positive c_1 telle que, pour tout x assez grand,

$$T^{(q)} \leqslant B' \frac{x}{4k^2 q} c_1 \frac{4u^2}{\log^2(x/2k)}.$$

Il existe donc une constante positive c_2 telle que, si x est assez grand, on a, pour tout q premier vérifiant $X^{1/u} \leqslant q \leqslant (x/2k)^{1-(1/2u)}$,

$$\text{(III)} \qquad T^{(q)} \leqslant c_2 \frac{x}{\varphi(4k^2)\log^2 x} \cdot \frac{1}{q}.$$

Comme u et k sont fixés, on a $\sum_{q>X^u, q\in S} 1/q = \mathrm{o}(1)$, et par conséquent on obtient, pour x assez grand,

$$\text{(IV)} \qquad T_2 = \mathrm{o}\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

1.5. *Majoration de* T_3 : Soit q un nombre premier vérifiant $(x/2k)^{1-(1/2u)} < q \leqslant (x+1)/2k$.

Soit p un élément de l'ensemble

$$\{p \leqslant x,\ p \equiv 2k-1 \bmod (4k^2),\ p \equiv -1 \bmod (q),\ (p+1,\ \mathrm{P}_{2kq}(X^{1/u})) = 1\}.$$

On a $p+1 = 2kqm'$.

On remarque que

$$m' \leqslant \frac{x+1}{2kq} < \left(\frac{x+1}{2k}\right)\left(\frac{x}{2k}\right)^{(1/2u)-1},$$

et donc, si x est assez grand, $m' < X^{1/u}$.

De plus, m' est premier avec $2k$ et n'est divisible par aucun nombre premier divisant $P_{2k}(X^{1/u})$. Donc nécessairement : $m' = 1$ et $q \equiv 1 \bmod (2k)$. Par suite $T^{(q)}$ est nul sauf si q est congru à 1 modulo $2k$, et $2kq-1$ est premier, auquel cas $T^{(q)} = 1$.

Donc,

$$T_3 \leqslant \left| \left\{ q \leqslant \frac{x+1}{2k},\ q \equiv 1 \bmod (2k),\ 2kq-1 \text{ premier} \right\} \right|.$$

On peut appliquer directement un théorème du « Crible de Selberg » ([2], p. 119) et dire que, pour x assez grand :

$$T_3 \leqslant 8 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{2<p\mid k} \frac{p-1}{p-2} \frac{x+1}{\varphi(2k).2k}$$
$$\times \frac{1}{\log^2((x+1)/2k)} \left(1 + O\left(\frac{\log\log((x+1)/2k)}{\log((x+1)/2k)}\right)\right).$$

On voit alors que, pour tout x assez grand,

(V) $$T_3 \leqslant 5{,}29 \prod_{2<p \mid k} \frac{p-1}{p-2} \frac{x}{\varphi(4k^2)\log^2 x}.$$

1.6. *Majoration de* T_4 : On a, trivialement :

$$T_4 \leqslant \frac{x+1}{2k} \sum_{q \geqslant X^{1/u}} \frac{1}{q^2} \leqslant \frac{x+1}{2k}\left(\frac{1}{X^{1/u}} + O\left(\frac{1}{X^{2/u}}\right)\right).$$

Donc, pour tout x assez grand, on voit que

(VI) $$T_4 = o\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

1.7. *Minoration de* $T(x, k, 12)$: En regroupant les expressions (IV), (V) et (VI), on a, pour tout x assez grand,

$$T_2 + T_3 + T_4 \leqslant 5{,}30 \prod_{2<p \mid k} \left(\frac{p-1}{p-2}\right) \frac{x}{\varphi(4k^2)\log^2 x}.$$

En utilisant (II), on voit alors que, pour tout x assez grand,

$$T(x, k, u) \geqslant (0{,}4599\, u - 5{,}30) \prod_{2<p \mid k} \left(\frac{p-1}{p-2}\right) \frac{x}{\varphi(4k^2)\log^2 x},$$

soit, en prenant $u = 12$

$$T(x, k, 12) \geqslant 0{,}21 \prod_{2<p \mid k} \left(\frac{p-1}{p-2}\right) \frac{x}{\varphi(4k^2)\log^2 x}.$$

(Remarquons que cette minoration implique que le nombre total Ω de facteurs premiers de $(p+1)/2k$ est inférieur ou égal à 12, car Ω satisfait à la relation : $x+1 \geqslant X^{\Omega/12}$).

2. **Théorèmes** A, B et C

Nous allons maintenant appliquer le résultat de la proposition précédente à l'étude des fonctions additives. Dans tout le paragraphe 2, nous supposerons que f est une fonction additive.

2.1. – Supposons que, pour tout nombre premier $p > 2$, $|f(p+1)|$ soit borné par un nombre A. En appelant S l'ensemble des p tels que $|f(p)| > 1$, on voit que, d'après le théorème 1 d'ELLIOTT $\sum_{p \in S} 1/p < \infty$.

Soit k un entier supérieur ou égal à 1, et soit u un nombre $\geqslant u_1$.

Pour x assez grand, $T(x, k, 12)$ est positif. Par suite, il existe un nombre premier p tel que $p+1 = 2km$; et m vérifie la condition (β). Le nombre de diviseurs premiers de m est inférieur ou égal à 12.

Donc

$$f(2k) = f(p+1) - f(m)$$
$$|f(2k)| \leqslant A + \sum_{p \mid m} |f(p)| \leqslant A + 12.$$

On en déduit donc que $|f(2k)|$ est borné pour tout $k \geqslant 1$.

2.2. Cependant on peut obtenir une bien meilleure majoration que $(A+12)$ en se servant de (I), et en « prenant la moyenne » sur tous les couples (p, m) satisfaisant à (α) et (β).

Soit x un entier pair assez grand. On a

$$T(x, k, 12)|f(2k)| \leqslant AT(x, k, 12) + \sum'_{m \leqslant x/2k} |f(m)|,$$

($\sum'$ indiquant que la sommation a été effectuée sur les couples (p, m) vérifiant (α) et (β)). Or

$$\begin{aligned}\sum'_{m \leqslant (x/2k)} |f(m)| &\leqslant \sum_{X^{1/12} \leqslant q \leqslant (x/2k)^{1-(1/24)},\, q \notin S} |f(q)| \sum'_{m \equiv 0\,(q),\, m \leqslant x/2k} 1 \\ &\leqslant \sum_{X^{1/12} \leqslant q \leqslant (x/2k)^{1-(1/24)},\, q \notin S} |f(q)|\, T^{(q)},\end{aligned}$$

car $\sum'_{m \equiv 0(q),\, m \leqslant x/2k} 1$ est le nombre d'entiers m congrus à 0 modulo q pour lesquels il existe un nombre premier p tel le couple (p, m) vérifie (α) et (β), et donc l'on a

$$\begin{aligned}\sum'_{m \equiv 0\,(q),\, m \leqslant x/2k} 1 \leqslant |\{ p \leqslant x,\ & p \equiv 2k-1 \bmod (4k^2), \\ & p \equiv -1 \bmod (q),\ (p+1,\ \mathrm{P}_{2kq}(X^{1/12})) = 1 \}| = T^{(q)}.\end{aligned}$$

En utilisant (III) et (I), on déduit de là, en posant

$$c_3 = 0{,}21 \prod_{2 < p \mid k} \left(\frac{p-1}{p-2}\right),$$

que

$$|f(2k)| \leqslant A + \frac{c_2}{c_3} \sum_{X^{1/12} \leqslant q \leqslant (x/2k)^{1-(1/24)},\, q \notin S} \frac{|f(q)|}{q},$$

soit, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\text{(VII)} \qquad \begin{aligned}|f(2k)| \leqslant A + \frac{c_2}{c_3} &\left(\sum_{(x/2k)^{1/24} < q \leqslant (x/2k)^{1-(1/24)}} \frac{1}{q} \right)^{1/2} \\ &\times \left(\sum_{q \geqslant X^{1/12},\, |f(q)| \leqslant 1} \frac{|f^2(q)|}{q} \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{|f(q)|\leqslant 1} |f^2(q)|/q$ converge; on le voit, soit en utilisant le théorème 1 d'ELLIOTT, soit en remarquant que l'on a déjà montré au paragraphe précédent que f est bornée sur tout $\mathbf{N}^*$, ce qui implique que $\sum_p |f(p)|$ converge et donc que la série $\sum |f^2(q)|$ converge également.

Il suffit donc de faire tendre x vers $+\infty$ dans (VII) pour obtenir le théorème A : $|f(2k)| \leqslant A$.

2.3. Si maintenant on suppose que, pour tout $p > 2$, on a

$$|f(p+1)-\alpha| \leqslant A,$$

on remarque d'abord que cela entraîne que $|f(p+1)|$ et, par suite $|f(n)|$ est borné. Ceci implique que $\sum_p |f(p)|$ converge, et donc qu'il y a au plus un nombre fini de p tels que $|f(p)| > 1$ et que la série $\sum_{|f(p)|\leqslant 1} |f^2(p)|/p$ converge. En partant de la relation suivante, vérifiée pour tout couple (p, m) satisfaisant à (α) et (β);

$$|f(2k)-\alpha| \leqslant |f(m)|+|f(p+1)-\alpha|,$$

on obtient, par un calcul rigoureusement analogue à celui du paragraphe précédent, le théorème B :

$$|f(2k)-\alpha| \leqslant A.$$

2.4. Enfin, si on suppose que $f(p+1)$ tend vers α lorsque p tend vers $+\infty$, on remarque de nouveau que les deux séries

$$\sum_{|f(p)|\geqslant 1} \frac{1}{p} \text{ et} \sum_{|f(p)|\leqslant 1} \frac{|f^2(p)|}{p}$$

convergent.

Pour tout ε positif, il existe une constante D telle que, pour tout nombre premier $p > D$

$$|f(p+1)-\alpha| \leqslant \varepsilon.$$

Le nombre de couples (p, m) vérifiant (α), (β) et $p > D$, est supérieur ou égal à $T(x, k, 12)-D$. Par un raisonnement identique à celui du paragraphe 2.2, on voit que

$$|f(2k)-\alpha| \leqslant \varepsilon.$$

Par suite, pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$f(2k) = \alpha.$$

Ceci entraîne que, pour tout entier $\nu \geqslant 1, f(2^{\nu}) = \alpha$ et pour tout nombre premier $q > 2$ et tout entier $r \geqslant 0$,

$$f(q^r) = f(2q^r) - f(2) = 0.$$

Ceci achève la démonstration du théorème C.

2.5. On peut également démontrer le théorème A (ainsi que les théorèmes B et C) selon l'argument suivant :

La série de terme général $|f(p)|$ converge. Donc la suite de terme général $|f(p)|$ tend vers zéro. Soient alors k un entier et ε un nombre réel positif quelconque, il résulte du résultat préliminaire que l'on peut trouver un nombre premier p tel que l'on ait

$$|f(p+1) - f(2k)| \leqslant 12\,\varepsilon.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ELLIOTT (P.D.T.A.). — A conjecture of Kátai, *Acta Arithm*, Warszawa, t. 26, 1974, p. 11-20.

[2] HALBERSTAM (H.) and RICHERT (H. E.). — *Sieve methods*. — London, Academic Press, 1974 (*London mathematical Society Monographs*, 4).

[3] KÁTAI (I.). — On sets characterizing number-theoretical functions; *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 13, 1968, p. 315-320.

[4] KÁTAI (I.). — On sets characterizing number-theoretical functions (II) (The set of "prime plus one" 's is a set of quasi-uniqueness, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 16, 1969, p. 1-4.

(Texte reçu le 1er mars 1976.)

Jacques MEYER
14, place Paul-Michaux,
75016 Paris.